

Riduzione per righe

RIDOTTA PER RIGHE $\longleftrightarrow$ OGNI RIGA HA UN PIVOT

- Qualunque matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere trasformata in una matrice ridotta per righe utilizzando l'operazione elementare

$$(III) \quad R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j \quad \text{un numero opportuno di volte.}$$

- Per ottenere una matrice ridotta, si parte dalla prima riga non nulla di A , sia essa la j -esima, e si sceglie un qualunque elemento a_{jk} diverso da zero. Quindi si usa (III) sulle righe successive, e si somma ad esse un multiplo opportuno di R_j , scelto in modo tale da ottenere tutti zeri sotto a_{jk} . In formule:

$$\forall i > j, \quad R_i \rightarrow R_i - \frac{a_{ik}}{a_{jk}} R_j$$

L'elemento a_{jk} sarà un **pivot** per la matrice ottenuta in questo modo.

- Si ripete il procedimento per tutte le righe non nulle, fino a che in ogni riga non nulla non ci sia un pivot.

Slide 1/18

Esercizio

Ridurre per righe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 4 & -8 & 7 \\ 4 & -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

$$A \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - (-1)R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - \frac{-3}{1}R_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - \frac{8}{3}R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A'$$

$\Rightarrow A'$ è RIDOTTA PER RIGHE.



Slide 2/18

Risolvere un sistema per riduzione

Un sistema $AX = B$ di matrice completa $(A|B)$ può essere risolto come segue:

- Usando le tre operazioni elementari si trasforma $(A|B)$ in una nuova matrice $(A'|B')$ tale che A' è ridotta per righe.
- Il sistema ridotto $A'X = B'$ è equivalente a quello di partenza e si può risolvere per sostituzione.

Osservazione

Attenzione: è la matrice A' che deve essere ridotta per righe, non $(A'|B')$.

Se $(A'|B')$ è ridotta per righe, A' non è necessariamente ridotta per righe. Esempio:

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nell'esempio $(A'|B')$ è ridotta per righe, ma A' non lo è (nessun pivot nella 1a riga).

Slide 3/18

Esercizio

Ridurre il sistema di matrice completa:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 4 & -8 & 7 \\ 4 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5 \end{array} \right\} \leq$$

Soluzione.

$$(A|B) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right) = (A'|B')$$

⇒ SISTEMA INCOMPATIBILE PERCHÉ LA TERZA RIGA
SAREBBE $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$.

✓

- la matrice è la stessa dell'esercizio precedente, ma stavolta ci siamo fermati al primo passo perché interessati a ridurre solo la matrice dei coefficienti, e non la quella completa;
- notiamo che A' è ridotta, ma $(A'|B')$ non lo è.

Slide 4/18

Esercizio

Risolvere il sistema

CON GAUß

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Soluzione.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \text{PIVOT } 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \text{PIVOT } 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \text{PIVOT } 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \text{PIVOT } -1 & -2 \end{array} \right) = (A'|B')$$

TORNANDO AL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \\ -x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + x_3 = -1 + 2 = 1 \\ x_2 = 5 - 4x_3 = 5 - 8 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Slide 5/18

Esercizio (esame effettivo)

Discutere il sistema di equazioni lineari dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ \lambda x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \quad (\lambda \text{ come coefficiente})$$

Soluzione.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda & -2 & -3 & -4 \\ 1 & -2\lambda & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - \lambda R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \text{PIVOT } 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2(\lambda+1) & -3(\lambda+1) & -4(\lambda+1) \\ 0 & -2(\lambda+1) & 0 & 0 \end{array} \right)$$

OSSERVAZ.: NELLA SECONDA RIGA $-3(\lambda+1)$ SAREBBE UN PIVOT
SE $\lambda \neq -1$; IN MODO ANALOGO $-2(\lambda+1)$ NELLA 3^a.

