Note di Geometria Algebrica

Giovanna Ilardi

Indice

1 Varietà affini

Sia k un campo algebricamente chiuso. Denoteremo con

$$\mathbb{A}^n_k = \{P = (a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_i \in k, \quad i = 1, \cdots, n\}$$

o con $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine numerico n-dimensionale su k. Sia $A^{(n)} = k[\underline{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili su k. Il nostro obiettivo è di individuare l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se i polinomi $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sono tutti di primo grado, il sistema diventa un sistema di equazioni lineari. Nel caso in cui i polinomi presentano gradi maggiori o uguali a 2, la situazioni si complica.
Sia $f \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ un polinomio.

Definizione 1.1. Il sottoinsieme

$$Z_a(f) = \{P = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k : f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0\}$$

di $\mathbb{A}^n_k$ si dice insieme degli zeri di f.
Piú in generale si può considerare un insieme $T \subset A^n$ di polinomi e il suo luogo di zeri:

$$Z_a(T) = \{P = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k : f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0 \quad \forall f \in T\}$$

Osservazione 1. Sia $f \in A^{(n)}$ un polinomio e considerata l'applicazione polinomiale ad esso associata $\overline{f}$ associata ad esso, risulta

$$Z_a(f) = \overline{f}^{-1}(0).$$

Osservazione 2. Se $T \subset A^{(n)}$ un sottoinsieme di polinomi, si ha

$$Z_a(T) = \bigcap_{f \in T} Z_a(f).$$

Proposizione 1.2. *Siano S, $T \subset A^n$.*

$$S \subseteq T \Rightarrow Z_a(T) \subseteq Z_a(S)$$

Dim. Si consideri $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k$. Se $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in Z_a(T)$ allora

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0 \quad \forall f \in T$$

Se si consideri un polinomio $g \in S$, si ha:

$$g \in S \subseteq T \Rightarrow g \in T \Rightarrow g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0 \Rightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in Z_a(S).$$

Segue che $Z_a(T) \subseteq Z_a(S)$. $\square$

Se $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ è definita dalle equazioni

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \cdots, f_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

risulta che ogni polinomio del tipo

$$g = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_r f_r$$

con $h_1, h_2, \cdots, h_r \in A^{(n)}$ si annulla in tutti i punti di X. Infatti sia $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in X$, si ha

$$g(a_1, \cdots, a_n) = h_1(a_1, \cdots, a_n) f_1(a_1, \cdots, a_n) + \cdots + h_r(a_1, \cdots, a_n) f_r(a_1, \cdots, a_n) =$$

$$= h_1(a_1, \cdots, a_n) \cdot 0 + \cdots + h_r(a_1, \cdots, a_n) \cdot 0 = 0.$$

Tutti i polinomi g di questo tipo appartengono all'ideale generato dai polinomi $f_1, f_2, \ldots, f_r$. L'anello dei polinomi $A^{(n)} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ è noetheriano, quindi ogni suo ideale è finitamente generato e allora risulta che per ogni $I \subseteq A^{(n)}$ ideale esistono $f_1, f_2, \cdots, f_r \in A^{(n)}$ tale che $I = (f_1, f_2, \cdots, f_r)$. Quindi

$$Z_a(I) = Z_a(f_1, f_2, \cdots, f_r) = \{P = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k : f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, r\}$$

Da ciò ogni insieme algebrico è sempre descritto da un numero finito di equazioni.

Proposizione 1.3. *Sia $T \subset A^{(n)}$, allora*

$$Z_a(T) = Z_a((T))$$

Dim. Si ha $Z_a((T)) \subseteq Z_a(T)$. Infatti:

$$(a_1, \cdots, a_n) \in Z_a((T)) \Leftrightarrow \forall f \in (T)\, f(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

ma

$$T \subseteq (T) \Rightarrow \forall f \in T, f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \Rightarrow (a_1, \cdots, a_n) \in Z_a(T)$$

Si ha $Z_a((T)) \supseteq Z_a(T)$. Infatti:

$$(a_1, \cdots, a_n) \in Z_a(T) \Leftrightarrow \forall f \in T, f(a_1, \cdots, a_n) = 0.$$

Si ha che, per ogni $g \in (T)$, $g = \sum_{i=1}^n g_i f_i$ con $f_i \in T$ quindi

$$g(a_1, \cdots, a_n) = \sum g_i(a_1, \cdots, a_n) f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

poichè $f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0$, dunque $(a_1, \cdots, a_n) \in Z_a((T))$. $\square$

Premesso ciò, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.4. Un sottoinsieme X di $\mathbb{A}^n$ si dice un insieme algebrico affine se e solo se esiste un sottoinsieme $T \subset A^{(n)}$ tale che $X = Z_a(T)$.

Esempio 1.5. Si consideri $\mathbb{A}_k^n$ e $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un suo punto. Allora

$$Z_a(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\}.$$

Ogni punto di $\mathbb{A}_k^n$ è il luogo degli zeri di un sistema di polinomi, dunque è un insieme algebrico affine.

Si denoti con

$$\mathcal{C}_a^{(n)} = \{X \subseteq \mathbb{A}_k^n : X \text{ insieme algebrico affine } \}$$

la famiglia degli insiemi algebrici affini.

Teorema 1.6. $\mathcal{C}_a^{(n)}$ *costituisce una famiglia di chiusi per una topologia.*

Dim. Si ha $Z_a(1) = \varnothing$ e $Z_a((0)) = \mathbb{A}^n$. Dunque $\varnothing \in \mathcal{C}_a^{(n)}$ e $\mathbb{A}^n \in \mathcal{C}_a^{(n)}$.
Presi $X_1 \in \mathcal{C}_a^{(n)}$ e $X_2 \in \mathcal{C}_a^{(n)}$, si dimostra che $X_1 \cup X_2 \in \mathcal{C}_a^{(n)}$. Per definizione si ha

$$\exists T_1, T_2 \subset A^{(n)} : X_1 = Z_a(T_1) \text{ e } X_2 = Z_a(T_2)$$

e si dimostra che

$$X_1 \cup X_2 = Z_a(T_1) \cup Z_a(T_2) = Z_a(T_1 T_2)$$

dove $T = T_1 T_2 = \{f_1 f_2 : f_1 \in T_1, f_2 \in T_2\}$.
Se $P \in X_1 \cup X_2 \Rightarrow P \in X_1$ o $P \in X_2$. Supponiamo $P \in X_1$, ciò significa che

$$\forall f_1 \in T_1, f_1(P) = 0$$

Consideriamo $f \in T$, quindi $f = f_1 \cdot f_2$, e segue che

$$f(P) = (f_1 \cdot f_2)(P) = f_1(P) f_2(P) = 0 \cdot f_2(P) = 0.$$

Allora $P \in Z_a(T)$. Sia, adesso $P \in Z_a(T)$. Supponiamo che $P \notin X_1$, allora si dimostra che $P \in X_2$.

$$P \notin Z_1 \Rightarrow \exists f_1 \in F_1 : f_1(P) \neq 0.$$

D'altra parte $P \in Z_a(T)$ e quindi

$$\forall f_2 \in F_2 \ (f_1 \cdot f_2)(P) = f_1(P) \cdot f_2(P) = 0$$

e poiché i campi sono domini di integrità, $f_2(P) = 0$. Si avrà $P \in X_2$, ovvero $P \in X_1 \cup X_2$.
Infine se $\{Z_l = Z_a(T_l)\}_{l \in L}$ è una famiglia di elementi di $\mathcal{C}_a^{(n)}$, si ha

$$\bigcap_{l \in L} Z_l = Z_a\left(\bigcup_{l \in L} T_l\right). \qquad \square$$

Definizione 1.7. $(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{C}^{(n)}_a)$ si chiama topologia di Zariski di $\mathbb{A}^n$.

Osservazione 3. Dall'esempio (1.5) si ha che ogni punto $\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\}$ è un chiuso di $\mathbb{A}^n_k$.

Si fornisca un esempio di insieme algebrico:

Esempio 1.8. Sia $X = \{(t, t^2, t^3) \quad t \in k\} \subseteq \mathbb{A}^3_k$, ossia l'immagine dell'applicazione

$$\varphi \colon t \in \mathbb{A}^1_k \to (t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3_k$$

X è rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x & = t \\ y & = t^2 \\ z & = t^3 \end{cases}$$

Si ha che φ è un omeomorfismo di $\mathbb{A}^1_k$ su X. Infatti φ è biettiva, poiché è suriettiva per definizione, e iniettiva perchè se $t \neq t'$, allora $\left(t,\, t^2,\, t^3\right) \neq \left(t',\, t'^2,\, t'^3\right)$. φ è chiusa, perchè i chiusi di $\mathbb{A}^1_k$ sono gli insiemi finiti di punti, dunque anche le immagini sono insiemi finiti di punti. Dunque sono chiusi in $\mathbb{A}^3_k$ e quindi in X. Inoltre φ^{-1} è chiusa in quanto

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\left(X \,\cap\, Z_a(f)\right) &= \varphi^{-1}(X) \,\cap\, \varphi^{-1}\left(Z_a(f)\right) = \\ &= \left\{t \in {\mathbb{A}_k}^1 \mid g(t) = f\left(t, t^2, t^3\right) = 0\right\} = Z_a(g). \end{aligned}$$

X è un chiuso perchè $X = Z_a\left(x^2 - y, x^3 - z\right)$. X si dice cubica gobba affine.

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1.9. Un sottoinsieme non vuoto Y di X si dice irriducibile se non può essere espresso come unione di due sottoinsiemi chiusi propri, cioè

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \text{ con } Y_1 = \overline{Y}_1,\, Y_2 = \overline{Y}_2 \Rightarrow Y_1 = Y \text{ o } Y_2 = Y.$$

Un sottoinsieme Y di X non irriducibile si dice riducibile. Inoltre lo spazio affine $\mathbb{A}^n_k$ è uno spazio topologico dotato della topologia di Zariski, i cui chiusi sono gli insiemi algebrici. La definizione di sottoinsieme irriducibile di un generico spazio topologico, dunque può essere anche introdotto, parlando dello spazio topologico $(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{C}^{(n)}_a)$.

Definizione 1.10. Un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ è chiamato varietà affine se è un sottoinsieme irriducibile di $\mathbb{A}^n_k$, dotato della topologia di Zariski. Un sottoinsieme aperto di una varietà affine è detto varietà quasi-affine.

Sia X uno spazio topologico noetheriano.

Proposizione 1.11. *Ogni sottoinsieme chiuso non vuoto Y di X può essere espresso in maniera unica come unione finita di sottoinsiemi chiusi irriducibili:*

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$$

e tali che $Y_i \not\subseteq Y_j$ per $i \neq j$.

Dim. Sia $Y \subseteq X$. Qualora Y fosse irriducibile allora non vi è nulla da dimostrare. Sia invece Y riducibile, quindi

$$\exists Y_1, Y_1' \subset X : Y = Y_1 \cup Y_1'$$

con Y_1 e Y_1' chiusi propri di X e $Y_1 \subset Y$, rispettivamente $Y_1' \subset Y$. Se Y_1 e Y_1' sono entrambi irriducibili, allora si completa la dimostrazione. Supponiamo che Y_1' non sia irriducibile, dunque

$$\exists Y_2, Y_2' \subset X : Y_1' = Y_2 \cup Y_2'$$

con Y_2 e Y_2' chiusi propri di X e $Y_2 \subset Y_1'$, rispettivamente $Y_2' \subset Y_1'$. Si ha

$$Y = Y_1 \cup Y_1' = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_2'.$$

Se ciascuna delle Y_i sono irriducibili, segue l'asserto, altrimenti si itererà il discorso. Si otterrà

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n \cup \cdots .$$

Si dimostri che si tratti di un unione finita. Infatti, siccome

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_n \supset \cdots$$

rappresenta una catena discendente di sottoinsiemi chiusi dello spazio topologico X noetheriano, e, per la condizione di stazionarietà, segue

$$\exists n \in \mathbb{N} : Y_n = Y_m \quad \forall m \geq n.$$

Dunque l'asserto.
Si dimostri che tale espressione sia unica. Possiamo supporre $Y_i \not\subseteq Y_j$ per $i \neq j$ e si supponga esista un'altra decomposizione di Y.

$$Y = Y_1' \cup Y_2' \cup \cdots Y_n' = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots Y_n$$

Si prenda $Y_i' \subseteq Y$, allora è possibile esprimere

$$Y_i' = Y \cap Y_i' = (Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots Y_n) \cap Y_i' = \bigcup_{j=1}^{n} (Y_j \cap Y_i')$$

Essendo Y_i' irriducibile, e poiché è espresso come unione di sottoinsiemi chiusi propri $(Y_j \cap Y_i')$, allora, per definizione di irriducibilità si ha

$$Y_i' = Y_j \cap Y_i' \Rightarrow Y_i' \subseteq Y_j$$

Analogamente si procederà per Y_j e si avrà

$$Y_i' \subseteq Y_j \subseteq Y_l' \Rightarrow Y_i' = Y_l'.$$

Ma per ipotesi $Y_i' \nsubseteq Y_l'$, allora $Y_i' = Y_l'$ e quindi $Y_i' = Y_j$. $\square$

Le Y_i presenti nella decomposizione di Y prendono nome di componenti irriducibili. La proposizione (1.11) può essere riformulata anche introducendo gli insiemi algebrici, sfruttando il fatto che $\mathbb{A}_k^n$ sia uno spazio topologico, dotato della topologia di Zariski, noetheriano.

Proposizione 1.12. *Ogni insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ può essere espresso in maniera unica come unione finita di varietà affini.*

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{A}_k^n$.

Definizione 1.13. Si definisce $\mathcal{I}_a(X) = \{f \in A^{(n)} : f(P) = 0 \quad \forall P \in X\} \subseteq A^{(n)}$ l'ideale di $A^{(n)}$ associato all'insieme X.

Proposizione 1.14. *$\mathcal{I}_a(X)$ è un ideale di $A^{(n)}$.*

Dim. Siano $f, g \in \mathcal{I}_a(X)$, allora $f(P) = 0 = g(P)$ per ogni $P \in X$. Dunque

$$(f+g)(P) = f(P) + g(P) = 0 + 0 = 0 \quad P \in X$$

e si ha che $f + g \in \mathcal{I}_a(X)$. Sia ora $f \in \mathcal{I}_a(X)$ e $h \in A^{(n)}$. Il polinomio f si annulla in ogni punto di X.

$$(f \cdot h)(P) = f(P) \cdot h(P) = 0 \cdot h(P) = 0 \quad \forall P \in X$$

e si ha $f \cdot h \in \mathcal{I}_a(X)$. $\square$

Esempio 1.15. Risulta:

- $\mathcal{I}_a(\varnothing) = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$;
- $\mathcal{I}_a(\mathbb{A}_k^n) = (0)$;
- $\mathcal{I}_a(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2 \cdots, x_n - a_n)$.

