



ELEMENTI BASE DI STATISTICA



Variabile aleatoria

Una variabile aleatoria X è una funzione definita sullo spazio Ω che associa un numero reale $X(\omega) = x$ ad ogni elemento elementare $\omega \in \Omega$.

- X : numero di volte testa
- X : numero di palline nere

La variabile aleatoria è DISCRETA se X assume un'infinità numerabile di valori

- numero di volte testa in 3 lanci di una moneta
- numero di palline bianche estratte da un'urna
- numero di prodotti difettosi al giorno



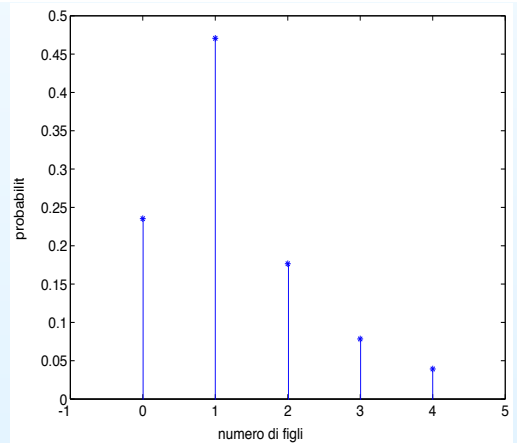
Distribuzione di probabilità

Data una var. aleatoria X discreta, la distribuzione di probabilità $p_X(x)$ è una funzione che associa ad ogni x la probabilità di verificarsi

$$p(x) = P(X = x)$$

• $p(x) \geq 0$

• $\sum_i p(x_i) = 1$



N.figli

X	0	1	2	3	4	tot
p(x)	0.24	0.47	0.17	0.08	0.04	1.00



Valore atteso e varianza

- Il valore atteso di una variabile casuale X discreta è

$$E(X) = \mu_X = \sum_i x_i p(x_i)$$

$$E(X) = \mu_X = 0 \times 0.24 + 1 \times 0.47 + 2 \times 0.17 + 3 \times 0.08 + 4 \times 0.04 = 1.21$$

- La varianza di una variabile casuale X discreta è

$$V(X) = E(X - \mu_X)^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p(x_i)$$

$$V(X) = 1.46 \times 0.24 + 0.04 \times 0.47 + 0.62 \times 0.17 + 3.20 \times 0.08 + 7.78 \times 0.04 = 1.04$$

	N.figli				
X	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.24	0.47	0.17	0.08	0.04
$(x_i - \mu_X)^2$	1.46	0.04	0.62	3.20	7.78



Varianza e deviazione standard

- La varianza si può calcolare anche

$$V(X) = E(X^2) - \mu_x^2 = \sum_i x_i^2 p(x_i) - \mu_X^2$$

$$V(X) = 0 \times 0.24 + 1 \times 0.47 + 4 \times 0.17 + 9 \times 0.08 + 16 \times 0.04 - 1.21^2 = 1.04$$

- la deviazione standard è

$$SD(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.04} = 1.01$$

	N.figli				
X	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.24	0.47	0.17	0.08	0.04
x_i^2	0	1	4	9	16



Variabile aleatoria continua

Una variabile aleatoria X è CONTINUA se X assume un'infinità non numerabile di valori

- altezza
- peso
- distanza
- tempo di percorrenza etc...

Alcuni aspetti delle variabili continue:

- Se ogni possibile realizzazione della X è equiprobabile, allora $P(X = x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- La funzione di probabilità non si può usare, come nel caso discreto per descrivere il comportamento di una var. casuale continua.
- Con la funzione di ripartizione possiamo calcolare la prob. di un intervallo

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Per descrivere la X si utilizza la funzione di densità $f_X(x) = \frac{d}{dx} F(x)$



Funzione densità di probabilità

Data una variabile aleatoria continua X , la funzione di densità

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

è una curva per ogni valore x attribuisce la densità di probabilità $\neq$ probabilità. La probabilità è l'area al di sotto della curva

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F(b) - F(a)$$

Proprietà:

- $f(x) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma non necessariamente $f(x) \leq 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$



Valore atteso, varianza, deviazione standard

- Il valore atteso di una variabile casuale X continua è

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- La varianza di una variabile casuale X continua è

$$V(X) = E(X - \mu_X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$$

oppure

$$V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu_X^2$$

- la deviazione standard è

$$SD(X) = \sqrt{V(X)}$$



Distribuzione Normale o Gaussiana

La variabile casuale X Normale o Gaussiana ha una forma campanulare ed è simmetrica. E' caratterizzata da due parametri

