Modellizzazione dei Sistemi Logistici

Programmazione Multiobiettivo

Corso di Studi in Ingegneria Gestionale

a.a. 2020-2021

giuseppe.bruno@unina.it

Docente: Prof. Giuseppe Bruno

Argomenti della lezione

- **Alcune definizioni fondamentali**
- **Soluzioni di Pareto**
- **Il metodo dei pesi**
- **Il metodo dei vincoli (ε-constraints)**

Definizioni fondamentali

Massimizzare

Profitto, utilità, efficienza, produttività, utilizzazione risorse, soddisfazione clienti, redditività investimenti, accessibilità ai servizi, turnover

Minimizzare

Costi (pianificazione e gestione risorse), tempi (attraversamento, lead time, distribuzione…), ritardi nelle consegne, livello scorte, scarti di lavorazione, indicatori ambientali

Bilanciare

Carichi di lavoro, costi/benefici, efficienza/accessibilità, efficienza/robustezza

Definizioni fondamentali

In molti problemi è necessario tener conto contestualmente di più obiettivi o criteri di valutazione

In termini generali un problema di ottimizzazione multicriteria o multi-obiettivo può essere formulato come segue

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max\,!$$

$$x \in X$$

$z_i(x)$ ***i-esima funzione obiettivo*** da massimizzare

(se da minimizzare si inverte il segno)

X insieme delle ***soluzioni ammissibili***

Definizioni fondamentali

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max\,!$$

$$x \in X$$

In generale si distingue tra

Programmazione multi-criteria o multi-attributo se l'insieme delle soluzioni X è noto a priori ed è di dimensioni finite e limitate

Programmazione multi-obiettivo se l'insieme delle soluzioni X non è noto a priori ed è di dimensioni illimitate o combinatoriali

Problema multiattributo

Location	Building cost (10^6 \$)	Logistics (km)	Security (Rating)	Labour cost (Euros per mounth)	Taxes (%)	Temperature
A	10	150	VL	700	17.5	12
D	8	240	L	950	25.0	3
G	7.5	125	H	1400	12.0	-2
N	12.5	110	H	400	16.0	24
O	9	95	M	550	34.0	27
…						

Problema multiattributo

- **Quality of University**
  - **Quality of Teaching**
    - **ALUMNI**: Alumni of an institution winning Nobel Prizes and Fields Medals
  - **Quality of Faculty Staff**
    - **AWARD**: Staff of an institution winning Nobel Prizes and Fields Medals
    - **HiCi**: Highly Cited researchers in 21 broad subject categories
  - **Research Output**
    - **N&S**: Papers published in Nature and Science
    - **PUB**: Papers indexed in Science Citation Index-expanded and Social Science Citation Index
  - **Per Capita Performace**
    - **PCP**: Per capita academic performance of an institution

Academic Ranking of World Universities

Problema multiattributo

UNIVERSITIES	TEACHING	STAFF		RESEARCH		PER-CAPITA PERFORMANCE
	ALUMNI	AWARD	HICI	N&S	PUB	PCP
CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY	50.3	68.8	56.7	64.8	46.9	100
COLUMBIA UNIVERSITY	70.7	67.4	56.2	47.6	69.9	32.1
CORNELL UNIVERSITY	42.3	51.1	54.3	49.9	59.5	38.1
HARVARD UNIVERSITY	100	100	100	100	100	69.2
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY (MIT)	70.5	80.3	66.8	70.1	61.4	64.5
PRINCETON UNIVERSITY	56.4	84.8	61.1	43.3	44.3	65.5
STANDFORD UNIVERSITY	40.2	78.4	87.6	68.4	69.7	50.1
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY	67.6	79.3	69	70.9	70.6	54.2
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES	27.2	42.6	56.9	49.2	75.1	31.2
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SAN DIEGO	15.1	35.8	60.2	54.6	65.1	37.9
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE	88.5	92.6	53.9	54.3	65.7	53.1
UNIVERSITY OF CHICAGO	65.5	83.9	50.9	39.8	50.5	40
UNIVERSITY OF OXFORD	56.2	57.6	48.8	49.8	68.5	41.1
UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA	32.9	34.3	57.1	46.9	68.6	28.5
YALE UNIVERSITY	48.6	44.9	58.5	56.3	62	37

Problema multiattributo

https://lab24.ilsole24ore.com/qualita-della-vita/

EXAMPLES 2 – ITALIAN SOCCER LEAGUE 2011/12, SERIE A

	generale							casa							trasferta						
SQUADRE	Pt	G	V	N	P	R	S	Pt	G	V	N	P	R	S	Pt	G	V	N	P	R	S
Juventus	84	38	23	15	0	68	20	45	19	13	6	0	40	12	39	19	10	9	0	28	8
AC Milan	80	38	24	8	6	74	33	41	19	12	5	2	36	11	39	19	12	3	4	38	22
Udinese	64	38	18	10	10	52	35	43	19	13	4	2	33	13	21	19	5	6	8	19	22
Lazio	62	38	18	8	12	56	47	36	19	10	6	3	28	16	26	19	8	2	9	28	31
Napoli	61	38	16	13	9	66	46	36	19	10	6	3	39	22	25	19	6	7	6	27	24
Inter	58	38	17	7	14	58	55	34	19	10	4	5	36	27	24	19	7	3	9	22	28
AS Roma	56	38	16	8	14	60	54	35	19	10	5	4	39	22	21	19	6	3	10	21	32
Parma	56	38	15	11	12	54	53	35	19	10	5	4	34	20	21	19	5	6	8	20	33
Bologna	51	38	13	12	13	41	43	28	19	8	4	7	23	24	23	19	5	8	6	18	19
Chievo	49	38	12	13	13	35	45	30	19	8	6	5	16	15	19	19	4	7	8	19	30
Catania	48	38	11	15	12	47	52	32	19	9	5	5	24	15	16	19	2	10	7	23	37
Atalanta	46	38	13	13	12	41	43	33	19	9	6	4	23	15	19	19	4	7	8	18	28
Fiorentina	46	38	11	13	14	37	43	28	19	7	7	5	24	22	18	19	4	6	9	13	21
Siena	44	38	11	11	16	45	45	28	19	8	4	7	27	19	16	19	3	7	9	18	26
Cagliari	43	38	10	13	15	37	46	29	19	7	8	4	23	16	14	19	3	5	11	14	30
Palermo	43	38	11	10	17	52	62	33	19	10	3	6	38	30	10	19	1	7	11	14	32
Genoa	42	38	11	9	18	50	69	33	19	9	6	4	29	24	9	19	2	3	14	21	45
Lecce	36	38	8	12	18	40	56	15	19	3	6	10	22	29	21	19	5	6	8	18	27
Novara	32	38	7	11	20	35	65	23	19	5	8	6	20	27	9	19	2	3	14	15	38
Cesena	22	38	4	10	24	24	60	13	19	2	7	10	15	24	9	19	2	3	14	9	36

Problema multiobiettivo

Soluzione ottima

In molti problemi è necessario tener conto contestualmente di più obiettivi o criteri di valutazione

In termini generali un problema di ottimizzazione multicriteria o multi-obiettivo può essere formulato come segue

$$\overline{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max\,!$$

$$x \in X$$

$z_i(x)$ ***i-esima funzione obiettivo*** da massimizzare

(se da minimizzare si inverte il segno)