Proposizione 1.16. *$\mathcal{I}_a(X)$ è un ideale radicale.*

Dim. Già è provato che $\mathcal{I}_a(X) \subseteq \sqrt{\mathcal{I}_a(X)}$. Sia $f \in \sqrt{\mathcal{I}_a(X)}$, allora

$$\exists m \in \mathbb{N} : f^m \in \mathcal{I}_a(X)$$

dunque

$$f^m(P) = 0 \quad \forall P \in X \Rightarrow f(P) = 0 \quad \forall P \in X \Rightarrow f \in \mathcal{I}_a(X). Seguebanalmentel'asserto. \square$$

Per gli ideali associati dell'anello dei polinomi valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 1.17. *Siano* $X_1, X_2 \subseteq {\mathbb{A}_k}^n$*, allora:*

1. $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \mathcal{I}_a(X_1) \supseteq \mathcal{I}_a(X_2)$;
2. $\mathcal{I}_a(X_1 \cup X_2) = \mathcal{I}_a(X_1) \cap \mathcal{I}_a(X_2)$;
3. $\mathcal{I}_a(X_1 \cap X_2) = \sqrt{\mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)}$.

Sia $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$*, allora:*

4. $Z_a\left(\mathcal{I}_a(X)\right) = \overline{X}$.

Dim. Si dimostri la (1). Sia

$$f \in \mathcal{I}_a(X_2) \Rightarrow f(P) = 0 \quad \forall P \in X_2.$$

Si consideri $Q \in X_1 \subseteq X_2$, allora

$$Q \in X_2 \Rightarrow f(Q) = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{I}_a(X_1).$$

Per la (2) si procede dimostrando la doppia inclusione: sia

$$P \in X_1 \cup X_2 \Rightarrow P \in X_1 \text{ o } P \in X_2.$$

Supponiamo $P \in X_1$ e sia

$$f \in \mathcal{I}_a(X_1) \cap \mathcal{I}_a(X_2) \Rightarrow f \in \mathcal{I}_a(X_1) \text{ e } f \in \mathcal{I}_a(X_2).$$

Essendo $P \in X_1$, allora $f(P) = 0$ e dunque

$$f \in \mathcal{I}_a(X_1 \cup X_2) \Rightarrow \mathcal{I}_a(X_1) \cap \mathcal{I}_a(X_2) \subseteq \mathcal{I}_a(X_1 \cup X_2).$$

Inoltre, sfruttando la proprietà (1):

$$X_1 \subseteq X_1 \cup X_2 \text{ e } X_2 \subseteq X_1 \cup X_2 \Rightarrow \mathcal{I}_a(X_1 \cup X_2) \subseteq \mathcal{I}_(X_1) \text{ e } \mathcal{I}_a(X_1 \cup X_2) \subseteq \mathcal{I}_a(X_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}_a(X_1 \cup X_2) \subseteq \mathcal{I}_a(X_1) \cap \mathcal{I}_a(X_2)$$

e segue l'asserto. Si dimostri il punto (3): sia $h \in \sqrt{\mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)}$, dunque

$$\exists n \in \mathbb{N} : h^n \in \mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)$$

cioè

$$\exists f \in \mathcal{I}_a(X_1), g \in \mathcal{I}_a(X_2) : h^n = f + g$$

Sia ora considerato $P \in X_1 \cap X_2$, quindi $P \in X_1$ e $P \in X_2$. Allora, tenendo in considerazione che $f \in \mathcal{I}_a(X_1)$ e $g \in \mathcal{I}_a(X_2)$:

$$h^n(P) = f(P) + g(P) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow h(P) = 0 \Rightarrow h \in \mathcal{I}_a(X_1 \cap X_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)} \subseteq \mathcal{I}_a(X_1 \cap X_2).$$

Viceversa:

$h \in \mathcal{I}_a(X_1 \cap X_2) \Rightarrow h(P) = 0 \quad \forall P \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow h(P) = 0 \quad P \in X_1$ e $P \in X_2$

Siano $f \in \mathcal{I}_a(X_1)$ e $g \in \mathcal{I}_a(X_2)$, poiché $P \in X_1$ e $P \in X_2$, si ha $f(P) = 0$ e $g(P) = 0$. In conclusione

$$h(P) = 0 = 0 + 0 = f(P) + g(P)$$

in particolare $0 = h^n(P) = f(p) + g(P)$, per qualche $n \in \mathbb{N}$. Segue che

$$h \in \sqrt{\mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)} \Rightarrow \mathcal{I}_a(X_1 \cap X_2) \subseteq \sqrt{\mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathcal{I}_a(X_1) + \mathcal{I}_a(X_2)} = \mathcal{I}_a(X_1 \cap X_2).$$

Per quanto riguarda il punto (4), si ha, prima di tutto, che $X \subseteq Z_a(\mathcal{I}_a(X))$. Infatti, considerato $P \in X$, bisogna dimostrare che $f(P) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{I}_a(X)$. Ma dire che $f \in \mathcal{I}_a(X)$ significa che $f(Q) = 0$ per ogni $Q \in X$, in particolare $f(P) = 0$. Dunque $P \in Z_a(\mathcal{I}_a(X))$. Essendo per ipotesi X un insieme algebrico, per definizione

$$\exists T \subset A^{(n)} : X = Z_a(T)$$

Sia $f \in T$ e $P \in Z_a(T)$, si ha per definizione $f(P) = 0$, quindi $f \in \mathcal{I}_a(Z_a(T))$, cioè $T \subseteq \mathcal{I}_a(Z_a(T))$ e applicando la proposizione (1.2):

$$Z_a(\mathcal{I}_a(Z_a(T))) \subseteq Z_a(T)$$

ovvero

$$X \subseteq Z_a(\mathcal{I}_a(X)) \subseteq X \Rightarrow Z_a(\mathcal{I}_a(X)) = X. \qquad \square$$

Osservazione 4. La noetherianità dello spazio topologico $(\mathbb{A}_k^n, \mathcal{C}_a^{(n)})$ si può dimostrare sfruttando gli ideali di $A^{(n)}$ associati. Infatti, data una catena discendente di sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{A}_k^n$

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \cdots .$$

Si consideri i rispettivi ideali associati che saranno nella seguente relazione

$$\mathcal{I}_a(X_1) \subseteq \mathcal{I}_a(X_2) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_a(X_n) \subseteq \cdots .$$

Quest'ultima rappresenta una catena ascendente di ideali dell'anello dei polinomi $A^{(n)} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, che per il corollario (**??**) è noetheriano. Dunque tale catena è stazionaria, cioè

$$\exists n \in \mathbb{N} : \mathcal{I}_a(X_n) = \mathcal{I}_a(X_m) \quad \forall m \geq n.$$

Da qui la catena $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \cdots$ sarà anch'essa stazionaria.

Siano considerati i seguenti insiemi:

$$\Im = \{I \subseteq A^{(n)} : I \text{ ideale } \}$$

$$\mathcal{C}_a^{(n)} = \{X \subseteq \mathbb{A}_k^n : X \text{ insieme algebrico affine } \}.$$

Si possono considerare le seguenti mappe:

$$\begin{aligned} Z_a : \Im \to \mathcal{C}_a^{(n)} \qquad & I \to Z_a(I) \\ \mathcal{I}_a : \mathcal{C}_a^{(n)} \to \Im \qquad & X \to \mathcal{I}_a(X). \end{aligned}$$

In generale le due mappe non sono una inversa dell'altra, infatti vi è un controesempio che lo dimostra:

Esempio 1.18. Sia $A = K[x]$ e sia $I = (x^n)$ con $n \geq 2$. Allora

$$Z_a(I) = Z_a(x^n) = \{0\} \subseteq \mathbb{A}_k^1 \text{ e } \mathcal{I}_a(Z_a(I)) = (x) \Rightarrow I \subset \mathcal{I}_a(Z_a(I)).$$

Tuttavia si ha la biezione nel caso in cui ci si restringe a considerare gli ideali radicali. Difatti il teorema che segue, assicura che vi è una corrispondenza biunivoca tra le varietà e gli ideali primi, i quali sono anche radicali.

Teorema 1.19. *Sia $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$, allora*

$$X \text{ varietà affine } \Leftrightarrow \mathcal{I}_a(X) \text{ primo}$$

Dim. $\Rightarrow$) Se per assurdo $\mathcal{I}_a(X)$ non è un ideale primo, allora

$$f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}_a(X) \Rightarrow f_1 \notin \mathcal{I}_a(X) \text{ e } f_2 \notin \mathcal{I}_a(X).$$

Siano considerate le due varietà $Z_a(f_1)$ e $Z_a(f_2)$ e siano indicate

$$X_1 = X \cap Z_a(f_1) \text{ e } X_2 = X \cap Z_a(f_2)$$

con $X_1, X_2 \subseteq X$. Se $P \in X$, si prendano in considerazione due eventualità:

1°) $f_1(P) = 0 \Rightarrow P \in Z_a(f_1) \Rightarrow P \in X_1$;
2°) se $f_1(P) \neq 0$, poiché $P \in X$ e $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}_a(X)$, allora

$$(f_1 \cdot f_2)(P) = f_1(P) \cdot f_2(P) = 0 \Rightarrow f_2(P) = 0 \Rightarrow P \in Z_a(f_2) \Rightarrow P \in X_2.$$

In ogni caso $P \in X_1 \cup X_2$ e cioè $X \subseteq X_1 \cup X_2$. Viceversa, se $P \in X_1 \cup X_2$ è ovvio che $P \in X$ e dunque risulta che $X = X_1 \cup X_2$, con $X_1, X_2 \subseteq X$ chiusi propri di X, contro il fatto che X in particolare si irriducibile.
$\Leftarrow$) Se per assurdo X fosse un insieme algebrico riducibile, allora

$$\exists X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}_k^n : X = X_1 \cup X_2$$

con $X_1 = \overline{X_1}$ e $X_2 = \overline{X_2}$. Ma dire ciò significa $\mathcal{I}_a(X) \subset \mathcal{I}_a(X_1)$ e $\mathcal{I}_a(X) \subset \mathcal{I}_a(X_2)$, rispettivamente cioè

$$\exists f_1 \in \mathcal{I}_a(X_1) : f_1 \notin \mathcal{I}_a(X) \text{ e } \exists f_2 \in \mathcal{I}_a(X_2) : f_2 \notin \mathcal{I}_a(X)$$

ma $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}_a(X)$, in quanto, preso $P \in X$, si ha

$$P \in X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow P \in X_1 \text{ o } P \in X_2$$

e

$$(f_1 \cdot f_2)(P) = f_1(P) \cdot f_2(P) = 0 \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}_a(X)$$

contro il fatto che $\mathcal{I}_a(X)$ sia primo. $\square$

Si dimostrerà un importante teorema, chiamato teorema di Hilbert, che consentirà di poter stabilire una biezione tra le varietà e gli ideali radicali. La dimostrazione procederà per gradi, in quanto lunga e complessa. Si considererà d'ora in poi un campo k algebricamente chiuso.

Lemma 1.20. *Sia R un anello Noetheriano e $S \supset R$ un sottoanello dell'anello dei polinomi $R[x_1, \ldots, x_n]$. Se $R[x_1, \ldots, x_n]$ è finitamente generato come $S-$modulo, allora S stesso è una $R-$ algebra finitamente generata.*

Dim. Siano $y_1, \ldots, y_m \in R[x_1, \ldots, x_n]$ generatori di $R[x_1, \ldots, x_n]$ come $S-$modulo, si avrà:

$$x_i = \sum a_{i,j} \cdot y_j$$

e analogamente

$$y_i \cdot y_j = \sum b_{i,j,k} \cdot y_k$$

con $a_{i,j}$, $b_{i,j,k} \in S$. Sia S_0 il sottoanello generato su R dai coefficienti $a_{i,j}$ e $b_{i,j,k}$, essendo finitamente generato su R, S è anch'esso noetheriano. Da queste relazioni, gli elementi $y_1, \ldots, y_m$ generano $R[x_1, \ldots, x_n]$ come S_0-modulo. Ma un sottomodulo di un modulo finitamente generato su un anello noetheriano è ancora finitamente generato; allora S è un S_0-modulo finitamente generato e quindi un $R-$algebra finitamente generata. $\square$

Lemma 1.21. *Ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ in $A^{(n)}$ è della forma $(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$, per qualche $a_1, \ldots, a_n \in K$.*

Dim. Si noti prima di tutto quanto segue:

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \Leftrightarrow L = \frac{k[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{m}} = k \Leftrightarrow L \text{ algebrico su } K$$

essendo k un campo algebricamente.

Si consideri il campo estensione $L = \dfrac{K[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{m}}$ di K. Si può, dopo aver riordinato le x_i, assumere che $x_1, \ldots, x_k \in K$ siano algebricamente indipendenti su K, con $x_{k+1}, \ldots, x_n$ algebrici sul sottocampo $K(x_1, \ldots, x_k) \subset L$. Poichè L è un $K(x_1, \ldots, x_k)-$modulo finitamente generato, possiamo applicare il lemma (1.20) per dedurre che l'estensione puramente trascendente

$K(x_1,\ldots,x_k)$ è una $K-$algebra finitamente generata. Dimostriamo come si arriva ad una contraddizione. Siano $z_1,\ldots,z_l \in L$ un sistema di generatori di $K(x_1,\ldots,x_k)$ come $K-$algebra, scriviamo $z_i = \dfrac{P_i(x_1,\ldots,x_k)}{Q_i(x_1,\ldots,x_k)}$ per qualche sistema di polinomi P_i, Q_i. Ora sia $f \in K[x_1,\ldots,x_k]$ un polinomio irriducibile. Per ipotesi, possiamo scrivere $\frac{1}{f}$ come un polinomio nelle funzioni razionali z_i; i denominatori, possiamo supporre che f deve dividere almeno uno dei polinomi Q_i. Ciò implica che in particolare ci sono solo un numero finito di polinomi irriducibili in $K[x_1,\ldots,x_k]$. Ma l'anello $K[x_1,\ldots,x_k]$ contiene un numero infinito di polinomi irriducibili (ciò è vero per ogni campo K; nel nostro caso, poichè K è necessariamente infinito, si possono esibire i polinomi $\{x-a\}_{a\in K}$). Si può dedurre che $charK = 0$, cioè L è algebrico su K e quindi uguale a K. $\square$

Teorema 1.22 (Teorema di Hilbert in forma debole). *Sia $I \subset K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ un ideale proprio, allora $Z_a(I) \neq \emptyset$.*