- $E(X) = \mu$ la media
- $V(X) = \sigma^2$ la varianza

$$f_X(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

La probabilità si calcola attraverso l'integrale

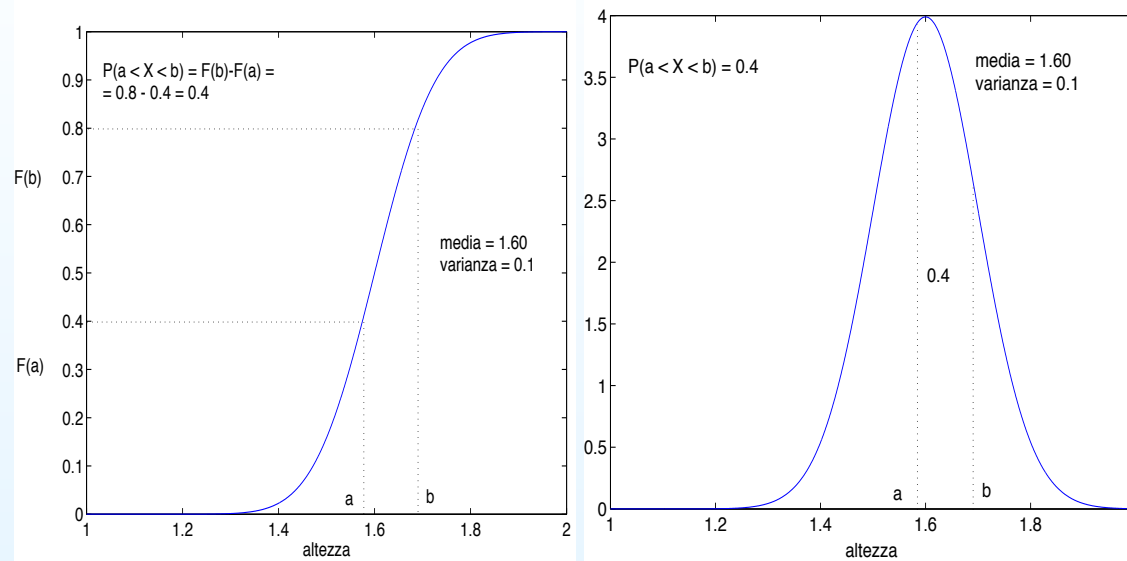
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x | \mu, \sigma^2) dx = F(b) - F(a)$$

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f_X(x | \mu, \sigma^2) dx = F(a), \quad P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f_X(x | \mu, \sigma^2) dx = 1 - F(a)$$

N.B. Si dimostra che $\int f_X(x | \mu, \sigma^2) dx = 1$, ma questi integrali non si possono calcolare in forma analitica, ma numerica (uso delle tavole).

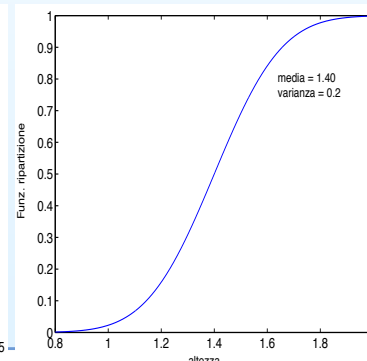
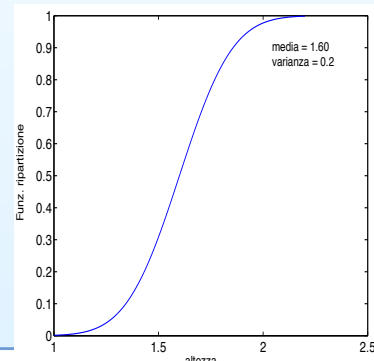
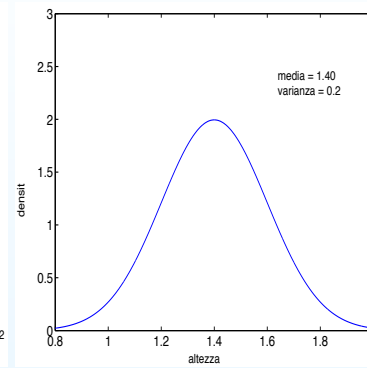
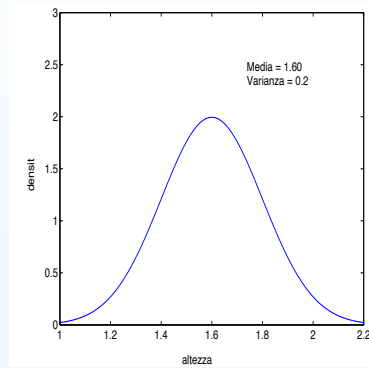


Distribuzione Normale



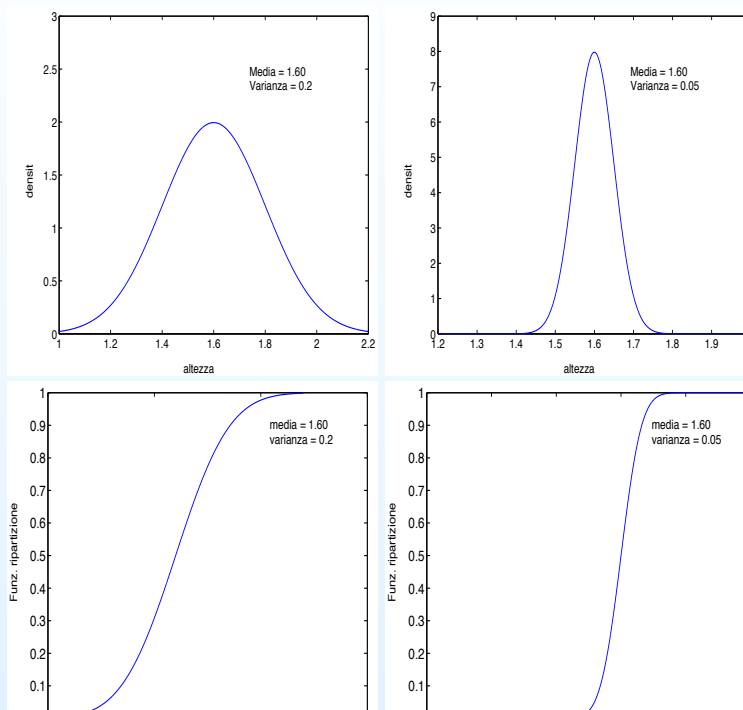


La media parametro di posizione





La varianza parametro di dispersione





Variabile standardizzata

- Una variabile Z è standardizzata quando
 - $E(X) = 0$
 - $V(X) = 1$
- Una variabile X con valore atteso $E(X)$ e varianza $V(X)$ si può standardizzare

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}, \quad E(Z) = \frac{E(X) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = 0, \quad V(Z) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

