Insiemi ortonormali

Definizione

Un insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k\}$ di vettori di uno spazio metrico V si dice **ortogonale** se

i) $\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$ ($1 \leqslant i, j \leqslant k$);

se in aggiunta

ii) $\|\underline{u}_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

allora l'insieme si dice **ortonormale**.

$u = (1,0,1)$

$\|u\| = \sqrt{2}$

$u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

$\|u'\| = 1.$

Esempi

- Sia $V = \mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico. Se $\underline{u}_1 = (1,1)$ e $\underline{u}_2 = (1,-1)$, l'insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è ortogonale. Quindi $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.
- Sia $V = \mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico. Se $\underline{u}_1 = (1,0,1)$ e $\underline{u}_2 = (1,0,-1)$, l'insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è ortogonale (non è una base, poiché $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3).
- La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

Proposizione

Un insieme $I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset V$ ortogonale è libero se e solo se $\underline{0} \notin I$.

Dimostrazione. DOBBIAMO DIMOSTRARE SOLO "$\Leftarrow$":

SIA

$$\underline{u} := \sum_{j=1}^{m} a_j \underline{v}_j, \qquad a_j \in \mathbb{R}$$

PER LA LINEARITÀ DEL PRODOTTO SCALARE $\forall i = 1, \dots, m$

$$\langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} a_j \underline{v}_j, \underline{v}_i \right\rangle \underset{\text{LIN.}}{=} \sum_{j=1}^{m} a_j \langle \underline{v}_j, \underline{v}_i \rangle$$

PER IPOTESI, $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$, QUINDI

$$\langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = a_i \langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle \underset{\text{DEF. NORMA}}{=} a_i \|\underline{v}_i\|^2$$

PER IPOTESI $\underline{v}_i \neq \underline{0}$, QUINDI $\|\underline{v}_i\| \neq 0$ E DI CONSEGUENZA

SE $\underline{u} = \underline{0} \Rightarrow 0 = \langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = a_i \|\underline{v}_i\|^2 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

QUINDI L'UNICA C.C. TALE CHE

$$\underline{0} = \sum_{j=1}^{m} a_j \underline{v}_j$$

È QUELLA BANALE $(a_j = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, m)$

$\Rightarrow$ L'INSIEME $I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ È LIBERO.

Osservazione

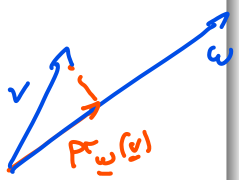
In uno spazio vettoriale di dimensione n, n vettori non nulli e ortogonali fra loro formano una base (sono linearmente indipendenti ed in uno spazio di dimensione n, n vettori linearmente indipendenti formano una base).

In analogia con l'esempio di $\mathbb{R}^2$ (con prodotto scalare canonico), si definisce:

Definizione

Dati due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di uno spazio metrico V, il vettore

$$\mathrm{pr}_{\underline{w}}(\underline{v}) := \frac{\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{w}\|^2}\underline{w}$$



si dice **proiezione (ortogonale)** di $\underline{v}$ in direzione di $\underline{w}$ (o di $\underline{v}$ su $\underline{w}$).

Metodo di Gram-Schmidt

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di uno spazio metrico V. È possibile ricavare da essa una base ortonormale come illustrato nel seguito (**metodo di Gram-Schmidt**). Il primo passo è definire dei vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$ in maniera ricorsiva, ponendo:

$$\underline{w}_1 := \underline{v}_1$$

AD ESEMPIO

$$\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{v}_2, \underline{w}_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = v_2 - pr_{w_1}(v_2)$$

e per ogni $i = 2, \dots, n$:

$$\underline{w}_i := \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2} \underline{w}_j = \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{pr}_{\underline{w}_j}(\underline{v}_i).$$

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_3 - pr_{w_1}(\underline{v}_3) - pr_{w_2}(\underline{v}_3)$$

Lemma

L'insieme $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$ è una base **ortogonale** di V.

Il secondo passo consiste nel "normalizzare" i vettori ottenuti. Chiamiamo

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|}, \qquad \underline{u}_2 = \frac{\underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|}, \qquad \dots, \qquad \underline{u}_n = \frac{\underline{w}_n}{\|\underline{w}_n\|}.$$

Corollario

L'insieme $\mathcal{B}'' = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ è una base **ortonormale** di V.