Dim. Sia $I \subset A^{(n)}$ un ideale proprio. Essendo $A^{(n)}$ un anello noetheriano si ha che ogni suo ideale è propriamente contenuto in un ideale massimale e quindi:

$$\exists \mathfrak{m} \subset A^{(n)} \text{ ideale } : I \subset \mathfrak{m} \Rightarrow Z_a(\mathfrak{m}) \subset Z_a(I).$$

e se $Z_a(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ risulta che anche $Z_a(I) \neq \emptyset$. Quindi tutto si riduce a dimostrare il teorema per gli ideali massimali, ma, per il lemma (1.21), l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ è $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \cdots, x_n - a_n)$ e dunque

$$Z_a(\mathfrak{m}) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\}.$$

Segue banalmente l'asserto. $\square$

Teorema 1.23 (Teorema degli zeri di Hilbert). *Sia $I \subseteq A^{(n)} = K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ allora*

$$\sqrt{I} = \mathcal{I}_a(Z_a(I))$$

Dim. Si procede dimostrando la doppia inclusione. Sia $f \in \sqrt{I}$, allora

$$\exists n \in \mathbb{N} : f^n \in I.$$

Sia $P \in Z_a(I)$, quindi

$$f^n(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow f \in \mathcal{I}_a(Z_a(I)) \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}_a(Z_a(I)).$$

Si dimostri l'altra inclusione. Essendo $A^{(n)}$ un anello noetheriano, allora ogni suo ideale è finitamente generato, dunque se I è un suo ideale, si ha

$$\exists f_1, f_2, \cdots, f_n \in A^{(n)} : I = (f_1, f_2, \cdots, f_n).$$

Sia $f \in \mathcal{I}_a(Z_a(I))$ e sia costruito un ideale $J \subseteq K[x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}]$ generato dai polinomi $f_1, f_2, \cdots, f_n, x_{n+1}f - 1$

$$J = (f_1, f_2, \cdots, f_n, x_{n+1}f - 1) \subseteq A^{(n+1)}$$

Sia considerata la varietà affine associata all'ideale J.

$$Z_a(J) = Z_a(f_1, f_2, \cdots, f_n, x_{n+1}f - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}.$$

Sia preso un punto $(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}_k^{n+1}$ e si distinguano due casi:

1°) Se $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in Z_a(I) = Z_a(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ allora

$$f_1(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f_2(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \cdots = f_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0.$$

Considerato il polinomio $x_{n+1}f-1$ e lo si valuti sul punto $(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1})$:

$$a_{n+1}f(a_1, a_2, \cdots, a_n)-1 = a_{n+1}\cdot 0-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \notin Z_a(J).$$

2°) Se $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \notin Z_a(I)$, allora

$$\exists \bar{i} : f_{\bar{i}}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0 \Rightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \notin Z_a(J)$$

In entrambi i casi risulta $Z_a(J) = \emptyset$ e per il teorema (1.22) $J = A^{(n+1)}$ ed essendo K un campo algebricamente chiuso, si ha $1 \in J$. Da ciò segue:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})f_i + h(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})(x_{n+1}f - 1)$$

Si effettui un cambio di variabili ponendo $y = \dfrac{1}{x_{n+1}}$ e lo si può sostituire nell'espressione

$$1 = \sum_{i=1}^{n} g_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{1}{y}\right) f_i + h\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{y}f - 1\right)$$

Si moltiplichi in entrambi i membri per y^n, per elidere il denominatore:

$$y^n = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)f_i + \overline{h}(x_1, x_2, \cdots, x_n)(f - y)$$

e sostituendo $f = y$, si ha:

$$f^n = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)f_i + \overline{h}(x_1, x_2, \cdots, x_n)(f - f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^n = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)f_i \Rightarrow f^n \in I = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \Rightarrow f \in \sqrt{I}$$

Segue la tesi banalmente. $\square$

Osservazione 5. Sia I un ideale di $A^{(n)}$ allora:

$$I = \sqrt{I} \Rightarrow I = \mathcal{I}_a(Z_a(I)).$$

Infatti applicando il teorema di Hilbert si ha

$$I = \sqrt{I} = \mathcal{I}_a(Z_a(I)).$$

2 Varietà proiettive

Sia $\mathbb{A}_k^{n+1} - \{\underline{0}\}$ lo spazio affine numerico $(n+1)$-dimensionale, privato del vettore nullo. Definiamo la relazione d'equivalenza di proporzionalità:

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{A}_k^{n+1} - \{\underline{0}\} \quad \underline{x} \sim \underline{y} \Leftrightarrow \exists\, t \in k^* : \underline{x} = t\underline{y} \tag{1}$$

L'insieme quoziente $\dfrac{\mathbb{A}_k^{n+1} - \{\underline{0}\}}{\sim}$ si denota con $\mathbb{P}_k^n$ e si dice spazio proiettivo numerico n–dimensionale su k.

$$\mathbb{P}_k^n = \{[a_0, a_1, \cdots, a_n]_\sim : a_0, a_1, \cdots, a_n \in k\}$$

Sia $S^{(n)} = K[x_0, \ldots, x_n]$, tale anello si può rivedere come anello graduato. Per ogni $d \in \mathbb{N}$ poniamo

$$S_d^{(n)} = \left\{ f \in S^{(n)} : f \text{ polinomio omogeneo di grado d} \right\}.$$

Definiamo

$${}^h S^{(n)} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} S_d^{(n)}$$

cioè l'unione degli elementi omogenei di ogni grado. Inoltre ogni polinomio $f \in S^{(n)}$ si può decomporre nel seguente modo:

$$\exists f_0, f_1, \cdots, f_d \in S^{(n)} : f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$$

dove $f_0, f_1, \cdots, f_d$ sono denominati componenti omogenee del polinomio f, di gradi rispettivamente $0, 1, \cdots, d$.

Sia ora $f \in^h S^{(n)}$ un polinomio omogeneo e sia $P = [\underline{a}] \in \mathbb{P}_k^n$ un punto.

Definizione 2.1. Il punto P si dice essere uno zero di f se $f(P) = 0$ ovvero $f(\underline{a}) = 0$.

La definizione è ben posta per l'omogeneità del polinomio. Infatti dato un punto $P = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{P}_k^n$ non si può definire l'espressione $F(a)$ come $F(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$, poiché dipende dalla scelta del vettore rappresentante la classe di proporzionalità $[(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)]_\sim$. Un rappresentante del vettore della classe $[(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)]_\sim$ è del tipo $(\mu a_0, \mu a_1, \mu a_2, \cdots, \mu a_n)$ con $\mu \neq 0$, dunque, se f è un polinomio omogeneo di grado d :

$$0 = f(\mu a_0, \mu a_1, \mu a_2, \cdots, \mu a_n) = \mu^d f(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

e allora

$$f(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0 \Rightarrow f(\mu a_0, \mu a_1, \mu a_2, \cdots, \mu a_n) = 0.$$

Premesso ciò si fornisce la seguente definizione:

Definizione 2.2. Sia f un polinomio omogeneo. Il sottoinsieme

$$Z_p(f) = \{P \in \mathbb{P}^n_k : f(P) = 0\}$$

di $\mathbb{P}^n_k$ si dice insieme degli zeri di f. Piú in generale si può considerare un insieme $T \subset^h S^{(n)}$ di polinomi omogenei e il suo luogo degli zeri:

$$Z_p(T) = \{P \in \mathbb{P}^n_k : f(P) = 0 \quad \forall f \in T\}.$$

Osservazione 6. Se $T \subset^h S^{(n)}$ un sottoinsieme di polinomi omogenei, si ha

$$Z_p(T) = \bigcap_{f \in T} Z_p(f).$$

Le considerazioni fatte relativo al caso affine, si ripetono anche nel caso proiettivo, con la sola differenza che dobbiamo limitarci all'ideale generato dai polinomi omogenei. Infatti vale la seguente proposizione la cui dimostrazione riprende ciò che è stato trattato nel caso affine.

Proposizione 2.3. *Sia $T \subset S^{(n)}$, allora*

$$Z_p(T) = Z_p\left(\left({}^hT\right)\right)$$

con ${}^hT = T \cap^h S^{(n)}$.

Dalla proposizione (2.3), segue

$$\exists f_1, \cdots, f_m \in^h S^{(n)} : ({}^hT) = (f_1, \cdots, f_m)$$

e dunque risulta

$$Z_p(T) = Z_p(({}^hT)) = Z_p(f_1, \cdots, f_m) = \{P \in \mathbb{P}^n_k : f_i(P) = 0 \quad i = 1, \cdots, m\}.$$

Proposizione 2.4. *Siano $S, T \subset^h S^{(n)}$, allora*

$$S \subseteq T \Rightarrow Z_p(S) \supseteq Z_p(T).$$

Dim. Segue il medesimo procedimento del caso affine. □

Definizione 2.5. Un sottoinsieme X di $\mathbb{P}^n_k$ si dice un insieme algebrico proiettivo se e solo se esiste un sottoinsieme $T \subseteq^h S^{(n)}$ tale che $X = Z_p(T)$.

Esempio 2.6. Si consideri $\mathbb{P}^n_k$ e $P = [a_0, a_1, \cdots, a_n] \in \mathbb{P}^n_k$ con $a_i \neq 0$, allora risulta

$$Z_p(a_i x_0 - a_0 x_i, \cdots, a_i x_n - a_n x_i) = \{P\}.$$

Si denoti con

$$\mathcal{C}^{(n)}_p = \{X \subseteq \mathbb{P}^n_k : X \text{ insieme algebrico proiettivo } \}$$

la famiglia degli insiemi algebrici proiettivi.

Teorema 2.7. $\mathcal{C}_p^{(n)}$ *costituisce una famiglia di chiusi per una topologia.*

Definizione 2.8. $\left(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{C}_p^{(n)}\right)$ definisce la topologia di Zariski di $\mathbb{P}^n$.

Osservazione 7. Dall'esempio (2.6) si ha che ogni punto $P = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ è un chiuso di $\mathbb{P}_k^n$.

Ciò che segue è un analogo della definizione di componenti irriducibili, lavorando nell'ambiente proiettivo: infatti sia $\mathbb{P}_k^n$ lo spazio topologico, dotato della topologia di Zariski $\mathcal{C}_p^{(n)}$, i cui chiusi sono gli insiemi algebrici proiettivi, e sia $\emptyset \neq X \subset \mathbb{P}_k^n$, allora il sottoinsieme X si dirà essere irriducibile, qualora non può essere espresso come unione di due sottoinsiemi chiusi propri, cioè:

$$X = X_1 \cup X_2 \text{ con } X_1, X_2 \in \mathcal{C}_p^{(n)} \Rightarrow X = X_1 \text{ o } X = X_2.$$

Definizione 2.9. Un insieme algebrico proiettivo $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ è chiamato varietà proiettiva se è irriducibile in $\mathbb{P}_k^n$, dotato della topologia di Zariski. Un sottoinsieme aperto di una varietà proiettiva è detto varietà quasi-proiettiva.

Proposizione 2.10. *Ogni insieme algebrico proiettivo $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ può essere espresso in maniera unica come unione finita di varietà proiettive.*

Dim. La dimostrazione è analoga alla dimostrazione della proposizione (1.11). □

Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{P}_k^n$.

Definizione 2.11. Si definisce $\mathcal{I}_p(X) = \{f \in^h S^{(n)} : f(P) = 0 \quad \forall P \in X\} \subseteq S^{(n)}$ l'ideale omogeneo di $S^{(n)}$ associato all'insieme X.

Esempio 2.12. Risulta:

- $\mathcal{I}_p(\varnothing) = S^{(n)}$;
- $\mathcal{I}_p(\mathbb{P}_k^n) = (0)$.

Analogo al caso affine, valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 2.13. *Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{P}_k^n$, allora:*

1. $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \mathcal{I}_p(X_1) \supseteq \mathcal{I}_p(X_2)$;
2. $\mathcal{I}_p(X_1 \cup X_2) = \mathcal{I}_p(X_1) \cap \mathcal{I}_p(X_2)$.

Sia $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$, allora:

4. *X insieme algebrico proiettivo* $\Leftrightarrow Z_p(\mathcal{I}_p(X)) = X$.

Osservazione 8. Lo spazio topologico $\mathbb{P}_k^n$ dotato della topologia di Zariski è uno spazio topologico noetheriano e la noetherianità è garantita come nel caso affine.

Si fornisca un esempio di insieme algebrico proiettivo:

Esempio 2.14. Consideriamo ora l'applicazione:

$$\psi\colon\ [\lambda,\,\mu]\in\mathbb{P}^1\to\left[\lambda^3,\,\lambda^2\mu,\,\lambda\mu^2,\,\mu^3\right]\in\mathbb{P}^3$$

che è un omeomorfismo di $\mathbb{P}^1$ sulla sua immagine. Infatti ψ è ben posta, è biettiva, è continua e chiusa. Si ha $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)=Z\cup\{P\}$, dove $P=[(0,\,0,\,0,\,1)]$ è il punto all'infinito dell'asse x_3. Infatti $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)=\left(\psi\left(\mathbb{P}^1\right)\cap\mathbb{A}^3\right)\cup\psi\left(\mathbb{P}^1\right)\cap(H_0)$. I punti di $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)\cap\mathbb{A}^3$ sono del tipo $\left[1,\mu,\,\mu^2,\,\mu^3\right]$ quindi di $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)\cap\mathbb{A}^3=Z$; i punti di $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)\cap H_0$ sono del tipo $\left[0,0,\,0,\,\mu^3\right]$. D'altra parte $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)$ è chiuso. Si prova che $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)=Z_p\left(x_1x_3-x_2^2,\,x_1x_2-x_0x_3,\,x_0x_2-x_1^2\right)$ ciò ha per equazione i minori di ordine due della matrice. Siano f_0,f_1,f_2 tali che:

$$A=\begin{Vmatrix}x_o & x_1 & x_2\\ x_1 & x_2 & x_3\end{Vmatrix}$$

ha equazione matriciale $rgA<2$. Dimostriamo che

$$Z_p\left(f_0,\,f_1,\,f_2\right)=\left(Z_p\left(f_0,\,f_1,\,f_2\right)\cap\mathbb{A}^3\right)\cup\left(Z_p\left(f_0,\,f_1,\,f_2\right)\cap H\right)=Z\cup P=\psi\left(\mathbb{P}^1\right)$$

Infatti $Z_p\left(f_0,\,f_1,\,f_2\right)\cap\mathbb{A}^3$ si ottiene sapendo che $x_0=1$, quindi si ha

$$rg\begin{Vmatrix}1 & x_1 & x_2\\ x_1 & x_2 & x_3\end{Vmatrix}=1$$

cioè il luogo in cui le righe sono proporzionali, cioè esiste $t\in K$ tale che $(x_1,\,x_2,\,x_3)=t\,(1,\,x_1,\,x_2)$.
Quindi è il luogo di equazioni parametriche

$$\begin{cases}x_1 & =t\\ x_2 & =tx_1=t^2\\ x_3 & =tx_2=t^3\end{cases}$$

cioè Z.
Ponendo $x_0=0$ si ottiene $Z_p\left(f_o,\,f_1,\,f_2\right)\cap H_0$ e quindi si ottiene P. Si prova che $\psi\left(\mathbb{P}^1\right)=\overline{Z}$. $\overline{Z}$ si dice cubica gobba proiettiva. Si prova che

1. $\mathcal{I}_a(Z)=(f,\,g)$, dove $f=x_1^2-x_2$, $g=x_1^3-x_3$;

2. $\mathcal{I}_p(Z)\neq(\beta(f),\,\beta(g))$.
   Dunque $(f,\,g)$ non è una "base standard". Si osservi infatti che

   $$\frac{A^{(3)}}{(f,\,g)}\cong A^{(1)}$$

   l'isomorfismo esplicito è:

   $$\phi\colon\,l\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)\in A^{(3)}+(f,g)\to\phi\left(x_1,x_1^2,x_1^3\right)\in A^{(1)}.$$

   $A^{(1)}$ è un dominio di integrità, quindi $(f,\,g)$ è primo e dunque radicale.