X insieme delle ***soluzioni ammissibili***

Soluzione ottima

$$\overline{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max\,!$$
$$x \in X$$

Una soluzione x^* è detta soluzione ottima se

$$z_i(x^*) \geq z_i(x) \qquad \nabla x \in X \qquad \nabla i = 1.., p$$

Soluzione ottima

	Math	Physics	Chemistry	Biology
Andrea	9	7	7	5
Daniele	4	8	9	7
Giulia	8	6	8	8
Natalia	9	10	4	4
Olga	10	10	9	8

Olga soluzione ottima

Soluzione ottima

	Math	Physics	Chemistry	Biology
Andrea	9	7	7	5
Daniele	4	8	9	7
Giulia	8	6	8	8
Natalia	9	10	4	4
Olga	10	10	8	8

Non esiste soluzione ottima

Soluzione ottima

In molte situazioni la soluzione ottima non esiste in generale perchè

- **Non esiste una soluzione migliore** (non peggiore) delle altre per tutti gli obiettivi
- **Gli obiettivi sono intrinsecamente contrastanti tra loro**

Costo/beneficio   Efficienza/equità   Costo/sostenibilità

Efficienza/equità   Tempi/bilanciamento carico di lavoro

Soluzione di Pareto

Si introduce il concetto di dominanza

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max\,!$$

$$x \in X$$

Una soluzione x è **dominata** da una soluzione y se

$$z_i(y) \geq z_i(x) \qquad \nabla x \in X \qquad \nabla i = 1.., p$$

Una soluzione x è dominata se esiste una qualsiasi soluzione migliore (noin peggiore) per tutti gli obiettivi

Una soluzione x' è detta **soluzione efficiente o non inferiore o di Pareto** se non esiste nessuna soluzione che la domini

Soluzione di Pareto

	Math	Physics	Chemistry	Biology
Andrea	9	7	7	5
Daniele	4	8	10	9
Giulia	8	6	8	8
Natalia	9	10	4	4
Olga	10	8	7	5

Andrea è dominato da Olga → **Andrea non è soluzione di Pareto**

Soluzione di Pareto

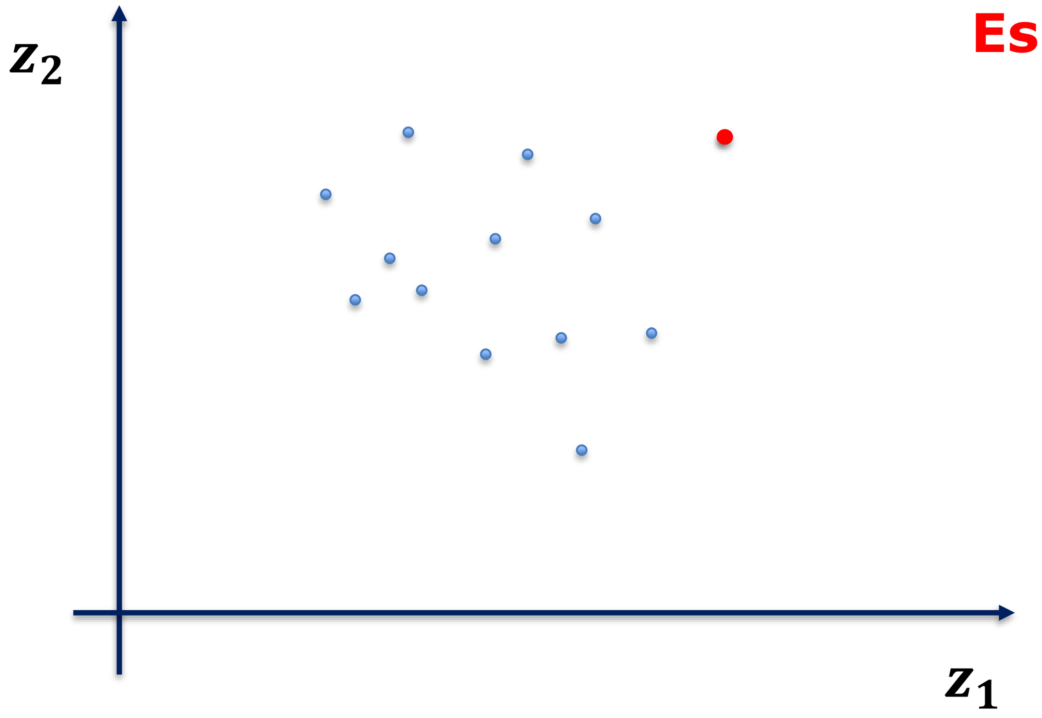
	Math	Physics	Chemistry	Biology
Andrea	9	7	7	5
Daniele	4	8	10	9
Giulia	8	6	7	5
Natalia	9	9	4	4
Olga	10	8	7	6

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Soluzione di Pareto

Si consideri il caso di problema **biobiettivo**

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), z_2(x)) \quad Max\,!$$
$$x \in X$$

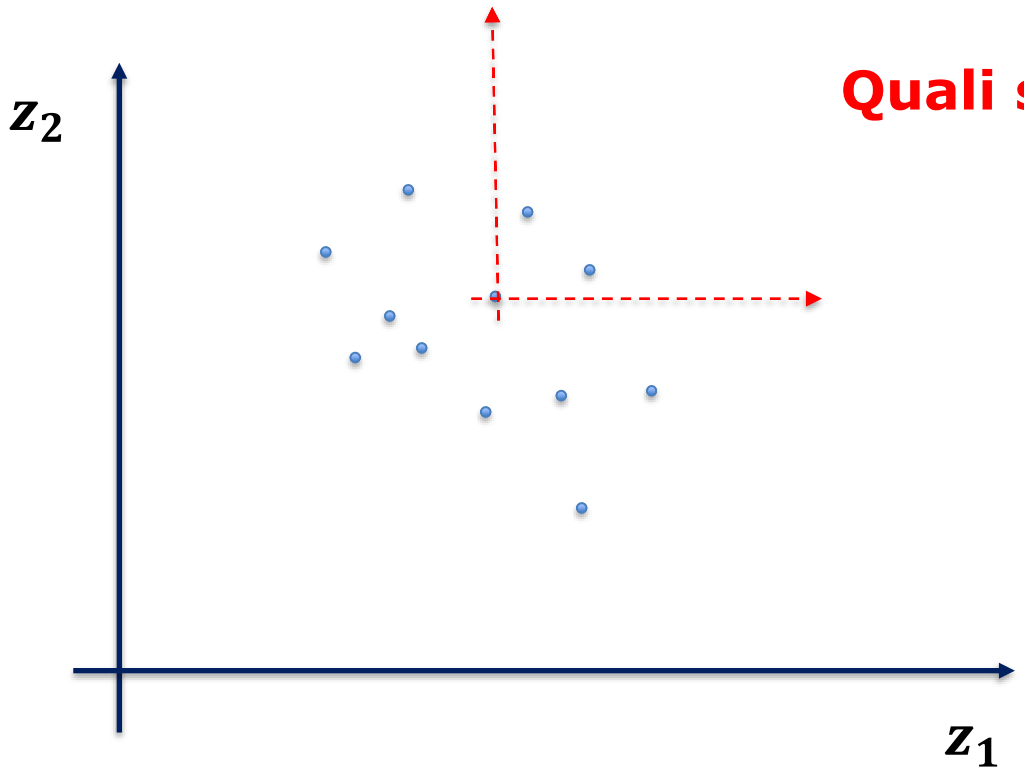


Esiste la soluzione ottima?

