

Spazi vettoriali

Definizione

Un insieme non vuoto V è detto **spazio vettoriale** (reale) se in V sono definite una operazione **interna** di “somma”:

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (\underline{v}, \underline{v}') \mapsto \underline{v} + \underline{v}',$$

ed una operazione **esterna** di “prodotto per uno scalare”:

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (k, \underline{v}) \mapsto k \cdot \underline{v},$$

soddisfacenti le seguenti proprietà:

- | | |
|---|--|
| <p>a) $(V, +, \underline{0}_V)$ è un gruppo commutativo,
ovvero $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ si ha:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$ 2. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ 3. $\underline{v} + \underline{0}_V = \underline{v}$ 4. $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}_V$ | <p>b) $\forall k, k' \in \mathbb{R}$ e $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ si ha</p> <ol style="list-style-type: none"> 5. $(k + k')\underline{v} = k\underline{v} + k'\underline{v}$ 6. $k(\underline{v} + \underline{w}) = k\underline{v} + k\underline{w}$ 7. $k(k'\underline{v}) = (kk')\underline{v}$ 8. $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$ |
|---|--|

Slide 1/20

Dato uno spazio vettoriale V :

- Chiamiamo **vettori** gli elementi di V .
- L'elemento neutro rispetto alla somma è indicato con $\underline{0}_V$, o semplicemente con $\underline{0}$ quando questo non generi confusione, ed è detto **vettore nullo**.
- L'**opposto** di un vettore $\underline{v}$ (l'inverso rispetto all'operazione di somma) sarà indicato con $-\underline{v}$. Scriveremo

$$\underline{v} - \underline{v}' = \underline{v} + (-\underline{v}')$$

per indicare la somma di un vettore $\underline{v}$ con l'opposto di un secondo vettore $\underline{v}'$.

- La definizione di spazio vettoriale si può dare sostituendo ad $\mathbb{R}$ un qualsiasi campo K . Per semplicità ci limitiamo al caso $K = \mathbb{R}$.

Esempi:

- le n -uple reali formano uno spazio vettoriale (reale), indicato con $\mathbb{R}^n$;
- le matrici reali $m \times n$ formano uno spazio vettoriale (reale), indicato con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$;
- i polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{R}$ formano uno spazio vettoriale, indicato con $\mathbb{R}[x]$.

Slide 2/20

Legge di semplificazione della somma

Sia V uno spazio vettoriale arbitrario.

Proposizione

Per ogni $\underline{v}, \underline{v}', \underline{v}'' \in V$ si ha

$$(i) \quad \underline{v} + \underline{v}' = \underline{v} + \underline{v}'' \iff (ii) \quad \underline{v}' = \underline{v}''.$$

Dimostrazione. L'implicazione $(i) \Leftarrow (ii)$ è ovvia. Dimostriamo che $(i) \Rightarrow (ii)$.

PER DEF. DI SPAZIO VETTORIALE (S.V.) OGNI $\underline{v} \in V$ POSSIEME UN OPPOSTO $-\underline{v}$.

DA (i) $\underline{v} + \underline{v}' = \underline{v} + \underline{v}''$ SEGUE CHE

$$-\underline{v} + (\underline{v} + \underline{v}') = -\underline{v} + (\underline{v} + \underline{v}'')$$

$$\Leftrightarrow (-\underline{v} + \underline{v}) + \underline{v}' = (-\underline{v} + \underline{v}) + \underline{v}''$$

2.

$$\Leftrightarrow \underline{0}_V + \underline{v}' = \underline{0}_V + \underline{v}''$$

4.

$$\underline{v}' = \underline{v}''$$

3.

Slide 3/20

Legge di annullamento del prodotto

Proposizione

$$k\underline{v} = \underline{0} \iff k = 0 \vee \underline{v} = \underline{0}.$$

$$\begin{array}{l} \underline{v} \in V \\ k \in \mathbb{R} \end{array}$$

Dimostrazione. In tre parti:

① $k=0$, DA DIM. $\underline{0} \cdot \underline{v} = \underline{0}$

DALLA PROPR. DISTR. S. SEGUE CHE $\underline{0}\underline{v} = (0+0)\underline{v} = \underline{0}\underline{v} + \underline{0}\underline{v}$ 5.

