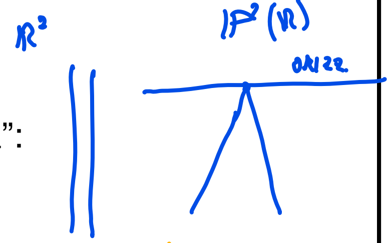
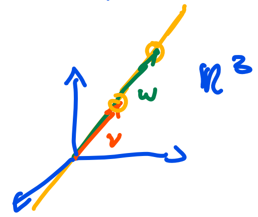
Primi cenni sulla geometria proiettiva



Su $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\underline{0}\}$, si introduce una cosiddetta "relazione di equivalenza":

$$v \sim w :\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\underline{0}\} \text{ tale che } v = \lambda w.$$

Definizione



L'insieme

"TUTTE LE RETTE DI $\mathbb{R}^{n+1}$ PASSANTI PER L'ORIGINE"

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\underline{0}\}/\sim$$

si dice **spazio proiettivo (s.p.) di dimensione** n. Nel caso $n = 2$, si parla del **piano proiettivo**.

"OGNI RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE VIENE CONSIDERATA COME UN UNICO PUNTO/ELEMENTO"

- Quindi due vettori in $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\underline{0}\}$ vengono identificati se sono proporzionali. Ovvero, tutti i punti su una retta di una determinata direzione e passante per l'origine vengono identificati e considerati come un unico punto.
- Considerando il fatto che le rette passanti per l'origine sono (gli unici) sottospazi vettoriali di dimensione 1, si può dire:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{W \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid W \text{ è sottospazio}, \dim(W) = 1\},$$

ed ogni sottospazio (ogni retta passante per l'origine) diventa un unico punto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Sottospazi proiettivi

Definizione

1. Sia $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un sottospazio vettoriale (s.s.v.) di dimensione $k+1$. L'insieme

NOTA

$$\overset{k}{\mathbb{P}}(U) := \{L \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid L \subset U\}$$

$\{\underline{0}_{\mathbb{R}^{n+1}}\} \in U$

si dice **sottospazio proiettivo** (s.s.p.) di dimensione k.

2. Sottospazi proiettivi di dimensione 0 si dicono **punti proiettivi**, di dimensione 1 **rette proiettive**. Per convenzione, $\dim(\varnothing) := -1$.

$$\boxed{\text{QUINDI} \quad \dim(\mathbb{P}^k(U)) = \dim(U) - 1}$$

Teorema

Siano $M, N \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ due s.s.p. con $\dim M + \dim N \geq n$. Allora $M \cap N \neq \emptyset$.

Dimostrazione. SIANO U E V DUE SOTTOSPAZI VETTORIALI (S.S.V.) IN $\mathbb{R}^{n+1}$ T.C. $M = \mathbb{P}(U)$, $N = \mathbb{P}(V)$. DALLA FORMULA DI GRAßMANN PER I S.S.V. SEGUE CHE

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V) \geq \dim(U) + \dim(V) - (n+1)$$

SICURAM. NON MAGGIORE A $\dim(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\geq \dim(M) + \dim(N) + 2 - n - 1$$

$$\geq 1$$

QUINDI $\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(V))$ È ALMENO ZERO, QUINDI $\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(V)) \neq \emptyset$ (VISTO CHE $\dim(\emptyset) = -1$) ■

Corollario

$/\!/\ \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$

Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette proiettive sono **sempre** incidenti. Di conseguenza, **non** esistono rette **parallele** in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. PER DUE RETTE PROIETTIVE $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, SI HA $\dim(L_1) + \dim(L_2) = 2$, POI SI APPLICA IL TEOREMA PRECEDENTE. ■

Proposizione

Per ogni due punti $P \neq Q$ distinti in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ passa un'unica retta proiettiva.

Dimostrazione. PER DEFINIZ. DI PUNTO PROIETTIVO (S.S.P. DI $\dim = 0$) ESISTONO DUE RETTE $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (OVVERO, S.S.V. DI $\dim = 1$) PASSANTI PER L'ORIGINE T.C.