Dimostrazione del Lemma. Per l'osservazione fatta sopra, è sufficiente dimostrare che i vettori di $\mathcal{B}'$ sono non nulli e ortogonali fra di loro.

1) I VETTORI SONO NON NULLI:

NOTIAMO CHE $w_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_i)$

I VETTORI DI $\mathcal{B}'$ SONO NON NULLI,

INFATTI $w_1 = v_1 \neq 0_V$ E PER $i \geq 2$

SE PER ASSURDO FOSSE $w_i = \underline{0}$, SE NE DEDURREBBE CHE

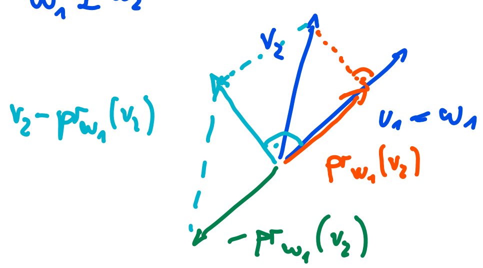
$$\underline{v}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|w_j\|^2} \underline{w}_j$$

APPARTIENE A $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$, CONTRADDIC. L'IPOTESI CHE $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ È UNA BASE.

ILLUSTRAZ.:

$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2)$
$= v_2 + (-pr_{w_1}(v_2))$

$w_1 \perp w_2$



2) I VETTORI $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ SONO ORTOGONALI:

L'ORTOG. SI DIMOSTRA PER INDUZIONE, PRIMO PASSO: $\{w_1\}$ È UN INSIEME ORTOGONALE. SECONDO PASSO: SIA $2 \leq i \leq n$. PER IPOTESI INDUTTIVA, ASSUMIAMO CHE $\{w_1, \dots, w_{i-1}\}$ SIANO A DUE A DUE ORTOGONALI,

E MOSTRIAMO CHE $\underline{w}_i \perp \underline{w}_k \quad \forall\ 1 \leq k \leq i-1$

PER COSTRUZ., $\forall\ 1 \leq k \leq i-1$

$$\langle \underline{w}_k, \underline{w}_i \rangle = \left\langle \underline{w}_k, \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2}}_{\in \mathbb{R}} \underline{w}_j \right\rangle \underset{\substack{\text{BILIN. DI} \\ \langle \cdot,\cdot \rangle}}{=} \langle \underline{w}_k, \underline{v}_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2} \langle \underline{w}_k, \underline{w}_j \rangle$$

MA $\langle w_k, w_j \rangle = 0 \quad \forall\ j \neq k$ (IPOTESI INDUTTIVA)

$k = 1, \dots, i-1$
$j = 1, \dots, i-1$

QUINDI $$\langle w_k, w_i \rangle \underset{(k=j)}{=} \langle w_k, v_i \rangle - \frac{\langle v_i, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} \langle w_k, w_k \rangle \underset{\substack{\text{DEF.} \\ \text{DI } \|\cdot\|}}{=} \langle w_k, v_i \rangle - \frac{\langle v_i, w_k \rangle}{\cancel{\|w_k\|^2}} \cancel{\|w_k\|^2}$$

$$\underset{\substack{\text{SIMM. DI} \\ \langle \cdot,\cdot \rangle}}{=} \langle w_k, v_i \rangle - \langle w_k, v_i \rangle = 0.$$

✓

Esercizio

$W = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3), \quad \dim(W) = 3$

Determinare una base ortonormale del sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori (linearmente indipendenti) $\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\underline{v}_2 = (0, 1, 2, 0)$ nonché $\underline{v}_3 = (5, 3, -5, 3)$.

PRIMA OSS.: $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \neq 0$, $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle \neq 0$, $\langle \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle \neq 0$.

SI ORTOGONALIZZA CON GRAM – SCHMIDT:

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$$

$$\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - pr_{\underline{w}_1}(\underline{v}_2) = \underbrace{(0,1,2,0)}_{v_2} - \frac{\langle \overbrace{(1,1,1,0)}^{w_1}, \overbrace{(0,1,2,0)}^{v_2} \rangle}{\|\underbrace{(1,1,1,0)}_{w_1}\|^2} \underbrace{(1,1,1,0)}_{w_1}$$

$$= (0,1,2,0) - \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 0}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2}(1,1,1,0) = (0,1,2,0) - \frac{3}{3}(1,1,1,0)$$

$$= (-1, 0, 1, 0)$$

EFFETTIVAM.: $\underline{w}_1 \perp \underline{w}_2$:

$$\langle (1,1,1,0), (-1,0,1,0) \rangle = 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$ ✓

$$\underline{w}_3 = \underline{v}_3 - pr_{\underline{w}_1}(\underline{v}_3) - pr_{\underline{w}_2}(\underline{v}_3)$$

$$= \underbrace{(5,3,-5,3)}_{v_3} - \frac{\langle \overbrace{(1,1,1,0)}^{w_1}, \overbrace{(5,3,-5,3)}^{v_3} \rangle}{\|\underbrace{(1,1,1,0)}_{w_1}\|^2} \underbrace{(1,1,1,0)}_{w_1} - \frac{\langle \overbrace{(-1,0,1,0)}^{w_2}, \overbrace{(5,3,-5,3)}^{v_3} \rangle}{\|\underbrace{(-1,0,1,0)}_{w_2}\|^2} \underbrace{(-1,0,1,0)}_{w_2}$$

$$= (5,3,-5,3) - \frac{1\cdot 5 + 1\cdot 3 + 1\cdot(-5) + 0\cdot 3}{3}(1,1,1,0) - \frac{(-1)\cdot 5 + 0\cdot 3 + 1\cdot(-5) + 0\cdot 3}{2}(-1,0,1,0)$$

$$= (5,3,-5,3) - \frac{3}{3}(1,1,1,0) + 5(-1,0,1,0)$$

$$= (-1,2,-1,3)$$

$\underline{w}_1 \perp \underline{w}_3$: $\langle (1,1,1,0), (-1,2,-1,3) \rangle = -1 + 2 - 1 + 0 = 0$

$\underline{w}_2 \perp \underline{w}_3$: $\langle (-1,0,1,0), (-1,2,-1,3) \rangle = +1 + 0 - 1 + 0 = 0$

✓

$\Rightarrow \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ È UN INSIEME ORTOGONALE.

$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} w_1$, $\quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_2$, $\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} w_3$

COSTITUISCONO UNA BASE ORTONORMALE

✓.

Proprietà delle basi ortonormali

Proposizione

V SPAZIO METRICO

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base **ortonormale** di V, e $\underline{v} \in V$ un vettore qualsiasi. La componente i-esima di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ è data da $\|u_i\| = 1$

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle .$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle \, \underline{u}_1 + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle \, \underline{u}_2 + \ldots + \langle \underline{v}, \underline{u}_n \rangle \, \underline{u}_n \\ &= \mathrm{pr}_{\underline{u}_1}(\underline{v}) + \mathrm{pr}_{\underline{u}_2}(\underline{v}) + \ldots + \mathrm{pr}_{\underline{u}_n}(\underline{v}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. INDICHIAMO CON $a_j \in \mathbb{R}$ LE COMPONENTI DI $\underline{v}$ NELLA BASE $\mathcal{B}$, $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, OVVERO $\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{u}_j$

SEGUE CHE

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{u}_j, \underline{u}_i \right\rangle \overset{\text{LIN. DI } \langle \cdot ; \cdot \rangle}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \underline{u}_j, \underline{u}_i \rangle \underset{\mathcal{B} \text{ BASE ORTOG.}}{=} a_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle$$

$\langle \underline{u}_j, \underline{u}_i \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

$$= a_i \|\underline{u}_i\|^2$$

$$\underset{\mathcal{B} \text{ ORTON.}}{=} a_i \cdot 1 = a_i . \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Esercizio

In $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico, si consideri la base ortonormale formata da

$$\underline{u}_1 = \tfrac{1}{5}(3, 4) \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{1}{5}(4, -3)$$

Nella base $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$, determinare le componenti del vettore $\underline{v} = (8, -1)$. $[\underline{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soluzione. $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = ?$

DOBBIAMO DETERMINARE DUE NUMERI REALI $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ T.C. $\underline{v} = a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2$, QUINDI RISOLVERE UN SISTEMA ETC.