3. Dimostriamo che $\beta(f)$ e $\beta(g)$ non definiscono $\overline{Z}$ e quindi non lo generano. Infatti $Z_p\left(\beta(f),\, \beta(g)\right) = \overline{Z} \cup Z_p\left(x_0,\, x_1\right)$, con

$$\beta(f) = \beta\left(x_1^2 - x_2\right) = x_0^2\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \frac{x_2}{x_0}\right) = x_1^2 - x_0x_2$$

$$\beta(g) = \beta\left(x_1^3 - x_3\right) = x_0^3\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3 - \frac{x_3}{x_0}\right) = x_1^3 - x_0^2x_3$$

Consideriamo

$$\begin{cases} x_1^2 - x_0x_2 & = 0 \\ x_1^3 - x_0^2x_3 & = 0 \end{cases}$$

le soluzioni sono i punti di $\overline{Z}$ e i punti del tipo $[(0,\, 0,\, h,\, k)]$ di $Z_p\left(x_0,\, x_1\right)$.

Siano considerati i seguenti insiemi:

$$\Im = \{I \subseteq S^{(n)} : I \text{ ideale }\}$$

$$\mathcal{C}_p^{(n)} = \{X \subseteq \mathbb{P}_k^n : X \text{ insieme algebrico proiettivo }\}.$$

Siano considerate le seguenti applicazioni:

$$\begin{aligned} Z_p &: \Im \to \mathcal{C}_p^{(n)} \qquad I \to Z_p(I) \\ \mathcal{I}_p &: \mathcal{C}_p^{(n)} \to \Im \qquad X \to \mathcal{I}_p(X) \end{aligned}$$

In particolare si ha una corrispondenza tra le varietà proiettiva $X \subset \mathbb{P}^n$ e gli ideali omogenei $I \subset S^{(n)}$ e diventa al piú una biezione quando ci restringiamo agli ideali radicali. Bisogna escludere l'ideale radicale $S_+^{(n)}$. Infatti risulta:

$$S_+^{(n)} = (x_0, \ldots, x_n) \Rightarrow Z_p(S_+^{(n)}) = \varnothing \Rightarrow I_p(\varnothing) = S^{(n)}.$$

Ma $S_+^{(n)}$ è un ideale massimale, dunque radicale di $S^{(n)}$. Pertanto l'applicazione Z_p non è suriettiva nell'insieme degli ideali radicali.

Proposizione 2.15. *Sia $I \subseteq S^{(n)}$ un ideale omogeneo, allora sono equivalenti le affermazioni:*

1. $Z_p\left(I\right) = \varnothing$
2. $\sqrt{I} = S^{(n)}$ *o* $\sqrt{I} = S_+^{(n)}$
3. $\exists\, d \in \mathbb{N} - \{0\} : S_d^{(n)} \subseteq I.$

Dim. Sia $p : \mathbb{A}_k^{n+1} - \{\underline{0}\} \to \mathbb{P}_k^n$ tale che $Z_p(f) = p(Z_a(f)) - \{\underline{0}\}$, in particolare $Z_p(I) = p(Z_a(I)) - \{\underline{0}\}$.
1) $\Rightarrow$ 2). $Z_a(I) = \emptyset$ oppure $Z_a(I) = \{\underline{0}\}$. Si ha $\sqrt{I} = \mathcal{I}_a(Z_a(I))$. Ma $\mathcal{I}_a(\emptyset) = S^{(n)}$ oppure $\mathcal{I}_a(\{\underline{0}\}) = S_+^{(n)}$. Dunque si ha la (2).
2) $\Rightarrow$ 3). Se $\sqrt{I} = S^{(n)}$ allora $I = S^{(n)}$ e vale la (3). Se $\sqrt{I} = S_+^{(n)}$, esistono interi positivi $i_0, \dots, i_n$ tale che $x_j^{ij} \in I$, $j = 0, \dots, n$. Se $d \geq i_0 + \cdots + i_n$, ogni monomio di grado d in $x_0, \dots, x_n$ appartiene a I, e vale la (3).
3) $\Rightarrow$ 1). È ovvio. $\square$

Allo scopo di ottenere un teorema analogo al (1.23), diamo prima il seguente teorema:

Teorema 2.16. *Se $I \subseteq S^{(n)}$ è un ideale omogeneo e se $f \in S^{(n)}$ è un polinomio omogeneo non costante tale che $Z_p(f) \supseteq Z_p(I)$ allora $f \in \sqrt{I}$.*

Dim. Stanti le ipotesi su f, si ha $Z_a(f) = p^{-1}(Z_p(f) \cup \{\underline{0}\})$. Dunque $Z_a(f) \supseteq Z_a(\mathcal{I})$ e quindi per il teorema (1.23) si ha l'asserto. $\square$

Definizione 2.17. Un insieme algebrico affine $X \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$ è chiamato cono se valgono le seguenti proprietà:

1. $X \neq \varnothing$;
2. $(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in X \Rightarrow (\mu x_0, \mu x_1, \cdots, \mu x_n) \in X \quad \forall \mu \in K$.

Sia $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un insieme algebrico proiettivo, allora l'insieme

$$C(X) = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{P}_k^n : (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in X\} \cup \{0\}$$

è chiamato il cono su X.

La definizione di cono fornita ci è utile, in quanto semplifica la dimostrazione del teorema degli zeri di Hilbert nell'ambiente proiettivo. Dapprima si dimostrino i seguenti lemmi.

Lemma 2.18. *Sia $I \subset S^{(n)}$ un ideale omogeneo. Allora*

$$X = Z_p(I) \subset \mathbb{P}_k^n \Rightarrow C(X) = Z_a(I) \subset \mathbb{A}_k^{n+1}.$$

Dim. Si procede con la doppia inclusione.

$$P \in C(X) \Rightarrow P \in X \text{ o } P = (0, \cdots, 0)$$

in particolare $P \in X = Z_p(I)$ e allora

$$f(P) = 0 \quad \forall f \in I \Rightarrow f \in Z_a(I) \Rightarrow C(X) \subseteq Z_a(I).$$

Viceversa:

$$P \in Z_a(I) \Rightarrow f(P) = 0 \quad \forall f \in I \Rightarrow P \in Z_p(I) = X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \in C(X) \Rightarrow Z_a(I) \subseteq C(X) \Rightarrow Z_a(I) = C(X). \qquad \square$$

Lemma 2.19. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ un insieme algebrico proiettivo e sia $\mathcal{I}_p(X)$ il rispettivo ideale omogeneo associato, allora $\mathcal{I}_p(C(X)) = \mathcal{I}_p(X)$.*

Dim. Si proceda per la doppia inclusione: sia $f \in \mathcal{I}_p(C(X))$, allora :

$$f(P) = 0 \quad \forall P \in C(X)$$

dunque $P \in X$ oppure $P = (0, \cdots, 0)$, in ogni caso, si ha che

$$f(P) = 0 \quad \forall P \in X \Rightarrow f \in \mathcal{I}_p(X) \Rightarrow \mathcal{I}_p(C(X)) \subseteq \mathcal{I}_p(X).$$

Viceversa:

$$f \in \mathcal{I}_p(X) \Rightarrow f(P) = 0 \quad \forall P \in X \Rightarrow f(P) = 0 \quad \forall P \in C(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{I}_p(C(X)) \Rightarrow \mathcal{I}_p(X) \subseteq \mathcal{I}_p(C(X)) \Rightarrow \mathcal{I}_p(X) = \mathcal{I}_p(C(X)). \qquad \square$$

Corollario 2.20. *Se $I \subseteq S^{(n)}$ è un ideale omogeneo con $Z_p(I) \neq \emptyset$ allora $\sqrt{I} = \mathcal{I}_p\left(Z_p(I)\right)$.*

Dim. Banalmente segue dall'applicazione dei lemmi (2.18) (2.19) e dall'applicazione del teorema (1.23), infatti, sia $X = Z_p(I)$, un insieme algebrico proiettivo:

$$\mathcal{I}_p(Z_p(I)) = \mathcal{I}_p(X) = \mathcal{I}_p(C(X)) = \mathcal{I}_a(Z_a(I)) = \sqrt{I}. \qquad \square$$

Dal teorema segue che l'applicazione $\mathcal{I}_p$ è una biezione di $Z_p^{(n)}$ sull'insieme degli ideali radicali omogenei di $S^{(n)}$, diversi dall'ideale irrilevante.

Teorema 2.21. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$, allora :*

$$X \text{ varietà proiettiva } \Leftrightarrow \mathcal{I}_p(X) \text{ primo}$$

Dim. La dimostrazione ricalca la dimostrazione nel caso affine. $\square$

È interessante esplicitare, studiandone qualche proprietà, alcune varietà proiettive. Iniziamo con il parlare della varietà di Segre.
Siano fissati n, m due interi positivi. Si identifichi con $\mathbb{P}^{nm+n+m}_k$ l'insieme delle classi di proporzionalità delle matrici di tipo $(n+1) \times (m+1)$ con scalari nel campo k, del tipo:

$$W = \begin{pmatrix} w_{00}, \cdots, w_{0m} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ w_{n0} \quad \cdots \quad w_{nm} \end{pmatrix}$$

Sia definito il seguente insieme

$$S_{n,m} = \{[W] \in \mathbb{P}^{nm+n+m}_k : \rho(W) = 1\}$$

dove $\rho(W)$ è il rango della matrice W.

Lemma 2.22. *$S_{n,m}$ è un chiuso di $\mathbb{P}_k^{nm+n+m}$ rispetto alla topologia di Zariski.*

Dim. Per come è stato definito l'insieme $S_{n,m}$, un elemento $[W] \in S_{n,m}$ dove

$$W = \begin{pmatrix} w_{00} & \cdots & w_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n0} & \cdots & w_{nm} \end{pmatrix}$$

ha rango $\rho(W) = 1$. Questo significa che, per il teorema degli orlati, tutti i minori di ordine 2 sono nulli.

$$\begin{vmatrix} w_{ij} & w_{ih} \\ w_{kj} & w_{kh} \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow w_{ij}w_{kh} - w_{kj}w_{ih} = 0$$

con $i, k = 0, \cdots, n$ $j, h = 0, \cdots, m$. Ponendo

$$f = w_{ij}w_{kh} - w_{kj}w_{ih}$$

polinomio omogeneo di secondo grado a coefficienti in k, nelle indeterminate w_{ij}, dunque

$$\Sigma_{n,m} = Z_p(f)$$

cioè è un chiuso rispetto alla topologia di Zariski. □

Siano considerati $[x_0, x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}_k^n$ e $[y_0, y_1, \cdots, y_m] \in \mathbb{P}_k^m$ e sia $N = (n+1)(m+1) - 1$. Si ponga

$$K[w_{ij}]_{i=0,\cdots,n,j=0,\cdots,m} = S^{(N)}$$

$$K[x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_m] = S^{(n,m)}.$$

Si definisca la seguente applicazione:

$$\sigma_{n,m}^* : S^{(N)} \to S^{(n,m)}$$

$$f(w_{ij}) \to f(x_i y_j).$$

È un omomorfismo omogeneo e dunque per il teorema dell'omomorfismo si ha:

$$\frac{S^{(N)}}{I^{(n,m)}} \simeq Im\sigma_{n,m}^*$$

dove $I^{(n,m)} = Ker\sigma_{n,m}^* = \{f \in S^{(N)} : \sigma_{n,m}^*(f) = f(x_i y_j) = 0\}$. Tenuto ciò in considerazione si ha che $I^{(n,m)}$ è un ideale omogeneo, e inoltre

$$\frac{S^{(N)}}{I^{(n,m)}} \text{ dominio d'integrità } \Rightarrow I^{(n,m)} \text{ ideale primo } \Rightarrow I^{(n,m)} = \sqrt{I^{(n,m)}}.$$

Inoltre presi due vettori $[x] \in \mathbb{P}_k^n$ e $[y] \in \mathbb{P}_k^m$ non nulli, essi hanno rango 1, e dunque il rango della matrice $(x^t y)$ non nulla di tipo $(n+1) \times (m+1)$ è anch'esso uguale a 1, in quanto il rango di un prodotto di matrici non supera mai il minimo del rango dei due fattori. In seguito a questa osservazione è possibile considerare l'applicazione:

$$\sigma_{n,m} : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \longrightarrow S_{n,m}$$

$$([x], [y]) \longrightarrow \left[x^t y\right]$$

Essa è ben definita, poichè facendo variare x ed y di un fattore di proporzionalità, anche il prodotto $(x^t y)$ varierà per un fattore di proporzionalità.