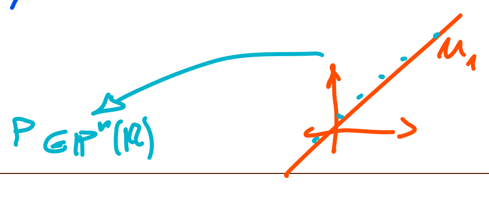
$$\mathbb{P}(U_1) = P, \quad \mathbb{P}(U_2) = Q$$

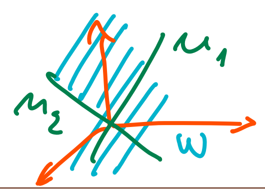
LE DUE RETTE U_1, U_2 GENERANO UN PIANO UNICO $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$, (SEMPRE PASSANTE PER L'ORIGINE) TALE CHE $\dim(W) = 2$

$$L = \mathbb{P}(W)$$

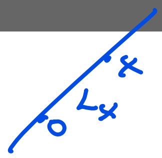
(CON $\dim(L) = \dim(\mathbb{P}(W)) = 1$) FORNISCE UN UNICO S.S.P. DI DIM. 1, CIOÈ UNA RETTA CON $P, Q \in L$, PER COSTRUZ.

$W = \mathcal{L}(U_1 \cup U_2)$





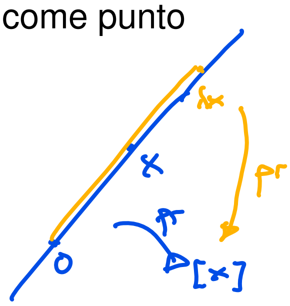
Coordinate omogenee



(n+1)-UPLA

Ogni punto $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\underline{0}\}$ definisce un'unica retta $L_x \in \mathbb{R}^{n+1}$ passante per x e l'origine $\underline{0}$. La retta L_x si può quindi considerare come punto proiettivo, definendo così un'applicazione suriettiva

$$\mathbf{pr} : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\underline{0}\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \quad x \mapsto L_x.$$



Si scrive

$$\mathbf{pr}\,(x_0, x_1, \dots, x_n) =: [x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Definizione

$x_0, x_1, \dots, x_n$ si dicono **coordinate omogenee** del punto proiettivo $[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Nota: le coordinate omogenee non sono univoche, visto che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$[\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n] = [x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Esempio

$pr : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, con $[1, -2, -3]$ indichiamo indifferentemente le terne $(1, -2, -3)$, $(-1, 2, 3)$, $(-2, 4, 6)$ e si ha $[1, -2, -3] = [-1, 2, 3] = [-2, 4, 6]$.

" $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ NON HA ORIGINE"

Nota: il simbolo $[0, 0, \dots, 0]$ è **privo** di alcun significato.

Rette nel piano proiettivo

Nell'ottica delle coordinate omogenee, possiamo considerare il piano proiettivo come:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ non tutti nulli}\},$$

con $[\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2] = [x_0, x_1, x_2]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

Definizione

L'equazione cartesiana di una retta proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è data da

IN $\mathbb{R}^2$ $ax_1 + bx_2 + c = 0$

SISTEMA OMOGENEO

$$r : cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli. EQUIVALENTE: $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$

Esempio

$r : x_0 = 0$ oppure $s : x_0 + 2x_1 - 2x_2 = 0$ sone rette proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

SI VEDE SE $[x_0, x_1, x_2] \in r$, ALLORA ANCHE $[\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2]$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Proposizione

Siano dati i punti distinti $P[p_0, p_1, p_2]$ e $Q[q_0, q_1, q_2]$ Allora l'equazione cartesiana dell'unica retta r passante per entrambi i punti è data da

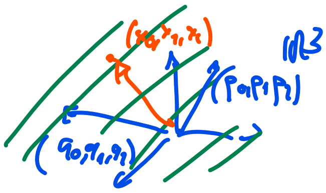
$$r : \det \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dimostrazione.

Una retta proiettiva r è definita da una equazione lineare omogenea nelle indeterminate x_0, x_1, x_2. Può allora essere pensata come uno sottospazio vettoriale W di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$, ovvero un piano passante per l'origine.