Soluzione di Pareto

Si consideri il caso di problema **biobiettivo**

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), z_2(x)) \quad Max\,!$$
$$x \in X$$

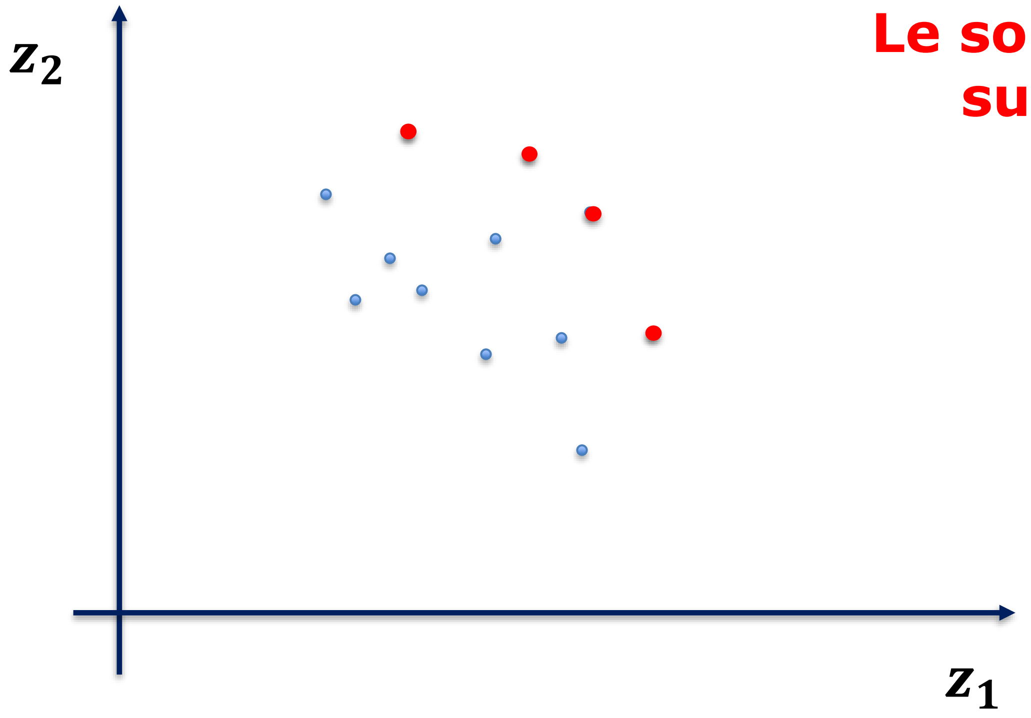


Quali sono le soluzioni di Pareto?

Soluzione di Pareto

Si consideri il caso di problema **biobiettivo**

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), z_2(x)) \quad \boldsymbol{Max}\,!$$
$$x \in X$$



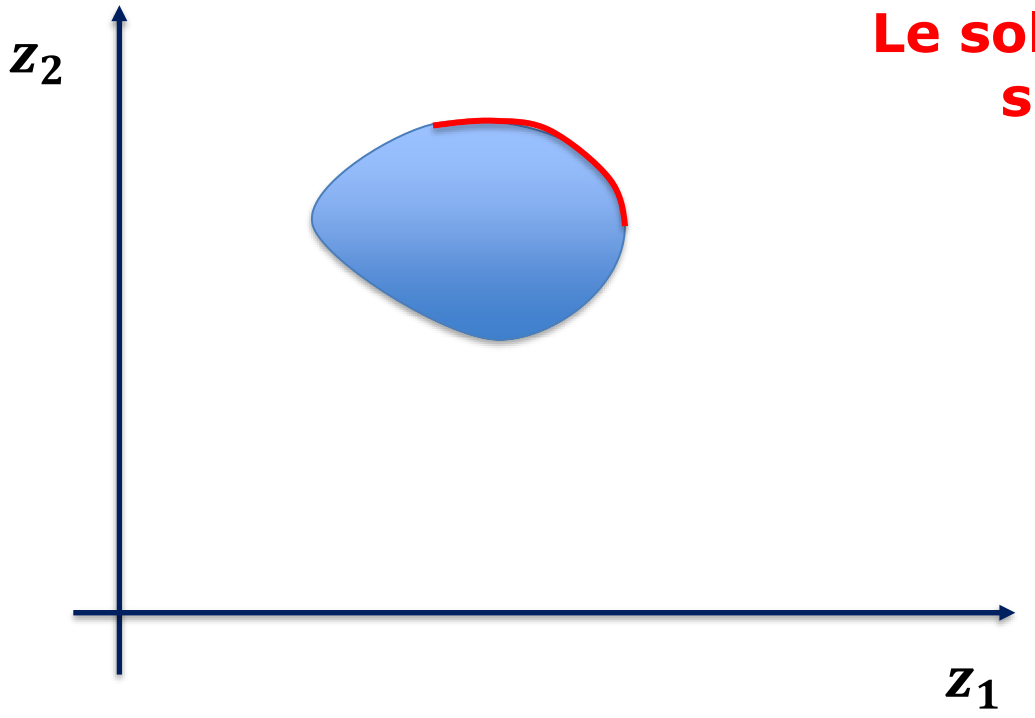
Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Ovest

Soluzione di Pareto

Si consideri il caso di problema **biobiettivo**

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), z_2(x)) \quad Max\,!$$

$$x \in X$$



Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Soluzione di Pareto

Nel caso multiobiettivo (insieme illimitato o di numerosità combinatoriale) **la ricerca di tutte le soluzioni di Pareto è un problema NP-hard**

E’ possibile effettuare una stima (sottinsieme) delle soluzioni di Pareto

- **Metodo dei pesi**
- **Metodo dei vincoli (ε-constraints)**

Metodo dei pesi

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max\,!$$
$$x \in X$$

Si associa ad ogni obiettivo un peso w_i

Si trasforma il problema in un problema monobiettivo, considerando come f.o. la somma pesata degli obiettivi

$$z(x) = \sum_{i=1..p} w_i\, z_i \qquad Max\,!$$
$$\sum_{i=1..p} w_i = 1$$
$$x \in X$$

Metodo dei pesi

	Math	Physics	Chemistry	Biology	**Total**	**Ranking**
Andrea	9	7	7	5	37	**3**
Daniele	4	8	10	9	35	**5**
Giulia	8	6	8	8	38	**2**
Natalia	9	10	4	4	36	**4**
Olga	10	8	6	5	39	**1**
weight	2	1	1	1		

Metodo dei pesi

	Math	Physics	Chemistry	Biology	**Total**	**Ranking**
Andrea	9	7	7	5	35	**3(3)**
Daniele	4	8	10	9	41	**1(5)**
Giulia	8	6	8	8	38	**2(2)**
Natalia	9	10	4	4	31	**5(4)**
Olga	10	8	6	5	35	**4(1)**
weight	1	1	2	1		