Teorema 2.23. *$\sigma_{n,m}$ è un'applicazione biettiva.*

Dim. Per mostrare che è suriettiva, basterà far vedere che, presa una matrice W di rango 1 di tipo $(n+1) \times (m+1)$ esistono vettori di x ed y rispettivamente di tipo $1 \times (n+1)$ ed $1 \times (m+1)$ tali che $W = x^t y$.
Dato che W ha rango 1, esisteranno due matrici quadrate non degeneri A di tipo $(n+1) \times (n+1)$ e B di tipo $(m+1) \times (m+1)$ tali che:

$$AWB = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0, \dots, 0)$$

Allora, considerati i vettori $x = (1, 0, \dots, 0) \left(A^{-1}\right)^t$ e $y = (1, 0, \dots, 0) \left(B^{-1}\right)^t$, ho che $W = x^t y$.
Se si vuole esprimere la matrice M come prodotto di due vettori, l'unica possibilità è la seguente:

$$M = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(z^{-1}, 0, \dots, 0\right)$$

per ogni $z \in K - \{0\}$. Dunque, fissata W, si ha che l'espressione data per x e y è unica a meno di considerare vettori proporzionali. Da qui segue che ogni $[W] \in S_{n,m}$ non può provenire da piú coppie $([x], [y]) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$. Ciò permette di concludere che l'applicazione $\sigma_{n,m}$ è iniettiva, e quindi biettiva. $\square$

Lemma 2.24. *$S_{n,m}$ è il luogo di zeri di $I^{(n,m)}$, ossia :*

$$S_{n,m} = Z_p(I^{(n,m)}).$$

Dim. Si osservi che se $f = w_{ij}w_{kh} - w_{kj}w_{ih}$ è il polinomio omogeneo di secondo grado, si ha:

$$\sigma^*_{n,m}(f) = \sigma^*_{n,m}(w_{ij}w_{kh} - w_{kj}w_{ih}) = x_i y_j x_k y_h - x_k y_j x_i y_h = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \in Ker\sigma^*_{n,m} = I^{(n,m)}.$$

Sia $P \in Z_p(I^{(n,m)})$, dunque $g(P) = 0$ per ogni $g \in I^{(n,m)}$, ed essendo $f \in I^{(n,m)}$, risulta che

$$f(P) = 0 \Rightarrow P \in \Sigma_{n,m} \Rightarrow Z_p(I^{(n,m)}) \subseteq \Sigma_{n,m}.$$

Sia ora $P \in \Sigma_{n,m}$, essendo $\sigma_{n,m}$ suriettiva, allora

$$\exists [x] \in \mathbb{P}^n_k, [y] \in \mathbb{P}^m_k : P = \sigma_{n,m}([x],[y]) = [x_i y_j].$$

Sia $f \in I^{(n,m)}$, allora $\sigma^*_{n,m}(f) = f(x_i y_j) = 0$. Il punto $P = [w_{ij}] \in \Sigma_{n,m}$ è tale che

$$f(P) = f(x_i y_j) = 0 \Rightarrow P \in Z_p(I^{(n,m)}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma_{n,m} \subseteq Z_p(I^{(n,m)}) \Rightarrow S_{n,m} = Z_p(I^{(n,m)}).$$

□

Lemma 2.25. $S_{n,m}$ *è irriducibile.*

Dim. Basta tenere in considerazione il lemma (2.24) e il teorema degli zeri di Hilbert;

$$\mathcal{I}_p(S_{n,m}) = \mathcal{I}_p(Z_p(I^{(n,m)})) = \sqrt{I^{(n,m)}} = I^{(n,m)}.$$

Essendo $I^{(n,m)} = \mathcal{I}_p(S_{n,m})$ un ideale primo, allora, per il teorema (2.21), $S_{n,m}$ è irriducibile. □

Teorema 2.26. $S_{n,m}$ *è una varietà proiettiva.*

Dim. Per i lemmi (2.22) e (2.25), si ha che $S_{n,m}$ è un chiuso irriducibile rispetto alla topologia di $\mathbb{P}^n_k$ e dunque è una varietà proiettiva. □

Definizione 2.27. $S_{n,m}$ è chiamato varietà di Segre.

Altre varietà proiettive e che saranno trattate successivamente sono le varietà di Veronese e le varietà di Grassmann.

Siano n, d interi positivi. Si identifichi con $\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$ l'insieme delle classi di proporzionalità delle matrici quadrate e simmetriche di dimensione $(n+1) \times (n+1)$ con scalari nel campo k, del tipo:

$$V = \begin{pmatrix} v_0^2 & \cdots & v_0 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_0 & \cdots & v_n^2 \end{pmatrix}$$

Sia definito il seguente insieme

$$V_d = \left\{ [V] \in \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1} : \rho(V) = 1 \right\}$$

dove $\rho(V)$ è il rango della matrice V.

Lemma 2.28. *L'insieme V_d è un chiuso di $\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$ rispetto alla topologia di Zariski.*

Dim. Per come è stato definito l'insieme V_d, un elemento $[V] \in V_d$ dove

$$V = \begin{pmatrix} v_0^2 & \cdots & v_0 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_0 & \cdots & v_n^2 \end{pmatrix}$$

ha rango $\rho(V) = 1$. Ciò significa che, per il teorema degli orlati, tutti i minori di ordine due sono nulli.

$$\begin{vmatrix} v_{ij} & v_{ik} \\ v_{hj} & v_{hk} \end{vmatrix} \Longleftrightarrow v_{ij}v_{hk} - v_{hj}v_{ik} = 0$$

con $i, j, k, h = 0, \cdots, n$. Ponendo

$$f = v_{ij}v_{hk} - v_{hj}v_{ik}$$

polinomio omogeneo di secondo grado a coefficienti in k, nelle indeterminate $v_i j$, dunque

$$V_d = Z_p(f).$$

□

3 Curve algebriche

La definizione delle varietà affini, in particolar modo la definizione di insieme algebrico, inteso come luogo degli zeri di un polinomio $f \in A^{(n)}$, ci permette di poter approfondire il concetto di curve algebriche. Abbiamo dimostrato che $\mathbb{A}_k^n$ è uno spazio topologico dotato della topologia di Zariski i cui chiusi sono gli insiemi algebrici e dunque, tenuto in considerazione ciò, si definirà una ipersuperficie Z un chiuso di $\mathbb{A}_k^n$ rispetto alla topologia di Zariski descritto come luogo degli zeri di un singolo polinomio.

Definizione 3.1. Se $f \in A^{(n)}$ è un polinomio non costante irriducibile, $Z_a(f)$ è chiamato ipersuperficie di $\mathbb{A}_k^n$ di equazione $f(x) = 0$.

Nel dettaglio, se $f \in A^{(n)}$, in base all'ambiente di lavoro, l'ipersuperficie Z di equazione $f(x) = 0$ prende nome di:

- curva in $\mathbb{A}_k^2$;
- superficie in $\mathbb{A}_k^3$;
- ...

Inoltre sia $f \in A^{(n)}$ di grado $deg f = d$, l'ipersuperficie Z di equazione $f(x) = 0$ in $\mathbb{A}_k^n$ prende il nome di:

- iperpiano, qualora $d = 1$;
- quadrica, qualora $d = 2$;
- cubica, qualora $d = 3$;
- quartica, qualora $d = 4$;
- ...

Poiché $A^{(n)}$ è un dominio di fattorizzazione unica, si ha che ogni polinomio $f \in A^{(n)}$ si può decomporre in prodotto di polinomi irriducibili:

$$\exists f_1, f_2, \cdots, f_l \in A^{(n)} \text{ irriducibili } : f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_l^{d_l}$$

dove $d_1, d_2, \cdots, d_l$ sono le molteplicità delle rispettive componenti irriducibili f_i con $i = 1, \cdots, l$. Dall'osservazione (2), si ha

$$Z_a(f) = Z_a(f_1 f_2 \cdots f_l) = \bigcap_{i=1}^{l} Z_a(f_i)$$

quindi $f_1 f_2 \cdots f_l = 0$ è ancora un'equazione di f, detta equazione ridotta.

Siano $Z_1, Z_2, \cdots, Z_l$ le ipersuperfici irriducibili affini di equazioni rispettivamente:

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \cdots, f_l(x) = 0.$$

Definizione 3.2. L'insieme delle ipersuperfici irriducibili $Z_1, Z_2, \cdots, Z_l$ è detta essere un'ipersuperficie algebrica affine Z di equazione $f(x) = 0$. Le ipersuperfici irriducibili $Z_1, Z_2, \cdots, Z_l$ sono chiamate componenti di Z.

In maniera analoga si potrà definire una ipersuperficie in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}_k^n$, e tutto ciò che è stato discusso relativo allo spazio affine, si potrà riportare nello spazio proiettivo. In particolar modo, essendo l'anello dei polinomi omogenei $S^{(n)}$ un dominio di fattorizzazione unica, come $A^{(n)}$, ogni suo polinomio omogeneo si potrà decomporre come prodotto di polinomi irriducibili omogenei:

$$\exists f_1, f_2, \cdots, f_l \in S^{(n)} \text{ irriducibili } : f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_l^{d_l}$$

dove $d_1, d_2, \cdots, d_l$ sono le molteplicità delle rispettive componenti irriducibili omogenei f_i con $i = 1, \cdots, l$. Tenuto in considerazione che

$$Z_p(f) = Z_p(f_1 f_2 \cdots f_l) = \bigcap_{i=1}^{l} Z_p(f_i)$$

quindi $f_1 f_2 \cdots f_l = 0$ è ancora un'equazione di f detta equazione ridotta.

Siano $Z_1, Z_2, \cdots, Z_l$ le ipersuperfici irriducibili in $\mathbb{P}_k^n$ di equazioni rispettivamente

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \cdots, f_l(x) = 0.$$

Definizione 3.3. L'insieme delle ipersuperfici irriducibili $Z_1, Z_2, \cdots, Z_l$ è detta essere una ipersuperficie algebrica proiettiva Z di equazioni $f(x) = 0$. In particolare le ipersuperfici $Z_1, Z_2, \cdots, Z_l$ sono chiamate componenti irriducibili di Z.

Esempio 3.4. Sia considerato lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^2_k$ e sia $x_0^3 x_1^2 = 0$ l'equazione di una curva algebrica proiettiva, si ha che tale curva è composta da due componenti irriducibili di equazioni:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0$$

di molteplicità rispettivamente $d_1 = 3$ e $d_2 = 2$. Dunque si tratta di una cubica di equazione $x_0^3 = 0$ e di una quadrica di equazione x_1^2.

È da notare che l'analisi dell'ambiente affine e l'analisi dell'ambiente proiettivo non sono slegati tra di loro, anzi vi è uno stretto legame che funge da collante tra di essi. Infatti è possibile definire le seguenti applicazioni:

$$P = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{A}^n_k \longrightarrow P = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 1) \in \mathbb{P}^n_k$$

che permette di passare dall'ambiente affine all'ambiente proiettivo, mentre, la seguente applicazione

$$P = [x_0, x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}^n_k \xrightarrow{\varphi_i} P = (\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{A}^n_k$$

con $x_i \neq 0$ per $i = 0, \cdots, n$, rappresenta il passaggio inverso, dall'ambiente proiettivo all'ambiente affine.
Sia considerato l'iperpiano H_i di equazione $x_i = 0$, per $i = 0, \cdots, n$, è importante che, affinché sia lecito il passaggio dall'ambiente proiettivo all'ambiente affine, si richiede che il punto $P \in \mathbb{P}^n_k$ non appartenga all'iperpiano H_i. Quindi, denotato con $U_i = \mathbb{P}^n_k - H_i$, si ha:

$$P = [x_0, x_1, \cdots, x_n] \in U_i \xrightarrow{\varphi_i} P = (\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{A}^n_k.$$

Inoltre l'insieme $\{U_0, U_1, \cdots, U_n\}$ costituiscono un ricoprimento per $\mathbb{P}^n_k$.

Proposizione 3.5. *φ_i è un omeomorfismo.*

Dim. Ci riferiamo al caso $i = 0$, in quanto il caso $i > 0$ è analogo. È chiaro che φ_0 è una biezione. Resta dunque da provare che φ_0 e φ_o^{-1} sono chiuse. A tale scopo consideriamo le seguenti applicazioni:

$$\alpha\colon f(x_0, \ldots, x_n) \in {}^hS^{(n)} \to f(1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{(n)}$$
$$\beta\colon g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{(n)} \to x_0^\gamma g\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in {}^hS^{(n)} \qquad \gamma = \deg g$$

Sia $Z \subseteq U_0$ un chiuso, sicchè $Z = U_0 \cap Z_p(F)$, con $F \subseteq {}^hS^{(n)}$. Posto $F' = \alpha(F)$ è ovvio che $\varphi_0(Z) = Z_a(F')$ e dunque φ_0 è un chiuso di $\mathbb{A}^n$. Facilmente si verifica che $\varphi_0^{-1}(Z) = U_0 \cap Z_p(F'')$, con $F'' = \beta(F)$, quindi φ_0^{-1} è chiusa. $\square$

Corollario 3.6. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ una varietà proiettiva, allora si ha*

$$X = \bigcup_{i=0}^{n} (X \cap U_i)$$

cioè X si può ricoprire con degli aperti $X \cap U_i$ che sono identificati, tramite le mappe φ_i con delle varietà affini.

Osservazione 9. È possibile identificare ${\mathbb{A}_k}^n$ con U_0 mediante la φ_0. In tal caso H_0 si dirà iperpiano all'infinito di ${\mathbb{A}_k}^n$.

Definizione 3.7. Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$, la sua chiusura $\overline{X}$ in $\mathbb{P}^n$ si dirà la chiusura protettiva di X. Si porrà poi $X_\infty = \overline{X} \cap H_0$ e tale insieme si dirà insieme dei punti all'infinito di X.

È interessante parlare di punti multipli, in particolare di punti singolari e punti semplici. Iniziamo col concentrare la nostra attenzione sull'intersezioni tra una curva con una retta. Si analizzi nello spazio proiettivo.

Teorema 3.8. *Se l'equazione di una curva C è di grado $n > 0$, allora una retta L o è componente della curva C o ha precisamente n punti (propriamente contati) in comune con la curva.*

Dim. Sia C una curva algebrica di equazione $F(x) = 0$ con F polinomio omogeneo di $S^{(2)}$, di grado $n > 0$; siano $(a), (b)$ due punti distinti ed L la retta passante per essi. Qualunque sia il punto (x) appartenente alla retta, si ha:

$$\begin{aligned}(x) \in L &\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K : x_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K : (x_0, x_1, x_2) = (\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2)\end{aligned}$$

Per calcolare le intersezioni della retta L con la curva C, il punto (x) deve essere un punto della curva e ciò vuol dire che $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Quindi si ha

$$F(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2) = 0$$

che rappresenta un'equazione nell'incognite λ_1, λ_2, le cui radici sono i valori da attribuire a λ_1, λ_2 tale che il punto sia sulla curva. Ci sono due casi da considerare:

1. se $F(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2)$ è identicamente nulla in λ_1 e λ_2, allora ogni punto della retta L è punto della curva C. Ciò ci permette di dire che la retta L è componente della curva C.
2. se $F(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2)$ non è identicamente nulla in λ_1 e λ_2, allora $F(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2)$ è un polinomio omogeneo di grado $n > 0$ nelle variabili λ_1 e λ_2.
   $F(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2) = 0$ ammette n radici e se vi è una radice di molteplicità $r \geq 0$, allora saranno contate r radici coincidenti.