I punti proiettivi P e Q appartengono ad r se e solo se le loro coordinate omogenee verificano l'equazione di r, ovvero se e solo se i vettori (p_0, p_1, p_2) $\in \mathbb{R}^3$ e (q_0, q_1, q_2) $\in \mathbb{R}^3$ appartengono al piano W, ovvero se e solo se i tre vettori (p_0, p_1, p_2), (q_0, q_1, q_2) e (x_0, x_1, x_2) sono linearmente dipendenti.

Per concludere, la retta r è unica perché il piano W è unico. ■



Esercizio

Scrivere l'equazione della retta cartesiana passante per i punti proiettivi $[1, 2, 3]$ e $[0, 1, 1]$ nonché della retta passante per $[0, 2, 1]$ e $[0, 1, -1]$.

1)

$$r: \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_0 & x_1 \end{array}\right) = x_2 + 2x_0 - 3x_0 - x_1 = 0$$

$r: -x_0 - x_1 + x_2 = 0$ o EQUIV.: $r: x_0 + x_1 - x_2 = 0$

2)

$$s: \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0$$ CON LAPLACE PER LA PRIMA COLONNA:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = x_0 \cdot (-3) = 0$$

$\Rightarrow -3x_0 = 0$, o EQUIV.: $\boxed{s: x_0 = 0}$

Punto di incidenza per due rette nel piano proiettivo

Abbiamo visto prima che non esistono rette parallele nel piano proiettivo. Il punto di incidenza fra due rette distinte $r : cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$ e $s : c'x_0 + a'x_1 + b'x_2 = 0$ si calcola semplicemente mettendo le due rette in un sistema:

CONSIDERO (x_0, x_1, x_2), (a, b, c), $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ COME VETTORI IN $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} cx_0 + ax_1 + bx_2 & = & 0 \\ c'x_0 + a'x_1 + b'x_2 & = & 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \langle (c, a, b), (x_0, x_1, x_2) \rangle & = & 0 \\ \langle (c', a', b'), (x_0, x_1, x_2) \rangle & = & 0. \end{cases}$$

La soluzione del sistema è allora generato da un vettore (x_0, x_1, x_2) ortogonale sia a (c, a, b) sia a (c', a', b'), e quindi dal loro prodotto vettoriale

$$\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c' \\ a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab' - ba' \\ bc' - cb' \\ ca' - ac' \end{pmatrix}.$$

In conclusione, il punto proiettivo $r \cap s$ ha coordinate omogenee

$$[x_0, x_1, x_2] = [ab' - ba', bc' - cb', ca' - ac']. \quad \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Esercizio

Calcolare il punto di incidenza

1. delle rette $r : -3x_0 + 2x_1 + x_2 = 0$ e $s : x_1 + 2x_2 = 0$,
2. nonchè delle rette $r : -4x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$ e $s : x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$.

$x - 2y - 4 = 0$
$x + 2y + 1 = 0$

① PUNTO D'INCIDENZA $r \cap s$ RISOLVE IL SISTEMA

$$\begin{cases} \langle (-3, 2, 1), (x_0, x_1, x_2) \rangle = 0 \\ \langle (1, 2, 0), (x_0, x_1, x_2) \rangle = 0 \end{cases}$$

QUINDI $(r \cap s) \perp (-3, 2, 1)$, $(r \cap s) \perp (1, 2, 0)$ $\Rightarrow$ $r \cap s = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - (-3)\cdot 0 \\ -3\cdot 2 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

QUINDI $r \cap s = [-1, 1, -8] \left(= [1, -1, 8] = [\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, 1] \right)$

② IN MODO ANALOGO

$$r \cap s = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 - 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 - (-4)\cdot 2 \\ -4\cdot 1 - (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow r \cap s = [0, 10, -3]$$

STA SULLA RETTA $x_0 = 0$.

Privo di nozione di parallelismo, urge allora dare un significato geometrico al piano proiettivo per capire le sue relazioni con il piano (affine) $\mathbb{R}^2$.

