

Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ dei vettori di V . Diremo che un vettore $\underline{w} \in V$ è **combinazione lineare (c.l.)** dei vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ se si può scrivere come somma

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_n \underline{v}_n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Esempi

- In \mathbb{R}^2 , la coppia $(2, 5)$ è combinazione lineare dei vettori $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Infatti:

$$(2, 5) = 3(0, 1) + 2(1, 1).$$
- Lo stesso vettore $(2, 5)$ è anche combinazione lineare di $(1, 1)$ e $(1, -2)$. Infatti:

$$(2, 5) = 3(1, 1) - (1, -2).$$
- Siano $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Allora A è combinazione lineare di B e C , infatti: $A = \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C$.

Slide 1/19

Sia $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di n vettori di V . L'insieme di **tutte** le combinazioni lineari dei vettori di I verrà indicato con il simbolo $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ oppure $\mathcal{L}(I)$. Quindi:

$$\mathcal{L}(I) = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) := \left\{ \underline{w} \in V \mid \underline{w} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i, \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{L}(I)$ si chiama lo **span lineare** oppure la **copertura lineare** dell'insieme I .

Esercizio

Dire se il vettore $\underline{w} = (1, 2, 3)$ di \mathbb{R}^3 è combinazione lineare dei vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1) \quad \underline{v}_2 = (3, 2, 1)$$

(“Dire se $\underline{w} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$.” = “Dire se esistono $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\underline{w} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2$.”)

Slide 2/19

Esercizio

Dire se

- ❶ $(3, 2) \in \mathcal{L}((0, 0), (2, 2))$

❷ $(3, 2) \in \mathcal{L}((1, -1), (2, 2))$
- ❸ $(0, 0) \in \mathcal{L}((1, -1), (2, 2))$

❹ $(3, 2) \in \mathcal{L}((1, 1), (2, 2))$

Esempio/Osservazione

Ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere nella forma

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Da cui: $\mathcal{L}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$.

Ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere nella forma

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(1, -1)$$

Da cui: $\mathcal{L}((1, 1), (1, -1)) = \mathbb{R}^2$.

Slide 3/19

Esempio

In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che $\mathcal{L}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Slide 4/19

Proposizione

Sia $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} \subset V$. L'insieme $\mathcal{L}(I)$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione.



Slide 5/19

Abbiamo visto prima che l'unione di due sottospazi in generale non è un sottospazio.

Proposizione

Siano $U_1, U_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali. Allora la loro somma è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene la loro unione, ovvero

$$U_1 + U_2 = \mathcal{L}(U_1 \cup U_2).$$

Dimostrazione.

Slide 6/19

Slide 7/19

Generatori

Definizione

Il sottospazio vettoriale $\mathcal{L}(I)$ si dice *spazio generato dai vettori* $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, ovvero *spazio generato dall'insieme* I . I vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si diranno suoi **generatori**.

Esercizio

Siano $\underline{v}_1 = (1, 0, -1)$ e $\underline{v}_2 = (2, 0, 0)$. Provare che $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $I = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ l'insieme dei monomi di grado $\leq n$ in x . Allora:

$$\mathcal{L}(I) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

è l'insieme di tutti i polinomi in x di grado $\leq n$.

Slide 8/19

Spazi (non) finitamente generati

Definizione

Uno spazio vettoriale V si dice **finitamente generato** se ammette un numero finito di generatori, ossia se esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ tali che

$$\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V.$$

Esempi, appena visti: \mathbb{R}^2 e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sono finitamente generati.

Controesempio:

Teorema

Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

Slide 9/19

Insiemi liberi e legati

Osservazione: Aggiungendo ad un insieme I di vettori di V una qualsiasi loro combinazione lineare non si cambia lo spazio da essi generato:

$$\underline{v} \in \mathcal{L}(I) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(I \cup \{\underline{v}\}) = \mathcal{L}(I).$$

È naturale cercare un insieme **minimo** di generatori. A questo scopo è introdotta la nozione di dipendenza/indipendenza lineare.