AGGIUNGENDO IL VETTORE NULLO $\underline{0}_V$ AL PRIMO

MEMBRO OTTENGO $\underline{0}\underline{v} + \underline{0}_V = \underline{0}\underline{v} = \underline{0}\underline{v} + \underline{0}\underline{v}$

$\Rightarrow$ DALLA PROPR. PRECEDENTE: $\underline{0}_V = \underline{0}\underline{v}$ ✓

② $\underline{v} = \underline{0}$, DA DIM. $k\underline{0} = \underline{0} \quad \forall k \in \mathbb{R}$

SIMILE AL PUNTO ①, SI FA USO DELL'IDENTITÀ

$$k\underline{0} = k(\underline{0} + \underline{0}) = k\underline{0} + k\underline{0}$$

③ " $\Rightarrow$ " AL POSTO DI " $A \Rightarrow B \quad \forall C$ " POSSIAMO DIMOSTRARE CHE

" $\neg B \wedge \neg C \Rightarrow \neg A$ ". QUINDI $\{k \neq 0\} \wedge \{v \neq \underline{0}\} \Rightarrow k\underline{v} \neq \underline{0}$

OSSIA $\forall k \neq 0, k\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}_V$

Slide 4/20

Legge dell'opposto

PER OGNI $k \neq 0$ SI HA
 $v = 1 \cdot v = (k^{-1}k)v \stackrel{7}{=} k^{-1}(k \cdot v)$, NE DEDUC.
 CHE SE $kv = 0$, ALLORA
 $v = k^{-1}(kv) = k^{-1}(0_v) \stackrel{8}{=} 0 \Rightarrow v = 0$ ✓

Proposizione

Per ogni $v \in V$, si ha $(-1)v = -v$.

Dimostrazione.

SIA $w := (-1)v$. PER L'UNICITÀ DELL'OPPOSTO BASTA
 DIM. CHE $v + w = 0$
 DALLI ASSIOMI 5 E 8 DELLA DEF. DI UNO S.V. E
 DALLA LEGGE DI ANNULAM. DEL PRODOTTO SEGUE LA TESI.

$$v + w \stackrel{8}{=} 1 \cdot v + (-1)v \stackrel{5}{=} (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

↑
LEGGE DELL'ANNULAM.
DEL PRODOTTO

$$\Rightarrow w = -v$$

$$\Rightarrow (-1)v = -v$$

Slide 5/20

Sottospazi vettoriali

Definizione/Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- W è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto di V .
IN PARTICOLARE, DEVE CONTENERE IL VET. NULLO 0_V
- $\forall k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \underline{w}, \underline{w}' \in W$ si ha
 - $\underline{w} + \underline{w}' \in W$, CHIUSO
(W è stabile rispetto alla somma)
 - $k\underline{w} \in W$. CHIUSO
(W è stabile rispetto alla moltiplicazione per uno scalare)
- $\forall k, k' \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \underline{w}, \underline{w}' \in W$ si ha $k\underline{w} + k'\underline{w}' \in W$.

Se una qualsiasi di queste tre condizioni è soddisfatta, diremo che W è un **sottospazio vettoriale (s.s.v.)** di V (o, semplicemente, un **sottospazio**).

Le condizioni b) e c) forniscono due criteri pratici per stabilire se un sottoinsieme $W \subseteq V$ di un determinato spazio vettoriale V è un sottospazio.

Slide 6/20

Dimostrazione (in tre parti).

(SALTATA PER IL MOMENTO)

Slide 7/20

Osservazione

Uno spazio vettoriale V possiede sempre almeno due sottospazi: il primo è V stesso ($V \subseteq V$), il secondo è dato dal sottoinsieme $\{\underline{0}_V\}$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\{\underline{0}_V\}$ È UN SOTTOSPAZIO.

Proposizione

Sia $S_\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare Σ di matrice completa $(A|B) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$. S_Σ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n \iff$ il sistema è omogeneo.

Dimostrazione. " $\Rightarrow$ ". SE S_Σ È UN S.S.V., DEVE CONTENERE IL VETTORE NULLO $\underline{0}_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$. SE $\underline{0}_{\mathbb{R}^n}$ È SOLUZ. DEL SISTEMA $AX = B$, ALLORA $B = A \underline{0}_{\mathbb{R}^n} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow$ IL SISTEMA È OMOG.

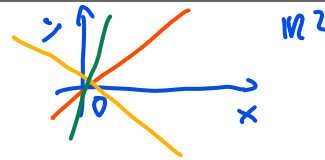
" $\Leftarrow$ ". SIA $B = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$ E $X, X' \in \mathbb{R}^n$ DUE SOLUZ. DI Σ OUVERO $AX = AX' = \underline{0}$. DALLE PROPRIETÀ DEL CALCOLO DELLE MATRICI:

$$A(kX + k'X') = k(AX) + k'(AX') = k \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^m} + k' \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^m} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m} \quad \forall k, k' \in \mathbb{R}$$

QUINDI $kX + k'X' \in S_\Sigma$ È SEMPRE UNA SOLUZ. DEL SISTEMA Σ , E QUINDI S_Σ È S.S.V. PER IL CRITERIO $(\Leftarrow)$

Slide 8/20

Sottospazi di $\mathbb{R}^2$



È un utile esercizio studiare i sottospazi di $\mathbb{R}^2$, che possono essere visualizzati graficamente usando un sistema di riferimento cartesiano.