Ognuno delle radici individua un unico punto in comune tra la curva e la retta. Adotteremo la convenzione che conteremo come r punti, il punto dell'intersezione corrispondente alla radice di molteplicità $r \geq 0$. Ciò ci permette di dire che la retta L ha n punti in comune con la curva C. $\square$

In conseguenza a ciò, potremo affermare che il grado dell'equazione di una curva ha così un significato geometrico ed è chiamato *ordine della curva.*
In particolare per una curva senza alcuna componente multipla si può dimostrare un teorema piú forte:

Teorema 3.9. *Se C è una curva di ordine $n > 0$ senza alcuna componente multipla, allora per un punto $P \notin C$ passano rette che intersecano la curva C in n distinti punti.*

Dim. Si scelga un sistema di coordinate in cui il punto P abbia coordinate $(0, 0, 1)$ e sia $f(x, y) = 0$ l'equazione affine della curva C. Scriviamo l'equazione parametrica della retta L_α passante per P:

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = t \end{cases}$$

con $\alpha \in K$. Al variare di t si ottengo tutti i punti $Q \in L_\alpha$ eccetto il punto P. Tale eccezione non comporta alcun problema, poiché per ipotesi il punto P non appartiene alla curva C, volendo determinare i punti di intersezione tra la retta e la curva. Le intersezioni $L_\alpha \cap C$ sono le radici dell'equazioni $f(\alpha, t) = 0$ di grado $n > 0$ nell'incognita t. Se per assurdo tale equazione ammettesse una radice multipla in t per ogni α, allora il discriminante $R(x)$[1] del polinomio $f(x, y)$ rispetto alla variabile y , è tale che $R(\alpha)$ è il risultante di $f(\alpha, t)$ rispetto a t e si ha:

$$R(\alpha) = 0 \ \forall\alpha \Rightarrow R(x) = 0$$

così $f(x, y)$ ha un fattore multiplo, cioè la curva C ha una componente multipla, il che è assurdo per ipotesi. $\square$

Ora ci si interesserà studiare le intersezioni di una retta L con una curva C in un punto $P \in C$. A tale scopo scegliamo un sistema di coordinate affini in cui:

(a) $P = (a, b)$;
(b) $f(x, y) = 0$ l'equazione affine della curva C di grado $n > 0$;
(c) la retta L abbia l'equazione parametrica nella forma:

$$\begin{cases} x = a + \lambda t \\ y = b + \mu t \end{cases}$$

[1] Ricordiamo che per discriminante del polinomio f s'intende il risultante di f e il suo polinomio derivato.

Le intersezioni della retta L con la curva C sono determinate dalle radici del polinomio $f(a+\lambda t\ ,\ b+\mu t)=0$. Sviluppando in serie di Taylor $f(a+\lambda t\ ,\ b+\mu t)$ rispetto alla variabile t, si ottiene:

$$f(a+\lambda t, b+\mu t) = f(a,b) + (f_x\lambda + f_y\mu)t + \frac{1}{2!}(f_{xx}\lambda^2 + 2f_{xy}\lambda\mu + f_{yy}\mu^2)t^2 + \cdots$$

dove $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, \cdots$ sono le derivate parziali di f, valutate nel punto $P = (a,b)$. Sapendo che $f(a,b) = 0$, in quanto $P \in C$, e $f(a+\lambda t\ ,\ b+\mu t) = 0$, allora si avrà esattamente:

$$(f_x\lambda + f_y\mu)t + \frac{1}{2!}(f_{xx}\lambda^2 + 2f_{xy}\lambda\mu + f_{yy}\mu^2)t^2 + \cdots = 0$$

Si distinguono tre casi:

Caso 1 $f_x(a,b) \neq 0$ o $f_y(a,b) \neq 0$.
Ogni retta passante per P interseca la curva C nel solo punto P eccetto per quel valore di $\frac{\lambda}{\mu}$ che rende $f_x\lambda + f_y\mu = 0$. Tale retta è chiamata *retta tangente* alla curva C nel punto P ;

Caso 2 $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$, ma non tutte $f_{xx}(a,b), f_{xy}(a,b), f_{yy}(a,b)$ sono nulle.
Ogni retta passante per P ha almeno due intersezioni in P, mentre al piú due rette, corrispondenti alle radici di

$$f_{xx}(a,b)\lambda^2 + 2f_{xy}(a,b)\lambda\mu + f_{yy}(a,b)\mu^2 = 0 \tag{1}$$

hanno piú di due intersezioni in P. Tali rette sono chiamate *rette tangenti* alla curva C nel punto P e se (6.2) ammette una radice di molteplicità due allora ci saranno due *rette tangenti coincidenti*

Caso 3 Tutte le derivate di f fino alla $(r-1)-esima$ derivata si annullino nel punto P e almeno una $r-esima$ derivata non si annulli nel punto P.
Ogni retta passante per P ha almeno r intersezioni in P con la curva C e le r rette, propriamente contate, corrispondenti alle radici di

$$f_{x^r}\lambda^r + \binom{r}{1} f_{x^{r-1}y}\lambda^{r-1}\mu + \cdots + \binom{r}{r} f_{y^r}\mu^r = 0 \tag{2}$$

hanno piú di r intersezioni in P. Tali rette sono chiamate *rette tangenti* a C nel punto P. La molteplicità delle radici della (2) indicherà le molteplicità delle rispettive rette.

Definizione 3.10. Il punto P così fatto è chiamato punto della curva C di molteplicità $r \geq 0$.

Definizione 3.11. Un punto della curva C di molteplicità uno è chiamato punto semplice di C, un punto della curva C di molteplicità due è chiamato punto doppio di C e così via. In particolare un punto di molteplicità $r \geq 2$ è detto punto singolare.

Definizione 3.12. Un punto della curva C di molteplicità $r \geq 0$ è ordinario se le r tangenti alla curva C nel punto sono distinte.

Un punto $P \notin C$ può essere considerato come un punto $P \in C$ di molteplicità zero.

Proposizione 3.13. *Un punto $P = (a, b) \in C$ è singolare se e solo se $f(a, b) = f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.*

Dim. $\Rightarrow$) $P = (a, b) \in C$ è singolare $\Rightarrow P = (a, b)$ ha molteplicità $r \geq 2 \Rightarrow f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ per il caso 2 e il caso 3 analizzati precedentemente.
$\Leftarrow$) $f(a, b) = f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \Rightarrow$ ci si riconduce al caso 2. $\square$

In termini di coordinate proiettive, il criterio per individuare i punti singolari di una curva può essere esplicitato in una forma piú conveniente, attraverso i seguenti teoremi.

Teorema 3.14. *Il punto P è un punto di molteplicità $r \geq 0$ di $F(x) = 0$ se e solo se tutte le $(r - 1) -$ esime derivate di F, ma non tutte le $r -$ esime derivate, si annullino nel punto P.*

Dim. Si assuma che il punto P non appartenga alla retta all'infinito $x_0 = 0$. Se x_0 divide F allora F non ha equazione affine, però $f(x, y) = F(1, x, y) = 0$ è l'equazione affine della curva che differisce da F solo per la mancanza di $x_0 = 0$ come componente. Dunque la componente $x_0 = 0$ certamente non ha effetto sulla molteplicità della curva nel punto P. Assumiamo che P abbia coordinate affini (a, b). Si ha:

$$f(a, b) = 0 \Leftrightarrow F(1, a, b) = 0$$

poiché $P \in C$. Siccome

$$f_x(x, y) = F_{x_1}(1, x, y) \text{ e } f_y(x, y) = F_{x_2}(1, x, y)$$

dunque

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \Leftrightarrow F_{x_1}(1, a, b) = F_{x_2}(1, a, b) = 0$$

Considerando che [2]

$$x_0F_{x_0} + x_1F_{x_1} + x_2F_{x_2} = nF$$

si avrà

[2] Se $F(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ è un polinomio omogeneo di grado $n > 0$ allora

$$\sum x_iF_{x_i} = nF.$$

$F(1,a,b) = F_{x_1}(1,a,b) = F_{x_2}(1,a,b) = 0 \Leftrightarrow F_{x_0}(1,a,b) = F_{x_1}(1,a,b) = F_{x_2}(1,a,b) = 0$

Continuando questo processo si avrà:

$$f(a,b) = f_x(a,b) = f_y(a,b) = f_{x^2}(a,b) = \cdots = f_{y^r}(a,b) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F_{x_0^r}(1,a,b) = F_{x_0^{r-1}x_1}(1,a,b) = \cdots = F_{x_2^r}(1,a,b) = 0$$

Il teorema segue per l'applicazione del Caso 3. $\square$

Come conseguenza di tale teorema vi è il seguente corollario:

Corollario 3.15. *In termini di coordinate proiettive un punto $A = (a)$ di $F(x) = 0$ è singolare se e solo se $F_0(a) = F_1(a) = F_2(a) = 0$.*

In particolare per una curva senza alcuna componente multipla è valido il seguente teorema:

Teorema 3.16. *Se C è una curva di ordine $n > 0$ senza componenti multiple, allora per il punto P della curva di molteplicità $r \geq 0$ passano rette che intersecano la curva C in $n - r$ punti distinti.*

Il teorema che segue, invece, permette di indicare quella condizione necessaria e sufficiente affinché un punto di una curva sia un punto non singolare:

Teorema 3.17. *Se (a) è un punto non-singolare di $F(x)$, allora l'equazione della retta tangente ad F nel punto (a) è nella forma*

$$\sum_i F_i(a)x_i = 0.$$

È sicuramente utile procedere con esempi che permettono una maggiore comprensione dei risultati ottenuti nella sezione precedente mediante delle rappresentazioni grafiche. Enunciamo il seguente teorema che può essere molto utile per le applicazioni che seguiranno:

Teorema 3.18. *Se $f(x,y)$ non ha termini di grado minore di r e ha qualche termine di grado r allora l'origine è un punto di molteplicità r di $f(x,y) = 0$ e la curva, definita azzerando i termini di f(x,y) di grado r, ha come sue componenti le rette tangenti ad $f(x,y) = 0$ nell'origine.*

Esempio 3.19. Sia $f(x,y) = x^3 - x^2 + y^2$ una curva. Il punto P in cui $f(x,y)$ si annulla è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo le derivate della funzione $f(x,y)$:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2x \text{ e } f_y(x,y) = 2y$$

Valutiamo le derivate nell'origine

$$f_x(0,0) = 0 \text{ e } f_y(0,0) = 0;$$

Dunque, avendo $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ per la proposizione (3.13), si ha che l'origine è un punto singolare, di molteplicità

$$2 \leq r \leq 3$$

poiché $n = 3$. Calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{x^2}(x,y) = 6x - 2 \; f_{xy}(x,y) = 0 \; f_{y^2}(x,y) = 2$$

Valutando le derivate seconde nell'origine[3], si nota:

$$f_{x^2}(0,0) = -2 \neq 0 \; f_{xy}(0,0) = 0 \; f_{y^2}(0,0) = 2 \neq 0$$

Allora possiamo concludere che l'origine è un punto singolare doppio. È ordinario perché le due rette tangenti nel punto (0,0) sono distinte, poiché, per l'applicazione del teorema (3.18), si ha:

$$-x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \text{ e } x - y = 0$$

Un punto doppio ordinario è chiamato *nodo*.

Esempio 3.20. Sia $f(x,y) = x^3 - y^2 = 0$ una curva. Il punto P in cui $f(x,y)$ si annulla è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo le derivate della funzione $f(x,y)$

$$f_x(x,y) = 3x^2 \text{ e } f_y(x,y) = -2y$$

Valutiamo le derivate nell'origine

$$f_x(0,0) = 0 \text{ e } f_y(0,0) = 0;$$

Dunque, avendo $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ per la proposizione (3.13), si ha che l'origine è un punto singolare, di molteplicità

$$2 \leq r \leq 3$$

poiché $n = 3$. Calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{x^2}(x,y) = 6x \; f_{xy}(x,y) = 0 \; f_{y^2}(x,y) = -2$$

Valutando le derivate seconde nell'origine, si nota:

$$f_{x^2}(0,0) = 0 \; f_{xy}(0,0) = 0 \; f_{y^2}(0,0) = -2 \neq 0$$

Allora possiamo concludere che l'origine è un punto singolare doppio; applicando il teorema (3.18) si ha:

$$-y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Non è un punto ordinario poiché non ci sono due tangenti distinte. Un punto doppio non ordinario è chiamato *cuspide*.

[3] Ricordiamo che

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

Esempio 3.21. Sia $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$ una curva. Il punto P in cui $f(x,y)$ si annulla è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo le derivate della funzione $f(x,y)$ e quantifichiamole nell'origine:

$$f_x(x,y) = 8x^3 - 6xy \text{ e } f_y(x,y) = -3x^2 + 2y - 6y^2 + 4y^3$$

$$f_x(0,0) = 0 \text{ e } f_y(0,0) = 0$$

Dunque, essendo $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ per la proposizione (3.13), si ha che l'origine è un punto singolare, di molteplicità

$$2 \leq r \leq 4$$

poiché $n = 4$. Calcoliamo le derivare seconde:

$$f_{x^2}(x,y) = 24x^2 - 6y \; f_{xy}(x,y) = -6x \; f_{y^2}(x,y) = 2 - 12y + 12y^2$$

Valutando le derivate seconde nell'origine, si ha:

$$f_{x^2}(0,0) = 0 \; f_{xy}(0,0) = 0 \; f_{y^2}(0,0) = 2 \neq 0$$

Allora possiamo concludere che l'origine è un punto singolare doppio; applicando il teorema (3.18) si nota:

$$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Non è un punto doppio ordinario poiché ci sono due tangenti coincidenti. Un punto doppio non ordinario di questo tipo è chiamato *tacnodo*.

Esempio 3.22. Sia $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$ una curva. Il punto P in cui $f(x,y)$ si annulla è l'origine $(0,0)$. Calcoliamo le derivate della funzione $f(x,y)$ e valutiamole nell'origine:

$$f_x(x,y) = 4x(x^2 + y^2) + 6xy \text{ e } f_y(x,y) = 4y(x^2 + y^2) + 3x^2 - 3y^2$$

$$f_x(0,0) = 0 \text{ e } f_y(0,0) = 0$$

Dunque, avendo $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, per la proposizione (3.13) si ha che l'origine è un punto singolare, di molteplicità

$$2 \leq r \leq 4$$

poiché $n = 4$. Calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{x^2}(x,y) = 4(x^2 + y^2) + 8x^2 \; f_{xy}(x,y) = 8xy + 6x$$

$$f_{y^2}(x,y) = 4(x^2 + y^2) + 8y^2 - 6y$$

valutandole nell'origine, si ottiene:

$$f_{x^2}(0,0) = 0 \; f_{xy}(0,0) = 0 \; f_{y^2}(0,0) = 0$$

Calcoliamo le derivate terze valutate poi nell'origine:

$$f_{x^3}(x,y) = 8x(x^2+y^2)+16x\ (\cdots)\ f_{y^3}(x,y) = 8y(x^2+y^2)+16y-6$$

$$f_{x^3}(0,0) = 0\ (\cdots)\ f_{y^3}(0,0) = -6 \neq 0$$

dove $(\cdots)$ racchiudono il complesso delle derivate terze. Allora possiamo concludere che l'origine è un punto singolare triplo; applicando il teorema (3.18) si ha:

$$3x^2y - y^3 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} y=0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3} + y = 0 \end{array}$$

Quindi è un punto ordinario in quanto ha le tre rette tangenti distinte.