SICCOME $\mathcal{B}$ È BASE ORTONORMALE, CON LA PROPOSIZ. PREC. SI FA IN UN ATTIMO:

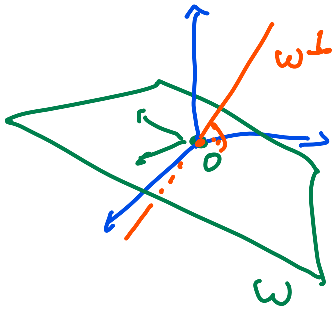
$$a_1 = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle = \left\langle (8, -1), \tfrac{1}{5}(3, 4) \right\rangle = \tfrac{1}{5}(8 \cdot 3 - 1 \cdot 4) = 4$$

$$a_2 = \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle = \left\langle (8, -1), \tfrac{1}{5}(4, -3) \right\rangle = \tfrac{1}{5}(8 \cdot 4 + 3) = 7$$

QUINDI $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

✓

Sottospazi ortogonali



Definizione

Sia V uno spazio metrico e $W \subseteq V$ un sottospazio. L'insieme

$$W^\perp := \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \ \forall\, \underline{w} \in W\}$$

è detto **complemento ortogonale** di W in V.

Proposizione

$W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. PER OGNI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ E OGNI $v_1, v_2 \in W^\perp$, DEVO DIMOSTRARE CHE $\lambda \underline{v_1} + \mu \underline{v_2} \in W^\perp$.

INFATTI, PER $\underline{w} \in W$ ARBITRARIO

$$\langle \lambda \underline{v_1} + \mu \underline{v_2}, \underline{w} \rangle \underset{\substack{\text{LIN. DI} \\ \langle \cdot ; \cdot \rangle}}{=} \lambda \langle \underline{v_1}, \underline{w} \rangle + \mu \langle \underline{v_2}, \underline{w} \rangle = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \lambda \underline{v_1} + \mu \underline{v_2} \perp \underline{w}$, $\underline{w} \in W$ ARBITR.

$\Rightarrow \lambda \underline{v_1} + \mu \underline{v_2} \in W^\perp$. ✓

Lemma

Siano $\underline{v}, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$ vettori di uno spazio metrico V. Se $\underline{v}$ è ortogonale a ciascuno dei vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$, allora è ortogonale ad ogni loro combinazione lineare.

Dimostrazione. (ESERCIZIO, SEGUE DIRETTAM. DALLA LINEARITÀ DI $\langle \cdot ; \cdot \rangle$)

Corollario

Sia $W = \mathcal{L}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k)$ un sottospazio di V. Allora:

$$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, k\}.$$

ORTOG. A CIASCUNO DEI GENERATORI.

Esercizio

Sia $W = \mathcal{L}\big((1,0,1),(1,1,1)\big) \subset \mathbb{R}^3$. Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$.

SI VEDE CHE $(1,0,1) \notin \mathcal{L}((1,1,1)) \Rightarrow \dim(W) = 2$

DAL COROLLARIO SEGUE:
OGNI VETTORE $\underline{v} \in W^\perp$ DEVE ESSERE ORTOGONALE AD ENTRAMBI I GENERATORI DI W, OVVERO A $(1,0,1)$ E $(1,1,1)$. PER $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ SI HA DUNQUE:

$$\begin{cases} \langle \underline{v}, (1,0,1)\rangle = x_1 + x_3 = 0 \\ \langle \underline{v}, (1,1,1)\rangle = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

BASTA RISOLVERE IL SISTEMA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = t,\ x_1 = -t,\ t \in \mathbb{R}$$

SOLUZIONE GENERALE: $(x_1, x_2, x_3) = (-t, 0, t) = t(-1, 0, 1) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow W^\perp = \mathcal{L}((-1,0,1)) \Rightarrow \dim(W^\perp) = 1$

Teorema

Sia V uno spazio metrico finitamente generato e $U \subseteq V$ un suo sottospazio. Allora:

1. $\{\underline{0}\}^\perp = V$ nonché $V^\perp = \{\underline{0}\}$;
   (ogni vettore è ortogonale a $\underline{0}$, e $\underline{0}$ è l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di V)
2. $U \cap U^\perp = \{\underline{0}\}$ nonché $U \bigoplus U^\perp = V$;
3. $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$;
4. $(U^\perp)^\perp = U$.

Dimostrazione.

1) TRIVIALE

2) a) SIA $n = \dim(V)$ E SIA $k = \dim(U)$ CON $k \leq n$ (STEINITZ)
COMPLETIAMO UNA BASE $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ DI U AD UNA BASE $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ DI V.

b) CON IL METODO DI GRAM-SCHMIDT, ESISTE UNA BASE ORTONORM. $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ DI V T.C.

$$\mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = U$$

DIMOSTREREMO CHE

$$\mathcal{U}^\perp = \mathcal{L}(\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n)$$

(i) "$\supseteq$": PER $i \leq k < j$ SI HA $\langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = 0$