Sia allora $V = \mathbb{R}^2$. Il sottospazio banale $\{0_V\}$ è un insieme con un solo punto: l'origine del sistema di riferimento.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soluzione dell'equazione omogenea:

$$ax + by = 0$$

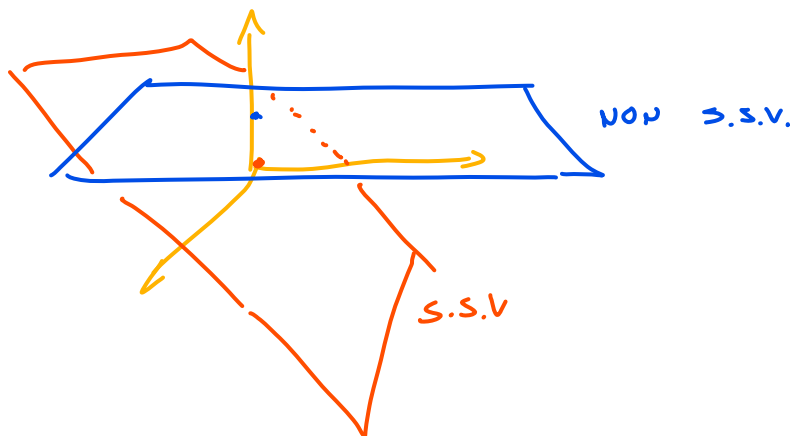
$$y = -\frac{a}{b}x$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ (proposizione sopra). Se $(a, b) \neq (0, 0)$, l'equazione descrive una retta passante per l'origine degli assi.

Vedremo più avanti che sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$ solamente $\mathbb{R}^2$ stesso (l'intero piano), $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (l'origine), e le **rette passanti per l'origine** del sistema di riferimento.

Sottospazi dello spazio tridimensionale sono quelli banali (l'origine e tutto lo spazio), e **rette e piani contenenti l'origine** degli assi.

Slide 9/20



Slide 10/20

Esercizi

Esercizio

Dire quali dei seguenti insiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

- ① $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ SÌ, RETTA CHE PASSA PER L'ORIGINE (SOLUZ. DI UN SISTEMA OMOG)
- ② $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4\}$ NO, SISTEMA DISOMOGENEO
- ③ $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$ NO: AD ESEMPIO, PER $v = (1, 1) \in W_3$
 $w = (2, 4) \in W_3$
 $v + w = (1+2, 1+4) = (3, 5) \notin W_3$
- ④ $W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ SÌ
- ⑤ $W_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ NO, PER CUI b2) NON È VERIFICATO
AD ESEMPIO $v = (1, 1) \in W_5$
E $k = \pi \in \mathbb{R}$
 $kv = \pi(1, 1) = (\pi, \pi) \notin W_5$

Esercizio

Verificare che l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado non superiore ad n è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$.

Soluzione. La somma di due polinomi di grado $\leq n$ è ancora un polinomio di grado $\leq n$, il prodotto di un polinomio di grado $\leq n$ per uno scalare è ancora un polinomio di grado $\leq n$.

$\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ è stabile rispetto alle due operazioni, quindi è un sottospazio. ✓

Slide 11/20

Esercizio (esame effettivo)

Dire quali dei seguenti insiemi sono sottospazi in $V = \mathbb{R}_3[x]$:

- ① $U_1 = \{p \in V \mid p \text{ non ha radici negative}\},$
- ② $U_2 = \{p \in V \mid p(x-1) + p(x+1) = 2p(x)\}.$

① U_1 NON È UN S.S.V. PERCHÉ NON STABILE RISP ALLA SOMMA;
AD ESEMPIO, $p(x) = 5$, $q(x) = x-1$, ENTRAMBI IN U_1

$$MA \quad (p+q)(x) = p(x) + q(x) = 5 + x - 1 = x + 4 \notin U_1$$

PERCHÉ RADICE DI $x + 4$ È NEGATIVA.

$\Rightarrow$ b1) NON È VERIFICATO.

② U_2 È S.S.V., È STABILE ALLA SOMMA E AL PRODOTTO
PER UNO SCALARE
PRESEI $p, q \in U_2$

$$(p+q)(x-1) + (p+q)(x+1) = p(x-1) + q(x-1) + p(x+1) + q(x+1)$$

$$= 2p(x) + 2q(x) = 2(p+q)(x) \Rightarrow p+q \in U_2$$

PER $U_2, q \in U_2$

Osservazione: se uno spazio V ha almeno un elemento $\underline{v}$ diverso da $\underline{0}$, allora ha un numero infinito di elementi (poiché $k\underline{v} \in V \forall k \in \mathbb{R}$).