Definizioni fondamentali

$$z(x) = \sum_{i=1..p} w_i \, z_i \qquad Max\,!$$

$$\sum_{i=1..p} w_i = 1$$

$$x \in X$$

Si può dimostrare che comunque si scelgano $w_i \geq 0$ **la soluzione ottima del problema monobiettivo è soluzione di Pareto del problema multi-obiettivo**

Soluzione di Pareto

	Math	Physics	Chemistry	Biology	
Andrea	9	7	7	5	46
Daniele	4	8	10	9	39
Giulia	8	6	7	5	42
Natalia	9	9	4	4	44
Olga	10	8	7	6	51
weight	3	1	1	1	

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Definizioni fondamentali

Si consideri il caso di problema **biobiettivo**

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), z_2(x)) \quad Max\,!$$
$$x \in X$$

Il problema monoobiettivo associato si può scrivere nella forma

$$z(x) = wz_1(x) + (1-w)z_2(x)$$
$$0 \leq w \leq 1$$
$$x \in X$$

Esempio w=0.3 $\quad z(x) = 0.3\, z_1(x) + 0.7\, z_2(x)$

Esempio w=0 $\quad z(x) = 0 + z_2(x)$

Esempio w=1 $\quad z(x) = z_1(x) + 0$

Metodo dei pesi

	Math	Physics
Andrea	8	7
Daniele	9	7
Giulia	9	9
Natalia	6	10
Olga	8	8
weight	1	0

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Metodo dei pesi

	Math	Physics	Total
Andrea	8	7	8
Daniele	9	7	9
Giulia	9	9	9
Natalia	6	10	6
Olga	8	8	8
weight	1	0	

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Metodo dei pesi

	Math	Physics
Andrea	8	7
Daniele	9	7
Giulia	9	6
Natalia	6	9
Olga	8	8
weight	0	1

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Metodo dei pesi

	Math	Physics	Total
Andrea	8	7	7
Daniele	9	7	7
Giulia	9	6	6
Natalia	6	9	9
Olga	8	8	8
weight	0	1	

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Metodo dei pesi

	Math	Physics	Total
Andrea	8	7	
Daniele	9	7	
Giulia	9	6	
Natalia	6	9	
Olga	8	8	
weight	0.4	0.6	

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

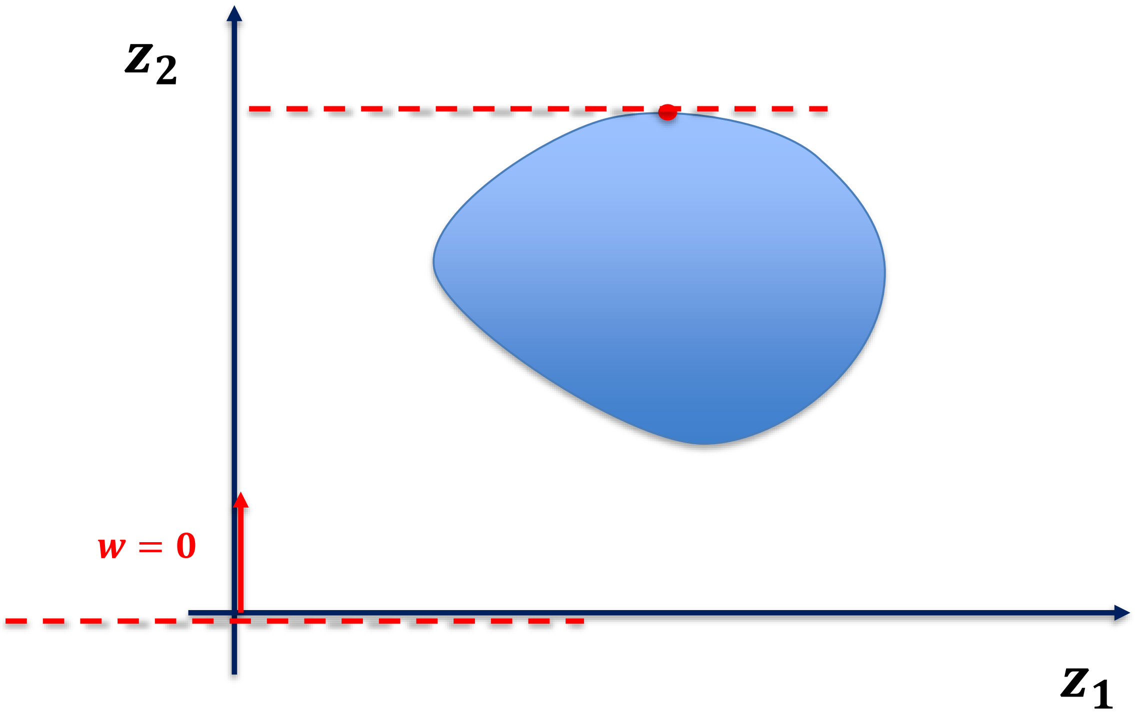
Metodo dei pesi

	Math	Physics	Total
Andrea	8	7	7.4
Daniele	9	7	7.8
Giulia	9	6	7.2
Natalia	6	9	7.8
Olga	8	8	8.0
weight	0.4	0.6	

Daniele, Natalia e Olga soluzioni di Pareto

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1 - w)z_2(x)$$
$$0 \leq w \leq 1$$
$$x \in X$$

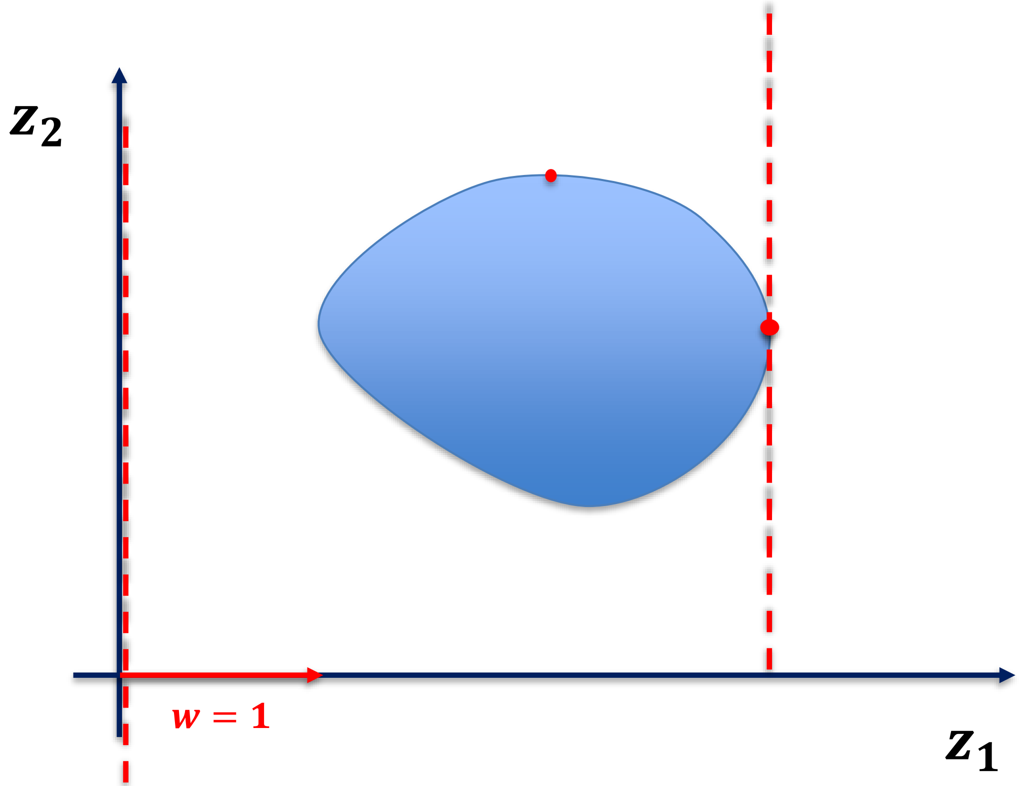


$w = 0$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1 - w)z_2(x)$$
$$0 \leq w \leq 1$$
$$x \in X$$