4 Complementi

Innanzitutto si approfondisca il concetto di irriducibilità in uno spazio topologico. Sarà utile la seguente proposizione:

Proposizione 4.1. *Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme, allora:*

1. *Y irriducibile $\Leftrightarrow$ $\forall (P_1, P_2) \in Y \times Y$ $\exists Z \subseteq Y : Z$ irriducibile e $\{P_1, P_2\} \in Z$;*
2. *Sia U un aperto non vuoto di Y, allora*

$$Y \textit{ irriducibile } \Leftrightarrow U \textit{ denso in } Y;$$

3. *Y irriducibile $\Leftrightarrow \overline{Y}$ irriducibile ;*
4. *Y irriducibile $\Leftrightarrow \forall U \subseteq Y$ aperto ; U è irriducibile .*

Dim. Si dimostri la 1).
$\Rightarrow$) Sia Y irriducibile e siano P_1 e P_2 due punti distinti di Y, allora Y è il sottoinsieme irriducibile che contiene i due punti.
$\Leftarrow$) Sia $Y = Y_1 \cup Y_2$, con Y_i chiusi di Y, allora risulta che $\{P_1,\, P_2\} \subseteq Z \subseteq Y_1 \cup Y_2$, ma

$$Z = (Z \cap Y_1) \cup (Z \cap Y_2)$$

con $Z \cap Y_i$ chiusi in Z. Essendo Z irriducibile, quindi

$$Z = Z \cap Y_1 \text{ o } Z = Z \cap Y_2$$

Ne segue che $\{P_1,\, P_2\} \subseteq Y_1$ o $\{P_1,\, P_2\} \subseteq Y_2$. Quindi $Y \subseteq Y_1$ oppure $Y \subseteq Y_2$ e Y è irriducibile.
Si passi a dimostrare il punto 2.
$\Rightarrow$) Se per assurdo $\overline{U} \neq Y$, si ha $Y = \overline{U} \cup (Y - U)$ e quindi Y è unione di due chiusi propri, ma è una contraddizione in quanto Y è irriducibile. Dunque

$\overline{U} = Y$.
$\Leftarrow$) Se per assurdo Y è riducibile, $Y = Y_1 \cup Y_2$, con Y_i, $i = 1, 2$, chiusi propri. Quindi $Y - Y_1$ è un aperto denso, contenuto in Y_2. Allora $Y = \overline{Y - Y_1} \subseteq Y_2$, contraddizione.
Si dimostri il punto 3).
$\Rightarrow$) Sia Y irriducibile e supponiamo $\overline{Y} = Y_1 \cup Y_2$ con Y_i chiusi propri, per $i = 1, 2$. Allora

$$Y \subseteq \overline{Y} = Y_1 \cup Y_2 \Rightarrow Y \subseteq Y_1 \text{ o } Y \subseteq Y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{Y}_1 = Y_1 \text{ o } \overline{Y} \subseteq \overline{Y}_2 = Y_2 \Rightarrow \overline{Y} \text{ irriducibile.}$$

$\Leftarrow$) Sia $Y = Y_1 \cup Y_2$ con Y_1, Y_2 chiusi in Y. Inoltre $Y_1 = X_1 \cap Y, Y_2 = X_2 \cap Y$ con $X_i \subseteq X$ chiusi. Allora

$$Y = (X_1 \cap Y) \cup (X_2 \cap Y) = (X_1 \cup X_2) \cap Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y \subseteq X_1 \cup X_2 \Rightarrow \overline{Y} \subseteq X_1 \cup X_2 \Rightarrow \overline{Y} \subseteq X_1 \text{ o } \overline{Y} \subseteq X_2.$$

Supponiamo $\overline{Y} \subseteq X_1$, si ha $Y_1 = X_1 \cap Y \supseteq \overline{Y} \cap Y = Y$. Ne segue che $Y \subseteq Y_1$, quindi Y è irriducibile. Infine si dimostri il punto 4), applicando i punti precedenti. Sia Y irriducibile e sia U un suo aperto non vuoto, allora

$$\overline{U} = Y \Leftrightarrow \overline{U} \text{ irriducibile } \Leftrightarrow U \text{ irriducibile.} \qquad \square$$

Esempio 4.2. $\mathbb{P}^1$ è irriducibile. Infatti i chiusi propri, non vuoti, irriducibili di $\mathbb{P}^1$ sono i punti.

Esempio 4.3. I chiusi irriducibili di $\mathbb{A}^n_k$ o di $\mathbb{P}^n_k$ sono: i sottospazi non vuoti, in quanto omeomorfi a un $\mathbb{A}^r_k$ o a un $\mathbb{P}^r_k$ e la cubica gobba, affine o proiettiva, in quanto omeomorfa ad $\mathbb{A}^1_k$ o a $\mathbb{P}^1_k$.

Corollario 4.4. *Ogni aperto non vuoto di $\mathbb{P}^n_k$ è irriducibile.*

Dim. Si tenga in considerazione la proposizione (4.1). Per ogni coppia di punti P_1, P_2 distinti passa la retta $P_1 \vee P_2$, che è omeomorfa a ${\mathbb{P}^n}^1_k$ e dunque per il punto (1) $\mathbb{P}^n_k$ è irriducibile e in virtù del punto (4) segue l'asserto. $\square$

Corollario 4.5. *Ogni aperto non vuoto di $\mathbb{P}^n_k$ è denso in $\mathbb{P}^n_k$, sicchè la topologia di Zariski di $\mathbb{P}^n_k$ non è T_2 cioè che due aperti non vuoti si intersecano sempre, perché sono densi.*

Dim. Si considera il punto (2) della proposizione (4.1). $\square$

Esempio 4.6. Se consideriamo un'inclusione di spazi vettoriali $W \cong k^{(k+1)} \hookrightarrow V \cong k^{(n+1)}$ essa induce una mappa $\mathbb{P}W \overset{\rho}{\hookrightarrow} \mathbb{P}V$.

Definizione 4.7. $Im(\rho) = Z$ si dice sottospazio lineare di dimensione k, o $k-$piano, in $\mathbb{P}V$.

- $k = 1 \Rightarrow Z$ retta ;
- $k = n-1 \Rightarrow Z$ iperpiano.

Osservazione 10.

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{P}^n{}_k \times \mathbb{P}^n{}_k \text{ con } P_1 \neq P_2 \quad \exists ! r \text{ retta } : P_1, P_2 \in r.$$

Un sottospazio lineare $Z \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ può essere descritto come il luogo di zeri di $n-k$ polinomi omogenei lineari. Inversamente ogni insieme definito da forme lineari è un sottospazio lineare.
L'intersezione di due sottospazi lineare è ancora un sottospazio lineare, possibilmente $\varnothing$. Si può parlare anche del sottospazio lineare generato da due (o piú) sottospazi lineari Z, Z'; se $Z = \mathbb{P}W$, $Z' = \mathbb{P}W'$, esso è proprio il sottospazio associato alla somma $W + W' \subset K^{n+1}$, e equivalentemente il piú piccolo sottospazio lineare contenente sia Z che Z' e si denota con $\overline{Z, Z'}$. La dimensione dello spazio $\overline{Z, Z'}$ è al piú la somma delle dimensioni e l'uguaglianza vale se e solo se Z e Z' sono disgiunti. Si ha in generale:

$$\dim\left(\overline{Z,\, Z'}\right) = \dim(Z) + \dim(Z') - \dim(Z \cap Z')$$

dove prendiamo l'insieme vuoto come sottospazio lineare di dimensione -1.

Sia $Z \subseteq \mathbb{P}^n$ un chiuso del tipo $Z = Z_p(f_0, \ldots, f_m)$ con $f_0, \ldots, f_m$ forme lineari; per la teoria dei sistemi lineari potrà supporsi che $f_0, \ldots, f_m$ siano linearmente indipendenti.
Allora se $g_0, \ldots, g_h$ sono ancora forme lineari tali che $Z = Z_p(g_0, \ldots, g_h)$, $g_0, \ldots, g_h$ dipendono linearmente da $f_0, \ldots, f_m$ in S_1^n, e quindi è $h \geq m$, e vale:

$$h = m \Leftrightarrow g_0, \ldots, g_m \text{ linearmente indipendenti .}$$

Dunque l'intero $n - m = r + 1$ non dipende che da Z ed è il massimo numero di soluzioni linearmente indipendenti del sistema:

$$\begin{aligned} f_0(\underline{x}) =& a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n = 0 \\ & \cdots\cdots \\ f_m(\underline{x}) =& a_{m0}x_0 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Se $\underline{\xi}_i = (\xi_{i0}, \ldots, \xi_{in})$, $i = 0, \ldots, r$ sono $r+1$ siffatte soluzioni, ogni altra soluzione di (1) dipende linearmente da esse.
Considerati i punti $P_i = \left[\underline{\xi}_i\right] \in \mathbb{P}^n$ diremo che essi sono linearmente indipendenti e diremo che $P = \left[\underline{\xi}\right]$ dipende linearmente da $P_0, \ldots, P_r$ se esistono $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in K$ tali che $\underline{\xi} = \lambda_0 \underline{\xi}_0 + \ldots, \lambda_r \underline{\xi}_r$ e scriveremo $P = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_r P_r$.
Ovviamente tali definizioni sono ben poste. Viceversa siano $P_i = \left[\underline{\xi}_i\right]$, $i = 0, \ldots, r$, punti linearmente indipendenti di $\mathbb{P}^n$: l'insieme Z dei punti di $\mathbb{P}^n{}_k$

che da essi dipendono linearmente costituiscono un chiuso Z definito da un sistema lineare del tipo (1), con $r+1=n-m$ e $f_0,\ldots,f_m$ linearmente indipendenti.
Infatti sia $f(\underline{x})=u_0x_0+\cdots+u_nx_n$ una forma lineare. Essa contiene tutti i punti che dipendono linearmente da $P_0,\ldots,P_r$ ossia se e solo se contiene $P_0,\ldots,P_r$ ossia se e solo se

$$\begin{gathered} u_0\xi_{00}+\ldots+u_n\xi_{0n}=0 \\ \ldots\ldots \\ u_0\xi_{r0}+\ldots+u_n\xi_{rn}=0 \end{gathered}$$

Questo può riguardarsi come un sistema lineare di rango $r+1=n-m$ nelle incognite $u_o,\ldots,u_n$, e come tale, possiede $m+1$ soluzioni linearmente indipendenti da cui tutte le altre dipendono. Se $\underline{a}_i=(a_{i0},\ldots,a_{in})\,, i=0,\ldots,m$ sono tali soluzioni, è chiaro che il sistema ((1)) è proprio un sistema di equazioni per Z. Aggiungiamo che $I_p(Z)=(f_0,\ldots,f_m)$. A tale scopo basta mostrare che $(f_0,\ldots,f_m)$ è radicale.
Infatti è possibile aggiungere a $f_0,\ldots,f_m$ altre $r+1$ forme lineari f_{m+1}, ..., f_n tali che generino $S_1^{(n)}$. Allora l'applicazione:

$$\varphi\colon S^{(n)}\to S^{(n)}$$

ottenuta estendendo per $k-$linearità l'automorfismo di $S_1^{(n)}$ tale che $\varphi(x_i)=f_i$, $i=0,\ldots,n$, è ovviamente un automorfismo di $S^{(n)}$ come $k-$algebra, che trasforma l'ideale $(x_0,\ldots,x_m)$ che è radicale, in $(f_0,\ldots,f_m)$.
Un chiuso del tipo suddetto si dice sottospazio lineare di dimensione r di ${\mathbb{P}^n}_k$ (retta se $r=1$, piano se $r=2$): si noti che il $\varnothing$ è da considerarsi sottospazio di dimensione -1, ogni punto è un sottospazio di dimensione 0. $\mathbb{P}^n_k$ di solito si considera come sottospazio di dimensione n.
Se Z_1, Z_2 sono sottospazi di $\mathbb{P}^n$, è ovvio che $Z_1\cap Z_2$ è un sottospazio che dicesi sottospazio intersezione di Z_1, Z_2. Inoltre è non vuota la famiglia $\mathcal{F}$ dei sottospazi di $\mathbb{P}^n$, contenenti $Z_1\cup Z_2$.
Posto

$$\overline{Z_1Z_2}=\bigcap_{X\in\mathcal{F}}X$$

è chiaro che $\overline{Z_1Z_2}$ è ancora un sottospazio che dicesi sottospazio congiungente di Z_1 e Z_2. Se r_1 e r_2 sono le dimensioni di Z_1 e Z_2 rispettivamente e, r, r' quelle di $\overline{Z_1Z_2}$ e di $Z_1\cap Z_2$, si ha la relazione, nota come regola di Grassmann: $r_1+r_2=r+r'$.
Si noti che se Z è un sottospazio di dimensione r e se $P_0,\ldots,P_r$ ne sono punti linearmente indipendenti, si ha $Z=P_0\vee\cdots\vee P_r$. Inoltre l'applicazione

$$\psi\colon\ [\lambda_0,\ldots,\lambda_r]\in\mathbb{P}^r\to\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_rP_r\in Z$$

è un omeomorfismo. È chiaro che ψ è biettiva e il lettore facilmente verificherà che è continua. Proviamo che è chiusa. Sia $P_i=\left[\underline{\xi}_i\right]$, $i=0,\ldots,r$ e sia

$g \in {}^hS^{(r)}$ un polinomio non costante. Allora un punto $P = [\underline{\xi}]$ appartiene a $\psi\left(Z_p(g)\right)$ se e solo se

$$\begin{aligned} \xi_0 =& \lambda_0\xi_{00} + \cdots + \lambda_r\xi_{r0} \\ \ldots&\ldots\ldots \\ \xi_n =& \lambda_0\xi_{0n} + \cdots + \lambda_r\xi_{rn} \end{aligned} \tag{2}$$