QUINDI $\underline{w}_j \in \mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)^\perp = \mathcal{U}^\perp$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n) \subseteq \mathcal{U}^\perp$

(ii) "$\subseteq$": SE $v = \sum_{j=1}^{n} a_j \underline{w}_j \in \mathcal{U}^\perp$,

SI HA PER $1 \leq i \leq k$

$$0 = \langle v, \underline{w}_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LIN. DI } \langle \cdot,\cdot \rangle}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \underline{w}_j, \underline{w}_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{B} \text{ ORTON.}}}{=} a_i \qquad \forall i = 1, \dots, k$$

$\Rightarrow$ $v = \sum_{j=k+1}^{n} a_j \underline{w}_j \in \mathcal{L}(\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n)$

QUINDI

$$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$
$$\mathcal{U}^\perp = \mathcal{L}(\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{\underline{0}_V\}$, $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$, $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$.

✓

Osservazione sui sistemi lineari

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, ed $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ la sua i-esima riga.
Una soluzione di un sistema omogeneo di m equazioni in n incognite

$\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = y_1 x_1 + \ldots + y_n x_n$

$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$\langle R_1, \underline{x} \rangle = 0$
$\langle R_2, \underline{x} \rangle = 0$
$\vdots$
$\langle R_m, \underline{x} \rangle = 0$

è un vettore $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a tutti i vettori R_i (rispetto al prodotto scalare canonico):

$$\langle R_i, \underline{x} \rangle = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Se $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è lo spazio generato dalle righe di A, e S_Σ lo spazio delle soluzioni del sistema, allora

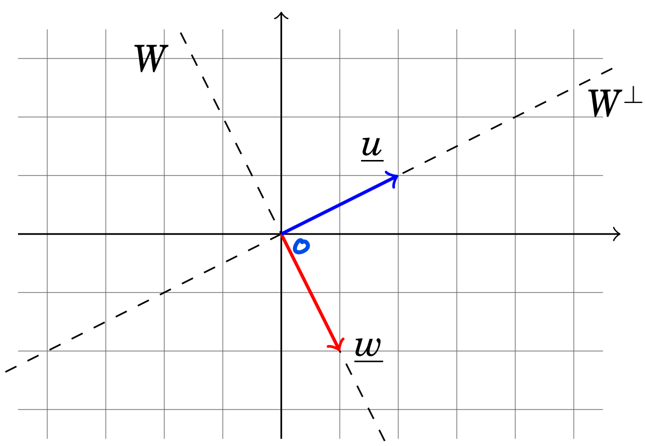
$$S_\Sigma = W^\perp.$$

Esempio

Sia

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$$

Una base di W è data dalla soluzione $\underline{w} = (1, -2)$.
Il vettore $\underline{u} = (2, 1)$, unica riga della matrice dei coefficienti, è una base di $W^\perp$.



Esercizio (esame effettivo)

Sia V il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V := \mathcal{L}\{\underbrace{(0,1,5,-1)}_{\underline{w}_1}, \underbrace{(1,1,0,1)}_{\underline{w}_2}, \underbrace{(2,1,0,0)}_{\underline{w}_3}, \underbrace{(3,3,5,0)}_{\underline{w}_4}\}\ .$$

a) Si determini, se esiste, una base di V.

b) Dire se il vettore $\underline{w} = (1,-2,0,1)$ appartiene al complemento ortogonale di V.

Soluzione. a) PER OTTENERE UNA BASE DI V, SCRIVIAMOCI I QUATTRO GENERATORI $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4$ COME RIGHE DI UNA MATRICE, E RIDUCIAMOLA:

$$\begin{pmatrix} \underline{w}_3 \\ \underline{w}_2 \\ \underline{w}_4 \\ \underline{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \cancel{\underline{v}_4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ UNA BASE DI V È DATA DA

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

b) DOBBIAMO VERIFICARE SE

$$\langle \underline{v}_i, \underline{w} \rangle = 0 \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$\langle (2,1,0,0), (1,-2,0,1) \rangle = 0$$

$$\langle (-1,0,0,1), (1,-2,0,1) \rangle = 0$$

$$\langle (-3,0,5,0), (1,-2,0,1) \rangle = -3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{w} \notin V^{\perp}.$$

Esercizio (esame effettivo)

Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 + (\lambda - 3)x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

a) dire per quali valori di λ il sistema ammette infinite soluzioni;

b) per i valori di λ trovati al punto a), scrivere una base per lo spazio delle soluzioni.

Soluzione. (LASCIATO A VOI)