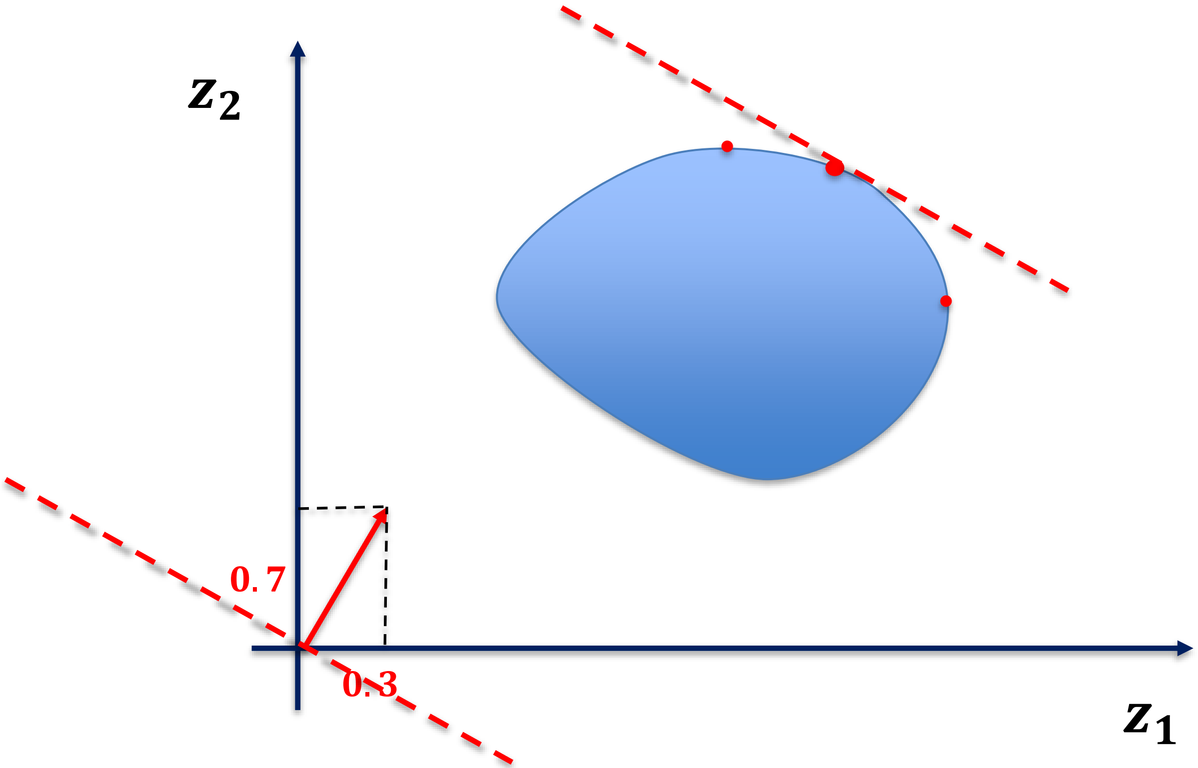
$w = 0$

$w = 1$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1-w)z_2(x)$$
$$0 \le w \le 1$$
$$x \in X$$



$w = 0$

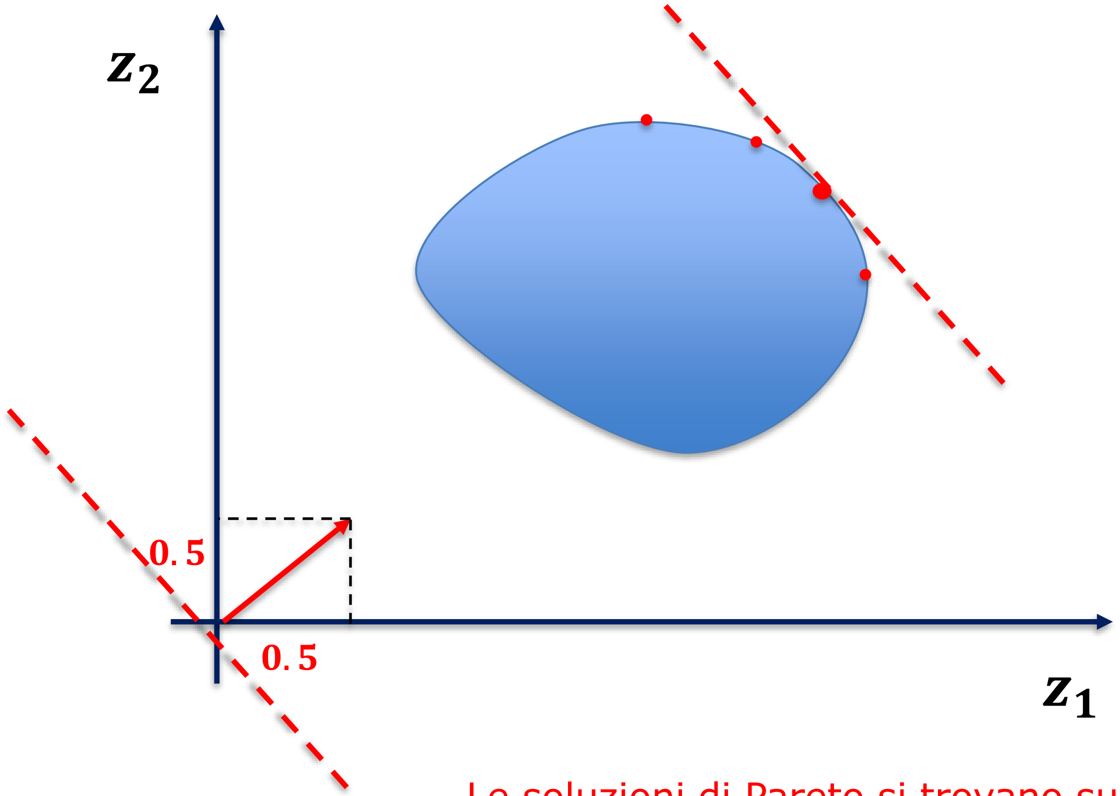
$w = 0.3$

$w = 1$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1-w)z_2(x)$$
$$0 \le w \le 1$$
$$x \in X$$



