Moto Browniano

$$S_0 = 0 \qquad q.c.$$

$$S_{t_i} - S_{t_i - 1} \qquad indipendenti$$

$$S_t - S_s \quad \approx N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$$

$$S_t \qquad tr.continue \quad q.c.$$

Data la definizione, è immediato pensare al m.b. come estensione nell'ambito stocastico di un modello di crescita lineare

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma Z_t$$

$$dS = \mu Dt + \sigma dZ_t$$

Moto Browniano e M.B. Geometrico

- Moto Browniano: estensione in ambito stocastico del modello di crescita lineare

$$Y(t) - Y(0) \approx N\left(\mu t, \sigma^2 t\right) \rightarrow$$
$$Y(t) = Y(0) + \mu t + \sigma Z(t)$$

- Moto Browniano Geometrico: estensione in ambito stocastico del modello di crescita esponenziale

$$Y(t) = Y(0) e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

Moto Browniano geometrico

- Osservazione: può essere ottenuto come limite nel tempo continuo di un processo binomiale moltiplicativo

Moto Browniano Geometrico

- μ intensità istantanea costante (indipendente dal tempo)- nel caso di applicazioni finanziarie è il tasso di rendimento dell'asset, a cui, nell'ambito stocastico, va aggiunta una perturbazione aleatoria

$$Y(t) = Y(0)e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mu Y(t)$$

$$\mu = \frac{dY(t)}{Y(t)dt} = \frac{d \ln Y(t)}{dt}$$

Moto Browniano e M.B. Geometrico

- Osservazione: l'ipotesi di moto browniano sul prezzo di un'attività Y(t) equivale ad un'ipotesi di moto browniano geometrico sui rendimenti logaritmici

$$R(t) = \ln \frac{Y(t)}{Y(0)}$$

$$\frac{Y(t)}{Y(0)} = e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

Moto Browniano Geometrico

- Per il m.b.g. non vale la proprietà di indipendenza degli incrementi; la proprietà vale però per i rapporti

$$\frac{Y(t_2)}{Y(t_1)},\frac{Y(t_3)}{Y(t_2)},\dots,\frac{Y(t_n)}{Y(t_{n-1})}$$

sono v.a. indipendenti

(la denominazione di m.b. geometrico è dovuta al fatto che una progressione geometrica è caratterizzata da una crescita per rapporti costanti, mentre la progressione aritmetica è una successione caratterizzata da una crescita per incrementi costanti)

Moto browniano geometrico e distribuzione lognormale

- Moto browniano geometrico:

$$Y(t) = Y(0)e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

- $Y = e^X$

$se \qquad X \approx N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Y \approx \log N(\mu, \sigma^2)$

$E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \qquad Var(Y) = [E(Y)]^2 (e^{\sigma^2} - 1)$

Moto browniano geometrico e distribuzione lognormale

- Moto browniano geometrico:

$$Y(t) = Y(0)e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

è descritto dall'equazione differenziale stocastica

$$dY = (\mu + \sigma^2 / 2)Ydt + \sigma Y dZ$$

Moto browniano geometrico

- Il moto browniano è caratterizzato da distribuzione di transizione normale, mentre il m.b. geometrico da distribuzione lognormale
- Osservazione: Lo spazio degli stati di un moto Browniano è R: la probabilità che Y(t) assuma un valore negativo è positiva → modello poco adatto ad un processo dei prezzi
- La distribuzione lognormale attribuisce probabilità positiva ai soli valori positivi di Y(t) → modello adatto al processo dei prezzi