 $\Rightarrow$ BISOGNA DISTINGUERE DUE CASI:

1) $\lambda \neq -1$, DIVIDENDO LA SECONDA RIGA PER $-(\lambda+1)$ E LA TERZA PER $-2(\lambda+1)$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2(\lambda+1)} R_2 \\ R_3 \rightarrow -\frac{1}{2(\lambda+1)} R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} \text{PIVOT } 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) =: (A'|B') \quad \text{TORNANDO AL SISTEMA:}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda = -1$: $\sim \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ TORNANDO AL SISTEMA
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$
 SCELGO $x_2 = s, x_3 = t, s, t \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow x_1 = 4 - 2s - 3t$ "inf" SOLUZIONI

Slide 6/18

Esercizio (esame effettivo)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad \text{"PIANO IN } \mathbb{R}^3"$$

Si consideri il sistema di equazioni lineari dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \text{ TERMINE LIBERO})$$

- Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.
- Nei casi in cui il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.

Soluzione.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \lambda \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{array} \right) = (A'|B')$$

a) IL SISTEMA È COMPATIBILE SE E SOLO SE $\lambda = -1$.

b) SE $\lambda = -1$, SI HA

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{TORNANDO AL SISTEMA:} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

SCEGLIO COME PARAM. LIBERO LA INCOGNITA CHE UGO MOI. ALCON PIVOT, QUINDI $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_2 = -1 - t, x_1 = 1$

SOLUZ. GEN. $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1-t, t) = (1, -1, 0) + t(0, -1, 1)$

Slide 7/18

Matrici fortemente ridotte e metodo di Gauß-Jordan

Una matrice si dice **fortemente ridotta** per righe se

- è ridotta per righe; (OGNI RIGA HA IL SUO PIVOT)
- tutti i pivot sono uguali ad 1;
- sopra a ciascun pivot non sono presenti elementi diversi da zero.

(Nota: le colonne contenenti i pivot hanno tutti gli elementi nulli tranne uno, il pivot!)

Esempio

La prima matrice è ridotta ma non fortemente ridotta, la seconda è fortemente ridotta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Metodo di Gauß-Jordan. Usando le tre operazioni elementari, ogni matrice può essere trasformata in una fortemente ridotta: prima si riduce la matrice; poi si usa l'operazione (II) avere tutti pivot uguali ad 1; infine si usa l'operazione (III) per annullare tutti gli elementi sopra i pivot.

Slide 8/18

Esempio

Applichiamo il metodo di Gauß-Jordan alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

1) RIDUZIONE

$$A \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2) PIVOT UGUAGLIATO AD 1:

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Slide 9/18

3) GAUß-JORDAN (DAL BASSO VERSO L'ALTO!)

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

✓

Esercizio

Usando il metodo di Gauß-Jordan risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Soluzione.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{GAUß-JORDAN}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

STESSA MATRICE
DI SOPRA

FORMANDO IL SISTEMA

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_1 &= -5 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{SOLUZ. } (x_1, x_2, x_3) = (-5, 3, 2)$$



Slide 11/18

Invertire una matrice con il metodo di Gauß-Jordan

DEF.: L'INVERSA DI UNA MATRICE: $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}_n$

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice invertibile. Determinare l'inversa di A equivale a determinare una matrice $X = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soluzione dell'equazione

$$AX = \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A|\mathbb{1}_n)$$

$(n^2 \text{ equazioni in } n^2 \text{ incognite})$

Se A è invertibile, la soluzione si può determinare con il metodo di Gauß-Jordan.

(NOTARE CHE X E I TERMINI NOTI NON SONO PIÙ VETTORI COLONNA MA MATRICI QUADRATE DI ORDINE n .)

Possiamo trasformare la matrice completa del sistema $(A|\mathbb{1}_n)$ in una matrice della forma $(\mathbb{1}_n|B)$. Il nuovo sistema, equivalente a quello di partenza, sarà:

$$(A|\mathbb{1}_n) \leftrightarrow AX = \mathbb{1}_n \quad (\mathbb{1}_n|B) \xrightarrow{X} \mathbb{1}_n X = B \quad (\mathbb{1}_n|B) \rightsquigarrow \mathbb{1}_n X = B$$

X

cioè $X = B$ è proprio la matrice cercata (l'inversa di A).

$$AX = B \leftrightarrow (A|B)$$

Slide 12/18

Esercizio

Usando il metodo di Gauß-Jordan invertire la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Primo passo: Gauß. (su A)

AFFIANCO LA MATRICE IDENTICA CONSIDERANDO COME TERMINI NOTI

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{2}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \Leftarrow (A'|B')$$

NOTA: A' È TRIANG. SUP. COMPLETA, QUINDI

$$\det(A) = \det(A') = 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ È INVERTIBILE}$$

Slide 13/18

Secondo passo: Jordan.