$w = 0$

$w = 0.3$

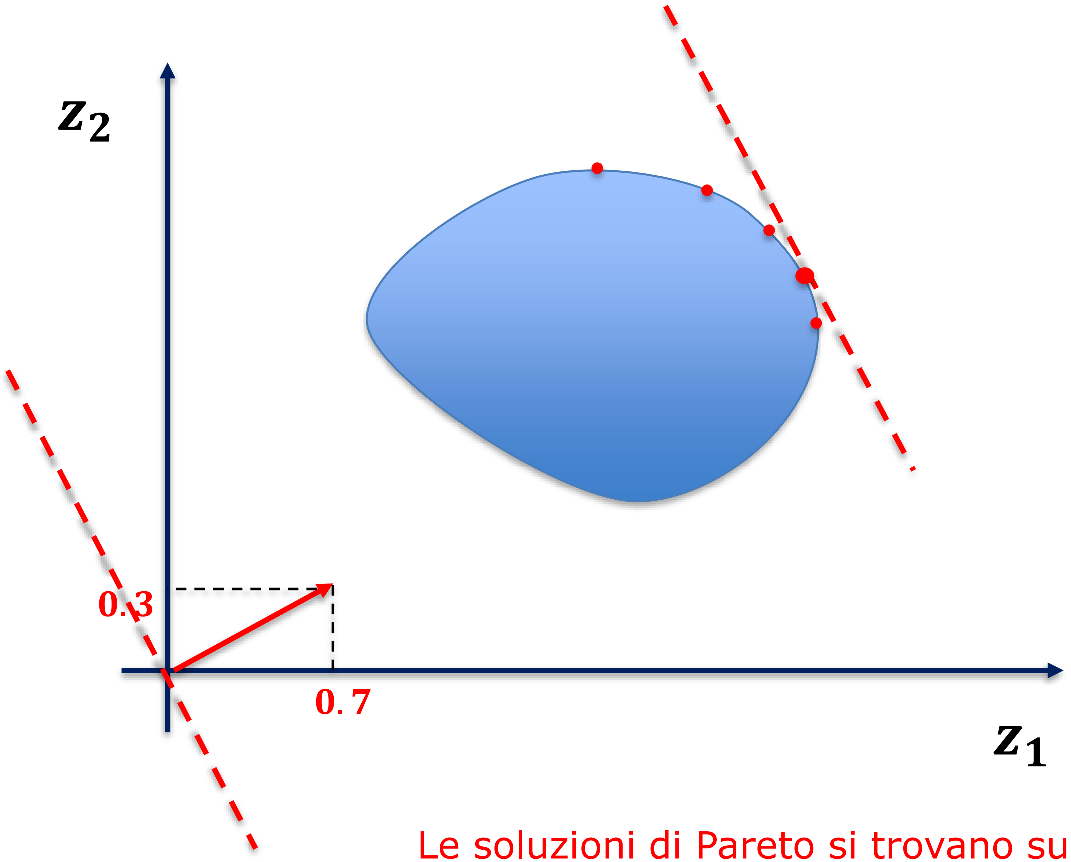
$w = 0.5$

$w = 1$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1-w)z_2(x)$$
$$0 \leq w \leq 1$$
$$x \in X$$



$w = 0$

$w = 0.3$

$w = 0.5$

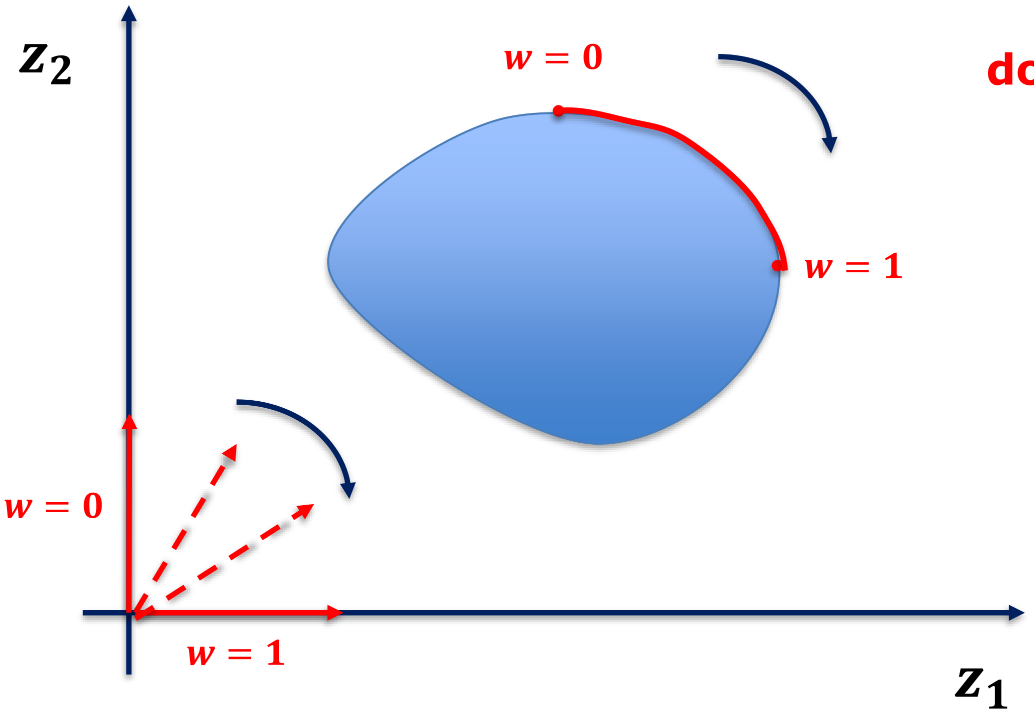
$w = 0.7$

$w = 1$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1 - w)z_2(x)$$
$$0 \leq w \leq 1$$
$$x \in X$$

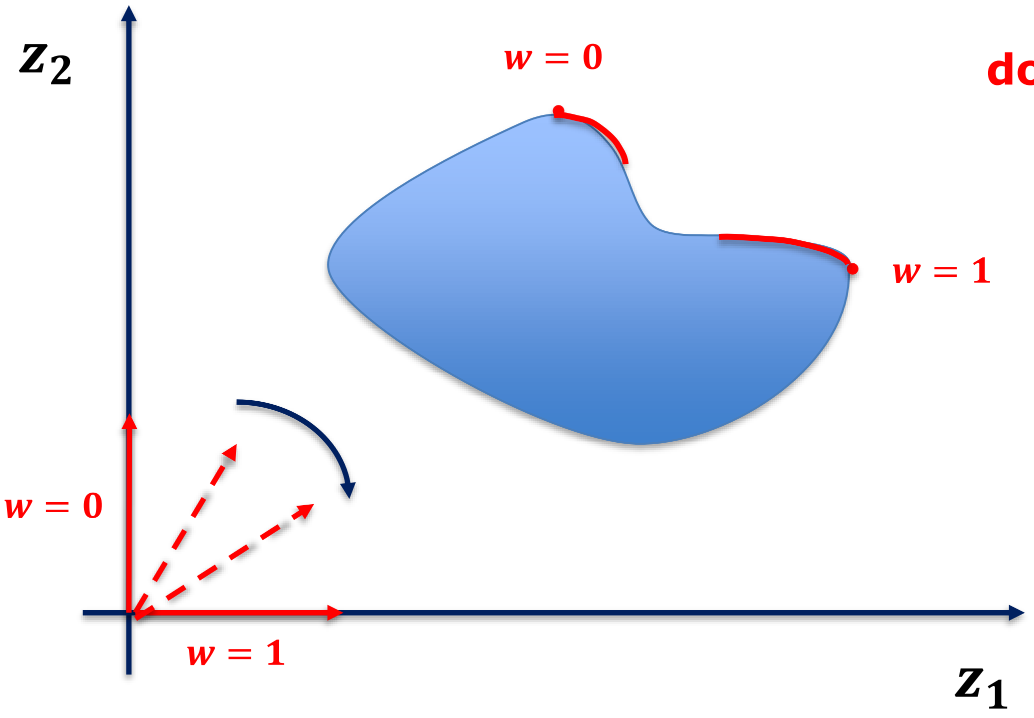


Per generare tutte le soluzioni di si dovrebbe risolvere il problema per ogni valore di w