Slide 12/20

Esercizio

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali:

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a_{21} = 0 \right\}$$

$$W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a_{21} = 5 \right\}$$

$$W_3 := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\} \quad \text{"MATRICI ANTISIMM."}$$

comm.: il vettore nullo in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è dato da $\underline{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

W_1 è un S.S.V.

① $\underline{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in W_1$ ② le matrici in W_1 sono tutte della forma
 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$
 $A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & c+c' \end{pmatrix} \in W_1$
 in modo analogo: $kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ 0 & kc \end{pmatrix} \in W_1$ ✓

Slide 13/20

W_2 non è S.S.V. perché $\underline{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \notin W_2$ ✓

$$W_3: \text{ se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

CONDIZIONE $A^T = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow a=0, d=0, b=-c$$

QUINDI W_3 è composto da matrici della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \forall b \in \mathbb{R}, \text{ ora, per } B = \begin{pmatrix} 0 & -b' \\ b' & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -(b+b') \\ b+b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in W_3 \quad \text{con } c = b+b'$$

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & -kb \\ kb & 0 \end{pmatrix} \in W_3$$

Le matrici $m \times n$ triangolari superiori formano un sottospazio di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$?

E quelle triangolari superiori complete?

NO, IL VETTORE NULO NON È CONTENUTO.

si (✓)

Operazioni su sottospazi

Definizione

Siano U_1 e U_2 sottospazi di V .

- $U_1 \cap U_2 := \{v \in V \mid v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$ è detto l'**intersezione** di U_1 e U_2 .
- $U_1 + U_2 := \{v = u_1 + u_2 \in V \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ è detto **somma** di U_1 e U_2 .
- Se $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, la somma $U_1 + U_2$ si chiama **diretta** e si indica con $U_1 \oplus U_2$.

Proposizione

Sia l'intersezione $U_1 \cap U_2$ sia la somma $U_1 + U_2$ di due sottospazi $U_1, U_2 \subseteq V$ costituiscono sottospazi vettoriali di V .

Dimostrazione.

1) $U_1 \cap U_2 \cong$ S.S.V.:

$$v, v' \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \begin{cases} v \in U_1 \wedge v \in U_2 \\ v' \in U_1 \wedge v' \in U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v, v' \in U_1 \\ v, v' \in U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v+v' \in U_1 \\ v+v' \in U_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v+v' \in U_1 \wedge v+v' \in U_2 \Rightarrow v+v' \in U_1 \cap U_2$$

SIMILM. PER IL PRODOTTO PER UNO SCALARE. (ESERCIZIO)

IPOTESI:
 U_1, U_2 S.S.V.

Slide 15/20

2) $U_1 + U_2 \cong$ S.S.V.

$$v, v' \in U_1 + U_2 \Rightarrow \begin{cases} v = u_1 + u_2 & \text{CON } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \\ v' = u'_1 + u'_2 & \text{CON } u'_1 \in U_1, u'_2 \in U_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v+v' = (u_1 + u_2) + (u'_1 + u'_2) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{ASSOC.} \\ \text{COMM.} \\ \text{IN } V}}{=} (u_1 + u'_1) + (u_2 + u'_2) \in U_1 + U_2$$

$\in U_1$ $\in U_2$
 IPOTESI:
 U_1, U_2 S.S.V.

SIMILM. PER IL PRODOTTO PER UNO SCALARE (ESERCIZIO).

Slide 16/20

Decomposizione unica in una somma diretta

Proposizione

Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali in V tali che $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Ogni $v \in U_1 \oplus U_2$ si può scrivere in maniera unica come $v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$.

Dimostrazione.

Esempio

Siano $V = \mathbb{R}^2$ nonché

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

U_1 e U_2 sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (asse orizzontale ed asse verticale). L'intersezione $U_1 \cap U_2 = \{(0, 0)\}$ è l'origine degli assi. Dall'identità:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

segue che ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è la somma di un vettore $(x, 0) \in U_1$ ed un vettore $(0, y) \in U_2$. Quindi $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^2$.

Slide 19/20

L'unione $U_1 \cup U_2$ di due sottospazi tipicamente non è uno spazio vettoriale.

Esercizio

In $V = \mathbb{R}^2$ si considerino ancora i sottospazi vettoriali

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

Si verifichi che $U_1 \cup U_2$ **non** è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione.



Come dimostreremo più in generale più tardi, il più piccolo sottospazio di V che contiene $U_1 \cup U_2$ è la somma $U_1 + U_2$.

Slide 20/20