MOLTIPLICHIAMO CIASCUNA RIGA DI $(A'|B')$ PER UNO SCALARE, IN MODO DA AVERE TUTTI I PIVOT UGUALI AD 1:

$$(A'|B') \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_3]{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right) \Leftarrow (A''|B'')$$

USANDO L'OPERAZ. III (DAL BASSO VERSO L'ALTO!), FACCIAMO COMPARIRE DEGLI ZERI SOPRA A CIASCUN PIVOT:

$$(A''|B'') \xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3]{R_2 \rightarrow R_2 - \frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$\uparrow_3$ $\Rightarrow A^{-1}$

LA MATRICE INVERSA DI A È QUINDI

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO: 1) VERIFICARE $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$
 2) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T$ DÀ LA STESSA MATRICE.

Slide 14/18

Esercizio (esame effettivo)

Si consideri il sistema di equazioni lineari dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

- Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.
- Nei casi in cui il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.

Soluzione.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & 2 & 3 \\ 5 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & 1 \end{array} \right)$$

Slide 15/18

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 3 \end{array} \right) =: (A'|B')$$

oss.:

1) SE $\lambda = 0$, LA TERZA EQ. NON HA PIÙ UN PIVOT E NON AMMETTE SOLUZIONI. PERCHÉ AVREI $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$
 $\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBILE

2) SE $\lambda = 3$, MI SPARISCE IL PIVOT NELLA SECONDA RIGA. QUINDI (PER IL MOMENTO) SIA $\lambda \notin \{0, 3\}$. ALLORA A' È RIDOTTA PER RIGHE (CON TRE PIVOT) E IL SISTEMA È COMPATIBILE (CON SOLUZIONI UNICHE);

RISOLVENDO PER SOSTITUZIONE:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + (\lambda-3)x_3 = 0 \\ \lambda x_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \textcircled{3} \quad x_2 = \frac{3}{\lambda} \\ \textcircled{2} \quad x_3 = \frac{1}{\lambda} \\ \textcircled{1} \quad x_1 = -\frac{1}{\lambda} \end{array} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\lambda}, x_2 = \frac{3}{\lambda}, x_3 = \frac{1}{\lambda}$$

SOLUZIONI UNICHE: $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$ ✓

Slide 16/18

RIMANE DA STUDIARE IL CASO $\lambda = 3$:
LA MATRICE COMPLETA DIVENTA

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

NELLA SECONDA RIGA È SPADATO
IL PIVOT

$\Rightarrow$ DOBBIAMO RIDURLA ANCORA

$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

PIVOTS

OSS.: 3 EQ.
2 PIVOT

$\Rightarrow 3 - 2 = 1$ PARAM.
LIBERI

TORNANDO AL SISTEMA:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

SCEGLIO $x_3 = t$ PERCHÉ NON
MOLTIPLICA ALCUN PIVOT.

$\Rightarrow$ SOL. GENERALE $(x_1, x_2, x_3) = (-t, 1, t)$
 $= (0, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$
"00" SOLUZ. $\forall t \in \mathbb{R}$

Slide 17/18

CASO IN CUI UNA COLONNA NELLA MATRICE DEI COEFF.
CONTIENE SOLO ZERI:

ESEMPIO: TROVARE LA SOLUZ. GENERALE $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
DEL SISTEMA

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

TORNANDO AL SISTEMA

$$x_2 + x_3 = 1$$

$$-5x_3 = -2$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}$$

$$x_1 = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

x_1 È LIBERA
PERCHÉ NON MOLTIPLICA
ALCUN PIVOT

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(t, \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Slide 18/18