Immersione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Il piano $\mathbb{R}^2$ (più precisamente, il piano "affine" $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ che è sempre $\mathbb{R}^2$, ma considerato come insieme di punti, non vettori) è l'insieme dei punti di tipo $P(x,y)$, dove x e y sono numeri reali, dette le coordinate affini (risp. cartesiane) di P rispetto ad un fissato sistema di riferimento, ovvero rispetto ad una base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$. Si consideri

$$j_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (x,y) \mapsto [1,x,y].$$

Tale funzione si chiama la **omogenizzazione** o **carta affine**.

Lemma INIETTIVA: SE $j_0(P) = j_0(Q) \Rightarrow P = Q$

La funzione j_0 è iniettiva.

Dimostrazione. SUPPONIAMO $j_0(P) = j_0(Q)$ PER $P(p_1,p_2), Q(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$ SI HA ALLORA $[1, p_1, p_2] = [1, q_1, q_2]$ IN COORD. OMOGENEE. IN BASE ALLA DEF. DI PUNTO PROIETT. (RISP. COORD. OMOGEN.), DEVE ESISTERE $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ T.C.

$$(\lambda \cdot 1, \lambda p_1, \lambda p_2) = (1, q_1, q_2) \quad \text{COME VETTORI IN } \mathbb{R}^3.$$

DALLA PRIMA COORDINATA: $\lambda = 1$ E QUINDI $(p_1,p_2) = (q_1,q_2) \Rightarrow P = Q$.

Quindi possiamo dire che $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, identificando in modo univoco ogni punto P di $\mathbb{R}^2$ con la sua immagine sotto j_0, cioè con $j_0(P) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. ~~La carta affine j_0 non è l'unica possibilità per "immergere" $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.~~

D'altra parte, non tutti i punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vengono "raggiunti" da j_0. Ovvero:

Lemma

La funzione j_0 **non** è suriettiva. I punti raggiunti da j_0 costituiscono l'insieme

$$\{[x_0,x_1,x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0 \neq 0\}$$

Dimostrazione. SE $x_0 \neq 0$, IL PUNTO $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \in \mathbb{R}^2$ VIENE MAPPATO A $j_0\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right] \underset{\text{COORD. OMOG.}}{=} [x_0, x_1, x_2]$

Nota: La carta affine j_0 non è l'unica possibilità per "immergere" $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Punti impropî e retta impropria

Quindi, i punti proiettivi che cadono al di fuori di $\mathbb{R}^2$ sono quelli che hanno prima coordinata omogenea nulla. Questi punti giacciono sulla retta $\boxed{r_0 : x_0 = 0.}$

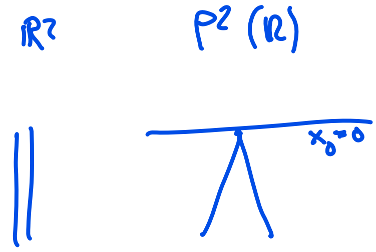
Definizione

La retta $r_0 : x_0 = 0$ si chiama **retta impropria** ed i suoi punti si dicono **punti impropî**. Tutti gli altri punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (o più in generale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) si dicono **punti propî**.

Ad esempio, $P = [0, 5, 4]$ e $P' = [0, \pi, \sqrt{2}]$ sono punti impropî che stanno sulla retta impropria r_0, mentre $Q = [3, 7, 978609]$ è un punto proprio.

In conclusione,

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup r_0 = \mathbb{R}^2 \cup \{x_0 = 0\}.$$



Chiusura proiettiva

Definizione

Sia $L \subset \mathbb{R}^2$ un qualsiasi sottoinsieme di punti di $\mathbb{R}^2$. L'insieme $\overline{L} = j_0(L) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di punti proiettivi si chiama **chiusura proiettiva** di L.

Esempio

$j_0(P)$

La chiusura proiettiva del punto $P = (4, 7)$ in $\mathbb{R}^2$ è data da $\overline{P} = [1, 4, 7]$, mentre quella dell'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ è data da $[1, 0, 0]$.

Esplicitamente, si ottiene la chiusura proiettiva applicando le sostituzioni

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0},$$

e cancellando i denominatori se l'insieme in questione è definito tramite equazioni.