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei pesi

$$z(x) = wz_1(x) + (1 - w)z_2(x)$$
$$0 \leq w \leq 1$$
$$x \in X$$



Per generare tutte le soluzioni di si dovrebbe risolvere il problema per ogni valore di w

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei vincoli (ε-constraints)

$$\bar{z}(x) = (z_1(x), .., z_i(x), .. z_p(x)) \qquad Max!$$

$$x \in X$$

Si assume uno degli obiettivi come funzione obiettivo e si trasformano gli altri in vincoli

$$z(x) = z_i(x) \qquad Max!$$

$$z_j(x) \geq \varepsilon_j \qquad \nabla j = 1..p \quad j \neq i$$

$$x \in X$$

Metodo dei vincoli (ε-constraints)

Si consideri il caso di problema **biobiettivo** $\bar{z}(x) = (z_1(x), z_2(x)) \quad Max\,!$

$$x \,\epsilon\, X$$

Il problema monoobiettivo associato si può scrivere nella forma

$$z(x) = z_2(x) \qquad Max\,!$$

$$z_1(x) \geq \varepsilon_k$$

$$x \,\epsilon\, X$$

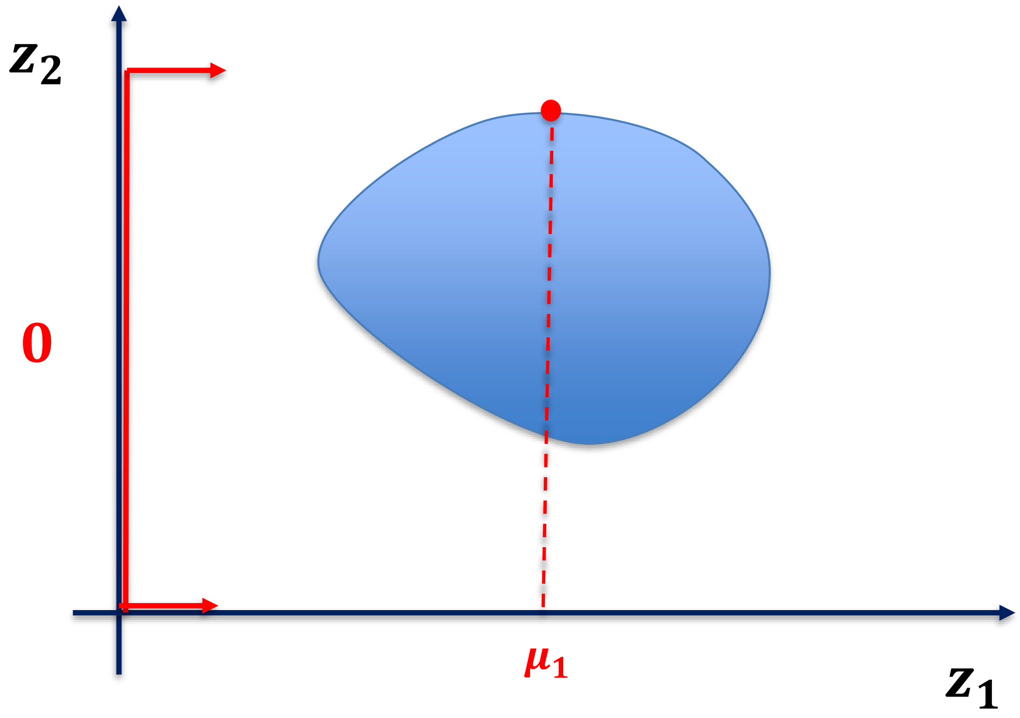
$k = 0, 1, 2...$ Si aggiorna durante la procedura

Metodo dei vincoli (ε-constraints)

$$z(x) = z_2(x) \qquad Max\,!$$

$$z_1(x) \geq \varepsilon_k$$

$$x \in X$$



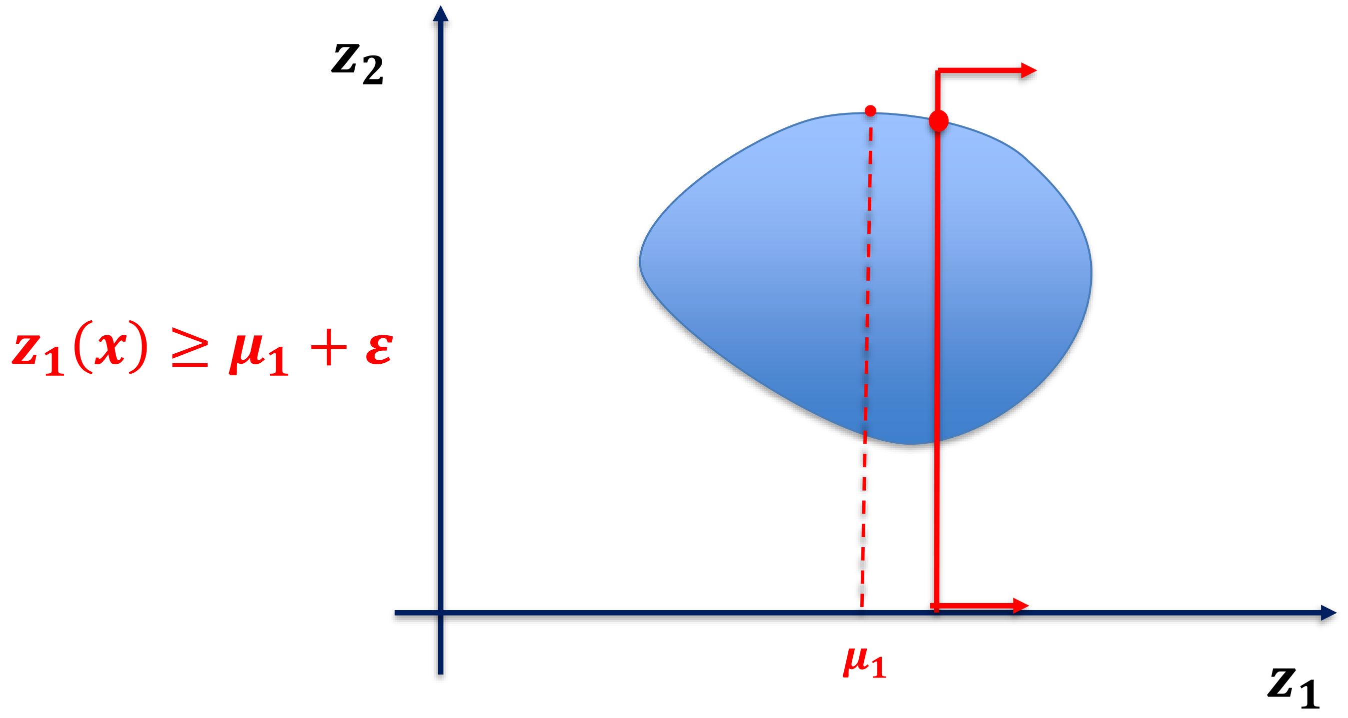
Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei vincoli (ε-constraints)

$$z(x) = z_2(x) \qquad Max\,!$$

$$z_1(x) \geq \varepsilon_k$$

$$x \in X$$



$$\varepsilon_0 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \mu_1 + \varepsilon$$