Definizione

Un insieme $I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subset V$ si dice **libero**, ed i suoi vettori si dicono **linearmente indipendenti (l.i.)**, se

$$a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_n \underline{v}_n = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

ovvero se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella banale, con tutti i coefficienti uguali a zero. In caso contrario, l'insieme I si dirà **legato** ed i suoi vettori si diranno **linearmente dipendenti (l.d.)**.

Slide 10/19

Esempio

- In \mathbb{R}^3 , siano

$$\underline{v}_1 = (1, -4, 6), \quad \underline{v}_2 = (9, -1, -1), \quad \underline{v}_3 = (3, 2, -4).$$

L'insieme $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è legato, infatti $3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 5\underline{v}_3 = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$.

- In $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, consideriamo matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'insieme $I = \{A, B, C\}$ è legato, in quanto: $2A - 3B + C = \underline{0}_{\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})}$.

- In $\mathbb{R}[x]$, consideriamo i polinomi:

$$p(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 3, \quad q(x) = 4x^3 + x - 2, \quad r(x) = 6x^3 - 2x^2 - x - 4.$$

L'insieme $I = \{p(x), q(x), r(x)\}$ è legato, in quanto: $2p(x) - 11q(x) + 7r(x) = 0$.

Slide 11/19

Osservazioni

- se $\underline{0} \in I$, allora I è legato (infatti $a_1\underline{0} + 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_n = \underline{0}$ anche se $a_1 \neq 0$);
- se I è libero e $I' \subseteq I$, allora I' è libero (un sottoinsieme di un insieme libero è libero);
- se I è legato e $I' \supseteq I$, allora I' è legato (se un insieme contiene un insieme legato, è legato).

Iniziamo a studiare i casi più semplici. Sia $I = \{\underline{v}_1\}$ un insieme formato da un solo vettore $\underline{v}_1 \in V$. Se $\underline{v}_1 = \underline{0}$ l'insieme è legato. Se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, per la legge di annullamento del prodotto $a_1\underline{v}_1 = \underline{0}$ implica $a_1 = 0$, quindi I è libero.

$$I = \{\underline{v}_1\} \text{ è legato se e solo se } \underline{v}_1 = \underline{0}.$$

Definizione/Osservazione.

Due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono **proporzionali** se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{v} = k\underline{w}$ oppure $\underline{w} = k\underline{v}$. Il vettore nullo è proporzionale ad ogni altro vettore ($\underline{0} = 0\underline{v} \forall \underline{v} \in V$).

Sia $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ un insieme di due vettori di V . Allora:

$$I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \text{ è legato } \iff \text{ i due vettori sono proporzionali.}$$

Questo è un caso particolare della proposizione seguente.

Slide 12/19

Proposizione

Sia $n \geq 2$. Un insieme $I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è libero se e solo se nessun suo elemento si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti vettori di I .

Dimostrazione. “ \Leftarrow ”:

“ \Rightarrow ”:

Slide 13/19

Esercizio

Dire se $\underline{v}_1 = (1, -5, -2)$, $\underline{v}_2 = (3, 5, 4)$, $\underline{v}_3 = (6, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti. In caso negativo, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

Slide 14/19

Teorema

$I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è libero $\iff \underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e per ogni $2 \leq i \leq n$, si ha $\underline{v}_i \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{i-1})$.

Dimostrazione.

Esercizio

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dire se $A \in \mathcal{L}(B, C)$ (ovvero, dire se A è combinazione lineare di B e C).

Slide 17/19

Esercizio

Siano A e B le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dire se le righe di A sono vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^3 .
- Dire se le colonne di A sono vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^2 .
- Dire se le righe di B sono vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^3 .
- Dire se le colonne di B sono vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^3 .

Slide 18/19