Esempio

$r: a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0$

- La chiusura proiettiva della retta generica $r : ax + by + c = 0$ in $\mathbb{R}^2$ è data dalla retta proiettiva $\overset{j_0(r)}{\overline{r}} : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$ o equivalentemente $\overline{r} : cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$.
- Sia $r : 2x - y + 3 = 0$. Allora $\overline{r} : 3x_0 + 2x_1 - x_2 = 0$.
- Se invece $s : y = 0$ è un'altra retta in $\mathbb{R}^2$, si ottiene la retta proiettiva $\overline{s} : x_2 = 0$.

Parte affine

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ un qualsiasi sottoinsieme di punti del piano proiettivo. L'insieme $S \cap \mathbb{R}^2$ di punti proprî si chiama la **parte affine** di S.

Questa raccoglie i punti di S che si "vedono" in $\mathbb{R}^2$. Per determinarla basta dividere per x_0 (se non zero) e ridenominare le variabili come $x := \frac{x_1}{x_0}$ e $y := \frac{x_2}{x_0}$.

$\left[\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right] = [1, \underbrace{2, 3}]$

Esempio

- Il punto proiettivo $[2, 4, 6] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corrisponde al punto $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$, mentre il punto $[0, 77, 2]$ **non** ha parte affine, quindi **non** si vede in $\mathbb{R}^2$.
- La parte affine della retta proiettiva $\bar{r} : x_0 - 2x_1 = 0$ è data dalla retta $r : 1 - 2x = 0$ in $\mathbb{R}^2$. $\Rightarrow \frac{x_0}{x_0} - 2\frac{x_1}{x_0} = 0 \xrightarrow{x := \frac{x_1}{x_0}} 1 - 2x = 0$
$2x - 1 = 0$
- L'unica retta che non ha parte affine è la retta impropria $r_0 : x_0 = 0$ composta da tutti e soli i punti improprî.

Incidenze delle chiusure proiettive

Proposizione

Sia $P = r \cap s$ il punto di incidenza delle due rette r e s in $\mathbb{R}^2$. Allora le rispettive chiusure proiettive si incontrano nella chiusura proiettiva del punto di incidenza, ovvero $\overline{P} = \bar{r} \cap \bar{s}$.

Dimostrazione. Se $r : ax + by + c = 0$ nonchè $s : a'x + b'y + c' = 0$ e $P = r \cap s$, allora le coordinate di $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ costituiscono una soluzione del sistema

$$\begin{array}{l} r: \\ s: \end{array} \begin{cases} ax + by + c &= 0, \\ a'x + b'y + c' &= 0. \end{cases}$$

Da lì è immediato che $\overline{P} = [1, p_1, p_2]$ è soluzione del sistema

$$\begin{array}{l} \bar{r}: \\ \bar{s}: \end{array} \begin{cases} cx_0 + ax_1 + bx_2 &= 0, \\ c'x_0 + a'x_1 + b'x_2 &= 0, \end{cases}$$

che dà l'intersezione $\bar{r} \cap \bar{s}$. ■

Intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di due rette parallele in $\mathbb{R}^2$

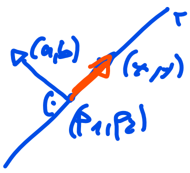
In quale punto si incontrano allora in generale le chiusure proiettive di due rette parallele e distinte? Dalla trattazione precedente segue che necessariamente tale punto di intersezione non può avere una parte affine e quindi sarà un punto improprio.

Proposizione

Siano r e s due rette parallele e distinte in $\mathbb{R}^2$ con vettore direzionale $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Allora $\bar{r} \cap \bar{s} = [0, v_1, v_2]$.

Dimostrazione. (REMINDER: RETTA IN $\mathbb{R}^2$ IN FORMA PARAM.: $r: \underline{x} = \underline{p} + t\,\underline{v}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\underline{v} = (v_1, v_2)$)

SIANO $r: ax + by + c = 0$ $s: ax + by + c' = 0$ DUE RETTE PARALLELE (E DISTINTE) IN $\mathbb{R}^2$ $(c \neq c')$.