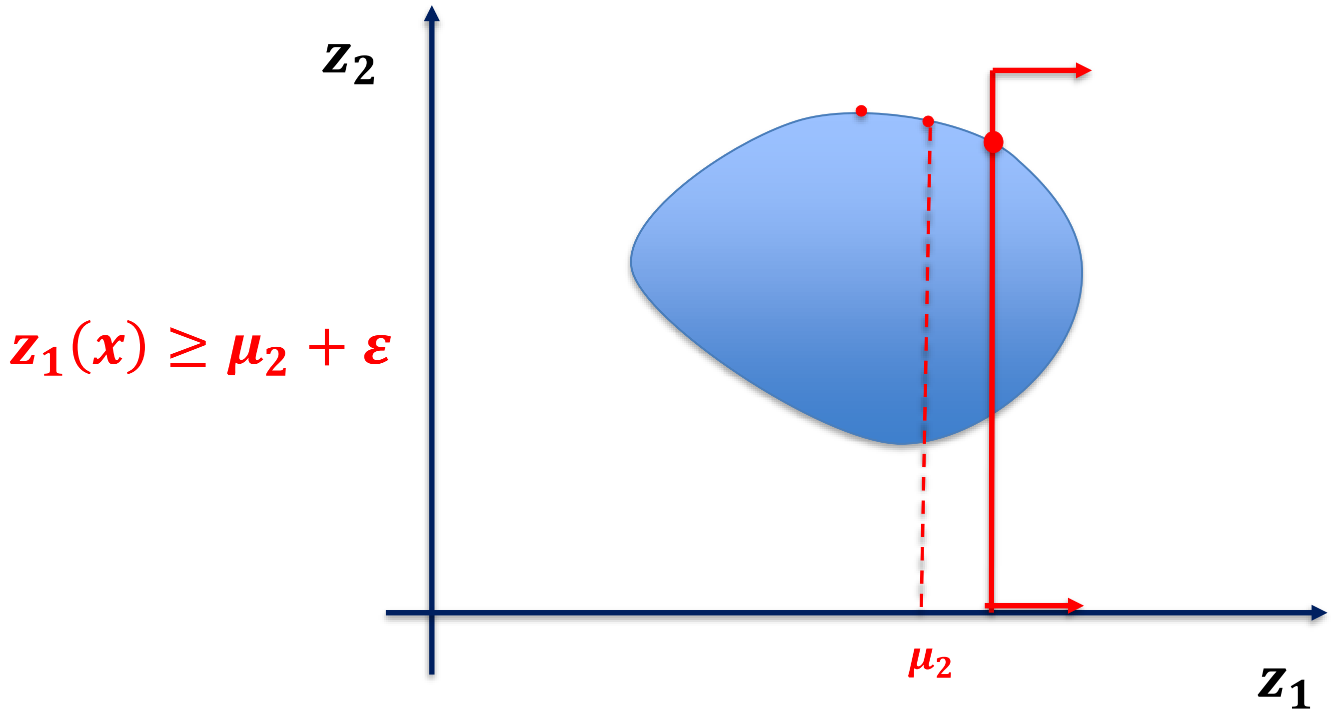
Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

Metodo dei vincoli (ε-constraints)

$$z(x) = z_2(x) \qquad Max\,!$$

$$z_1(x) \geq \varepsilon_k$$

$$x \in X$$



$$\varepsilon_0 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \mu_1 + \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = \mu_2 + \varepsilon$$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est

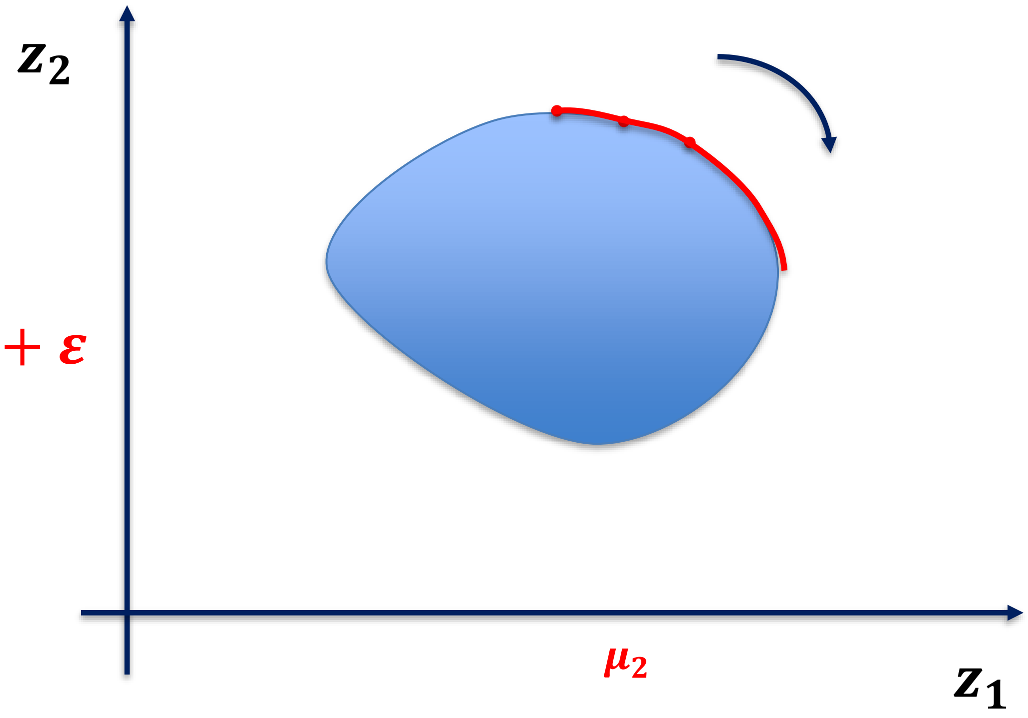
Metodo dei vincoli (ε-constraints)

$$z(x) = z_2(x) \qquad \textit{Max}\,!$$

$$z_1(x) \geq \varepsilon_k$$

$$x \in X$$

$$z_1(x) \geq \mu_k + \varepsilon$$



$$\varepsilon_0 = 0$$
$$\varepsilon_1 = \mu_1 + \varepsilon$$
$$\varepsilon_2 = \mu_2 + \varepsilon$$
$$\varepsilon_k = \mu_k + \varepsilon$$

Le soluzioni di Pareto si trovano sulla frontiera Nord-Est