$\langle (x,y) - (p_1,p_2), (a,b) \rangle = 0$

QUINDI IL VETTORE IN ROSSO, OVVERO LA DIREZ. È PROPORZIONALE A $(-b, a)$

$\Rightarrow$ LA DIREZ. DELLA RETTA $r: ax + by + c = 0$ È DATA $\underline{v} = (v_1, v_2) = (-b, a)$.

* * *

PER CALCOLARE $\bar{r} \cap \bar{s}$, DOBBIAMO METTERE A SISTEMA

$\bar{r}: cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$, $\bar{s}: c'x_0 + ax_1 + bx_2 = 0$

$$\begin{cases} cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0 \\ c'x_0 + ax_1 + bx_2 = 0 \end{cases}$$ EQUIVALENTE AL SISTEMA $E_2 \to E_2 - E_1$ $$\begin{cases} cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0 \\ (c' - c)x_0 = 0 \end{cases}$$

CON SOLUZ. $(c \neq c')$ $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ INSERENDO NELLA PRIMA, MI DÀ LA SOLUZ. GENERALE $t(0, -b, a)$, $t \in \mathbb{R}$, CHE DEFINISCE IL PUNTO PROIETTIVO

$[0, -b, a] = [t \cdot 0, -t \cdot b, t \cdot a]$

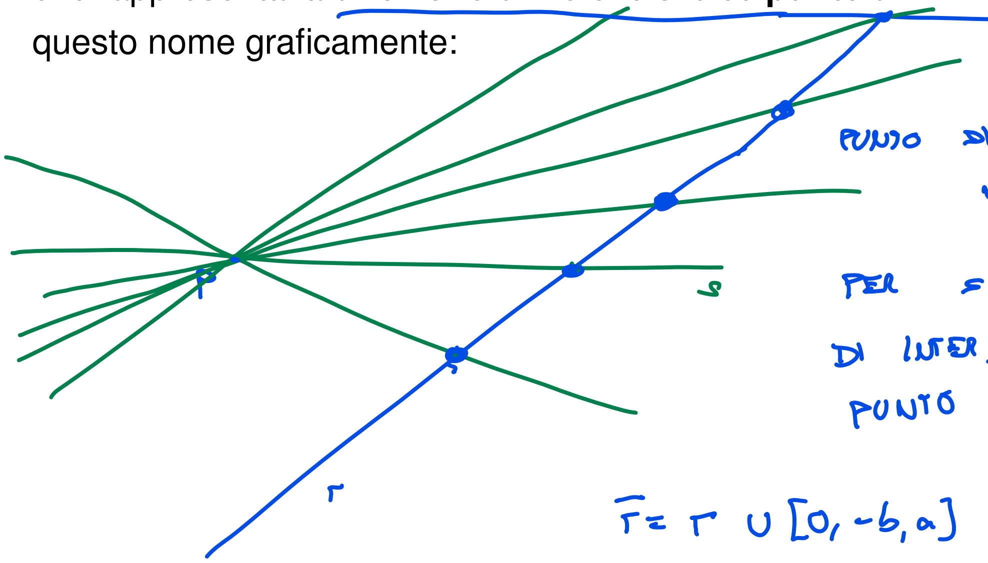
$= [0, v_1, v_2]$

Punti all'infinito ed orizzonte

Riassumendo, una retta proiettiva $\bar{r} : cx_0 + ax_1 + bx_2 = 0$ (che non sia quella impropria) può essere vista come un'unione

$$\bar{r} = r \cup r_\infty$$

della sua parte affine $r : ax + by + c = 0$ e del suo punto improprio $r_\infty = [0, -b, a]$ che rappresenta la **direzione** di r e che si dice **punto all'infinito** di r. Giustifichiamo questo nome graficamente:



PUNTO DI INTERSEZ. "CAMMINA" VERSO L'INFINITO

PER $s \parallel r$ IL PUNTO DI INTERSEZ. DIVENTA UN PUNTO ALL'INFINITO

$\bar{r} = r \cup [0, -b, a] = r \cup r_\infty$

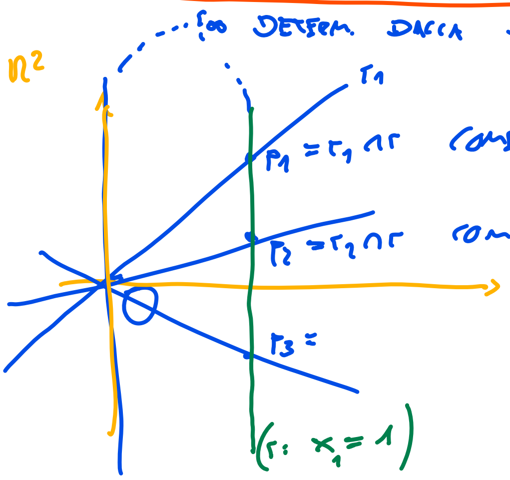
Punti all'infinito & orizzonte

La retta impropria $r_0 : x_0 = 0$ raccoglie pertanto tutti i punti all'infinito delle rette del piano (le loro direzioni). Per tale motivo è anche detta **retta all'infinito** o **linea di orizzonte.** Possiamo così presentare un primo modello di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

PRIMA: RAPPRESENTAZ. GEOMETRICA DI $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ SECONDO DESARGUES:

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: L'INSIEME DI TUTTE LE RETTE IN $\mathbb{R}^2$ PASSANTI PER L'ORIGINE, MA VISTI COME PUNTI

r_∞ DETERM. DALLA DIREZ.



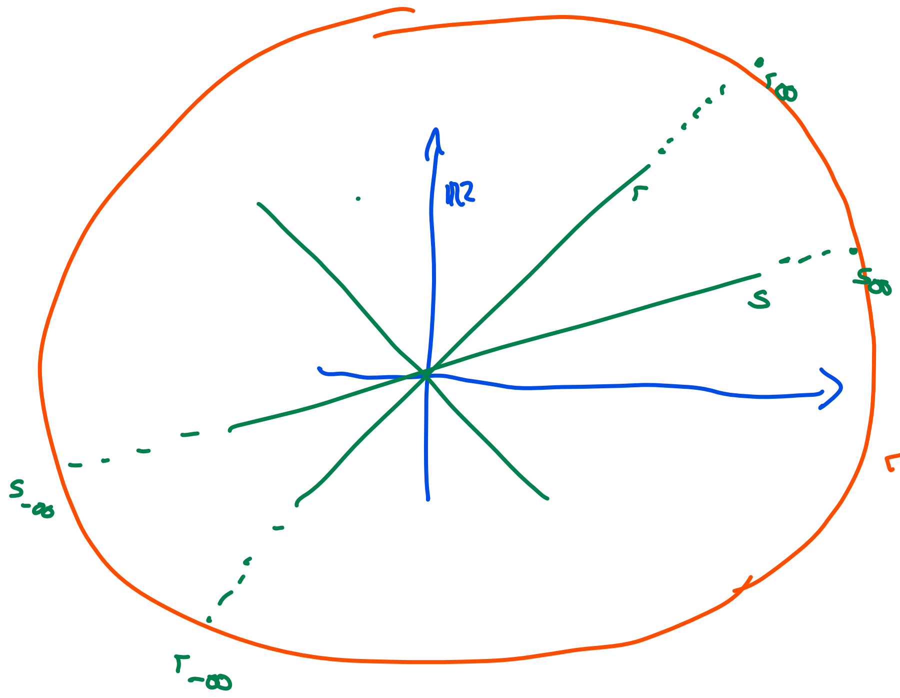
$p_1 = r_1 \cap r$ COME PUNTO IN $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$p_2 = r_2 \cap r$ COME PUNTO IN $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

QUINDI

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = r \cup r_\infty$
$= \mathbb{R} \cup r_\infty$

SI PASSA A $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:



$\mathbb{R}^2$ = L'UNIONE DI TUTTE LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

DIREZ. DI $r \neq$ DIREZ. DI s

$r_0 : x_0 = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup r_0$

$= \mathbb{R}^2 \cup \{x_0 = 0\}$

$r_\infty = r_{-\infty}$ PERCHÉ $[x_0, x_1, x_2] = [\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.