Per l'indipendenza lineare di $P_0, \ldots, P_r$, esistono $r+1$ righe, ad esempio le prime, della matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi_{00} & \ldots & \xi_{r0} \\ \ldots & \ldots\ldots & \\ \xi_{0n} & \ldots & \xi_{rn} \end{Vmatrix}$$

che sono linearmente indipendenti. Dalle prime $r+1$ equazioni tra le (2) è possibile allora ricavare le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} \lambda_0 =& \eta_{00}\xi_0 + \cdots + \eta_{0r}\xi_r \\ \ldots&\ldots \\ \lambda_r =& \eta_{r0}\xi_0 + \cdots + \eta_{rr}\xi_r \end{aligned} \tag{3}$$

con $\eta_{ij} \in k$. Allora (2) è verificato se e solo se valgono le seguenti relazioni:

$$\xi_j = \lambda_0\xi_{0j} + \cdots + \lambda_r\xi_{rj} \qquad j = r+1, \ldots, n$$

$$g\left(\lambda_0, \ldots, \lambda_r\right) = 0$$

dove $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ sono espresse dalle (3). In definitiva $\psi\left(Z_p(g)\right)$ è definito dalle equazioni:

$$g\left(\eta_{00}x_0 + \cdots + \eta_{0r}x_r, \ldots, \eta_{r0}x_0 + \cdots + \eta_{rr}x_r\right) = 0$$

$$x_j = \sum_{i=0}^{r} \xi_{ij}\left(\sum_{h=1}^{r} \eta_{ih}x_h\right) \qquad j = r+1, \ldots, n$$

ed è quindi un chiuso.
Consideriamo ora, come di consueto, $\mathbb{A}^n = U_0 \subset \mathbb{P}^n$.
Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{A}^n$ non vuoto si dice sottospazio affine di dimensione r di $\mathbb{A}^n$, se esiste un sottospazio Z di dimensione r di $\mathbb{P}^n$ tale che $Z \cap \mathbb{A}^n = X$. Il vuoto si considera come sottospazio affine di dimensione -1. Se Z è definito dal sistema (1), X sarà definito dal sistema

$$\begin{aligned} a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n + a_{00} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots& \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m0} &= 0 \end{aligned}$$

che è compatibile, per l'ipotesi $X \neq \emptyset$. Ne sia $\underline{\xi}$ una soluzione. Si consideri poi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{aligned} a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

associato a (2). Poiché le equazioni di (2) sono linearmente indipendenti e (2) è compatibile, anche le equazioni di (4) sono linearmente indipendenti, sicchè (4) possiede $r = n - m - 1$ soluzioni linearmente indipendenti $\underline{\xi}_i = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n})$. Tutti e soli i punti di X sono del tipo

$$\underline{\xi} = \underline{\xi} + \lambda_1 \underline{\xi}_1 + \cdots + \lambda_r \underline{\xi}_r$$

Viceversa, siano $\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_r$ punti di $\mathbb{A}^n$ linearmente indipendenti e sia $\underline{\xi} \in \mathbb{A}^n$. Si può considerare l'applicazione

$$\overline{\psi}\colon\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{A}^r \to \underline{\xi} + \lambda_1 \underline{\xi}_1 + \cdots + \lambda_r \underline{\xi}_r \in \mathbb{A}^n.$$

Mostriamo che $\overline{\psi}(\mathbb{A}^r)$ è un sottospazio di dimensione r di $\mathbb{A}^n$. Infatti consideriamo i punti

$$\begin{aligned} P_0 &= [1, \xi_1, \ldots, \xi_n] \\ P_i &= [0, \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}] \qquad i = 1, \ldots, r \end{aligned}$$

di $\mathbb{P}^n_k$. Essi sono linearmente indipendenti. Inoltre considerata l'applicazione

$$\psi\colon\ [\lambda_0, \ldots, \lambda_r] \in \mathbb{P}^r \to \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_r P_r \in \mathbb{P}^n$$

è chiaro che $\overline{\psi}$ è restrizione di ψ ad $\mathbb{A}^r \subset \mathbb{P}^r$.
Se $Z = \psi(\mathbb{P}^r)$ è $X = \overline{\psi}(\mathbb{A}^r) = Z \cap \mathbb{A}^n$. È inoltre chiaro che $\overline{\psi}$, quale restrizione di un omeomorfismo,è un omeomorfismo e che $Z = \overline{X}$. È infine ovvio che $\mathcal{I}_a(X)$ è generato da primi membri di (3) e che, viceversa, ogni chiuso di $\mathbb{A}^n$, definito da equazioni lineari è un sottospazio.

Esempio 4.8. La chiusura proiettiva di $\mathbb{A}^n_k$ è $\mathbb{P}^n_k$ ossia $\mathbb{A}^n_k$ è denso in $\mathbb{P}^n_k$.

Esempio 4.9. Se $Z \subseteq {\mathbb{A}_k}^n$ è un chiuso si ha $\overline{Z} = Z \cup Z_\infty$. Infatti $\overline{Z} \cap {\mathbb{A}_k}^n = Z$ in quanto la chiusura di Z in ${\mathbb{A}_k}^n$ coincide con $\overline{Z} \cap {\mathbb{A}_k}^n$. Dunque ogni chiuso (Z) di ${\mathbb{A}_k}^n$ è intersezione di un chiuso $\overline{(Z)}$ e di un aperto $({\mathbb{A}_k}^n)$ di ${\mathbb{P}^n}_k$ cioè è, come si dice, localmente chiuso in ${\mathbb{P}^n}_k$.

Osservazione 11. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un insieme localmente chiuso dato da un sistema di polinomi: $\{f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\}_{\alpha=1,\ldots,m}$; la frase che i polinomi f_α determinano X, può avere un duplice significato:

1. il luogo degli zeri $Z_a(f_1, \ldots, f_m)$ è X;
2. i polinomi f_α generano l'ideale $\mathcal{I}_a(X)$.

Ovviamente il punto (2) è piú forte.

Determineremo ora i chiusi di $\mathbb{A}^2$ e di $\mathbb{P}^2$.
Richiamiamo a tale scopo le prime nozioni di teoria dell'eliminazione. Sia Γ un campo e siano

$$f(x) = a_0x^n + \cdots + a_n, \qquad , g(x) = b_0 + x^m + \cdots + b_m$$

polinomi non nulli in $\Gamma[x]$. Considerato il sistema

$$f(x) = 0,\ g(x) = 0 \tag{5}$$

si dice che esso è compatibile se ammette qualche soluzione nella chiusura algebrica di Γ.
Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (5) sia compatibile è che $f(x)$ e $g(x)$ abbiano qualche divisione comune non costante in $\Gamma[x]$. Una semplice applicazione di questo criterio di compatibilità è il seguente lemma:

Lemma 4.10. ***(Lemma di Eulero)****: Sia $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (5) sia compatibile è che esistano polinomi $h(x)$, $k(x), \in \Gamma[x]$, non nulli, di gradi rispettivamente minori di m ed n tali che*

$$h(x)f(x) = k(x)g(x) \tag{6}$$

Dim. La condizione è necessaria. Infatti se (5) è compatibile, si ha:

$$f(x) = \varphi(x)k(x)\, g(x) = \varphi(x)h(x)$$

con $\varphi(x) \in \Gamma[x]$ di grado positivo e quindi $h(x)$, $k(x)$ verificanti l'asserto. Viceversa, si abbiano $h(x)$, $k(x)$ verificanti la (6) di gradi minori di m, n rispettivamente, e sia inoltre $a_0 \neq 0$. Se $f(x)$, che è di grado n, non avesse fattori comuni con $g(x)$, dovrebbe, per la (6), dividere $k(x)$, polinomio non nullo di grado minore di n, contraddizione. $\square$

L'esistenza di polinomi $h(x)$, $k(x)$ verificanti le condizioni del lemma di Eulero equivale all'esistenza di $m + n$ elementi di Γ

$$c_i, \quad i = 0, \dots, m-1 \text{ non tutti nulli}$$

$$d_j, \quad j = 0, \dots, n-1 \text{ non tutti nulli}$$

tale che

$$\left(c_0x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\right) f(x) = \left(d_0x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\right) g(x) \tag{7}$$

soddisfacenti cioè alle $m + n$ relazioni

$$\begin{cases} a_0 + c_0 = b_0d_0 \\ a_1c_0 + a_0c_1 = b_1d_0 + b_0d_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nc_{m-1} = b_md_{n-1} \end{cases} \tag{8}$$

e si ottengono eguagliando i coefficienti dei termini simili dei due membri delle (7).

Dall'ipotesi che f e g siano non nulli segue poi che se $c_0, \ldots, c_{m-1}$, $d_0, \ldots, d_{n-1}$ verificano la (7) e quindi la (8) e sono non tutti nulli, allora ne $c_0, \ldots, c_{m-1}$ ne $d_0, \ldots, d_{n-1}$ sono tutti nulli. In definitiva il sistema (5) è compatibile, nell'ipotesi che a_0 e b_0 non siano entrambi nulli, se e solo se il sistema lineare omogeneo (8) di $n+m$ equazioni nelle $n+m$ incognite $c_0, \ldots, c_{m-1}$, $d_0, \ldots, d_{n-1}$ ammette soluzioni non banali. La condizione affinchè ciò accada è espressa da:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ & a_0 a_1 & \ldots & a_n \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & a_0 a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 b_1 & \ldots & b_m & \\ & b_0 b_1 & \ldots & b_m \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ & b_0 b_1 & \ldots & b_m \end{Vmatrix}$$

uguale a zero. Il primo membro di (8) si chiama determinante di Sylvester di f e g e il suo annullarsi implica che $a_0 = b_0 = 0$ oppure il sistema (5) è compatibile, ossia che f, g abbiano qualche fattore comune non costante in $\Gamma[x]$.

Ove $a_0, \ldots, a_n, \ldots, b_0, \ldots, b_m$ si considerino come indeterminate su Γ, il determinante di Sylvester può riguardarsi come un polinomio

$$R\left(a_0, \ldots, a_n,\, b_0, \ldots, b_m\right) = R\left(\underline{a},\, \underline{b}\right)$$

in tali indeterminate. Tale polinomio prende il nome di polinomio risultante di f e g.

Consideriamo ora due polinomi $f(x_1,\, x_2)$, $g(x_1,\, x_2) \in A^{(2)}$ che supporremmo non costanti, privi di fattori comuni non costanti. Vogliamo provare che $Z_a\left(f,\, g\right) = Z_a(f) \cap Z_a(g)$ è un insieme finito di $\mathbb{A}^2$. Se f e g hanno gradi rispettivi n e m in r si potrà scrivere

$$\begin{aligned} f(x_1,\, x_2) =& a_0(x_1) x_2^n + \cdots + a_n(x_1) \\ g(x_1,\, x_2) =& b_0(x_1) x_2^m + \cdots + b_m(x_1) \end{aligned}$$

dove $a_i(x_1)$, $b_j(x_1) \in k[x_1]$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$ e $a_0(x_1)$, $b_0(x_1)$ non nulli. Si consideri ora il polinomio

$$R(x_1) = R\left(a_0(x_1), \ldots,\, a_n(x_1);\, b_0(x_1), \ldots,\, b_m(x_1)\right).$$

Esso non è identicamente nullo. Se lo fosse infatti , f e g quali polinomi su $k(x_1)$ avrebbero un fattore comune non costante. Ciò implicherebbe che f e g hanno un fattore comune non costante in $k[x_1,\, x_2]$, il che è assurdo.

Se $f \in k(x_1)[x_2]$, f si può scrivere nel modo seguente:

$$f = c(f) \cdot f_1$$

dove $c(f) \in k(x_1)$, $f_1 \in k[x_1; x_2]$, con i coefficienti di f_1, considerato come polinomio in x_2, privi di fattori comuni non costanti; la suddetta scrittura è unica a meno di prodotto di $c(f)$ per una costante non nulla. Si ha quanto segue:

Lemma 4.11. *Se $f, g \in k(x_1)[x_2]$, si ha $c(f\,g) = c(f) \cdot c(g)$*

Dim. È chiaro che basta ridursi al caso $c(f) = c(g) = 1$, in cui si può assumere che f, g stiano in $k[x_1, x_2]$, con coefficienti , considerati come polinomi in x_2, privi di fattori comuni non costanti. Allora sia

$$\begin{aligned} f =& a_0(x_1)x_2^n + \cdots + a_n(x_1) \\ g =& b_0(x_1)x_2^m + \cdots + b_m(x_1) \end{aligned}$$

per ogni polinomio irriducibile $p(x_1) \in k[x_1]$ siano r il piú piccolo intero tale che $a_r(x_1) \neq 0$ e p non divide a_r e s il piú piccolo intero tale che $b_s(x_1) \neq 0$ e p non divide b_s. Consideriamo il coefficiente di $x_2^{n+m-r-s}$ in $f \cdot g$. Esso sarà:

$$c = a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + \cdots + a_{r-1} b_{s+1}$$

Ora p non divide $a_r b_s$ ma divide ogni altro termine di tale somma, sicchè p non divide c. Ciò prova l'asserto. $\square$

Teorema 4.12. ***(Teorema di Gauss)*** *Se $f \in A^{(2)}$ ha una fattorizzazione del tipo $f = gh$, con $g, h \in K(x_1)[x_2]$, allora*

$$f = c(g)c(h)g_1h_1$$

con $c(g)c(h) \in A^{(1)}$.

Dim. L'unica cosa da provare è l'ultima asserzione, che segue dal fatto che $c(g)c(h) = c(f) \in A^{(1)}$. $\square$

Osserviamo esplicitamente che il teorema di Gauss si può opportunamente estendere a polinomi in piú di due variabili, il che lasciamo la cura al lettore. Tornando alla determinazione di $Z_a(f, g)$ si osservi che, dalla discussione svolta, segue che $(a_1, a_2) \in Z_1(f, g)$ implica che $R(a_1) = 0$. Poichè $R(x_1)$ non è identicamente nullo, a_1 può assumere solo un numero finito di valori. Poichè analogo discorso può ripetersi per a_2, ne segue che $Z_a(f, g)$ è un insieme finito. Se poi f, g hanno un massimo comun divisore non costante $\varphi \in A^{(2)}$, si ha $f = \varphi k$, $g = \varphi h$ con h e k primi tra loro. Si ha:

$$Z_a(f, g) = Z_a(\varphi) \cup Z_a(h, k)$$

dunque $Z_a(f, g)$ è unione di una curva e di un numero finito di punti. Tale ragionamento può ripetersi.

Proposizione 4.13. *Ogni chiuso proprio di $\mathbb{A}^2$ è un sottoinsieme finito o l'unione di una curva con un sottoinsieme finito.*

Tale risultato può estendersi ad un'analoga caratterizzazione dei chiusi propri di $\mathbb{P}^2$. A tale scopo premettiamo le considerazioni che seguono. Dall'analisi precedentemente si ha che : se $f,\, g \in A^{(2)}$ sono polinomi non costanti e se le curve $Z_a(f)$, $Z_a(g)$ hanno infiniti punti comune, allora $f,\, g$ hanno un massimo comun divisore non costante φ. $Z_a(\varphi)$ è una curva contenuta in $Z_a(f,\, g)$, ed è la massima curva contenuta in $Z_a(f,\, g)$. Questa asserzione può considerarsi come una forma debole del teorema di Bezout per le curve affini. Da essa segue che:

Lemma 4.14. *Se $Z = Z_a(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ è una curva, la sua chiusura proiettiva $\overline{Z}$ è ancora una curva e precisamente la curva $Z_p\,(\beta(f))$.*

Dim. Possiamo assumere che $f = 0$ sia l'equazione ridotta di Z e possiamo evidentemente limitarci al caso in cui $f \in A^{(2)}$ sia irriducibile. È ovvio che $Z_p\,(\beta(f)) \supseteq Z_a(f)$ sicchè $Z_p\,(\beta(f)) \supseteq \overline{Z}$. Sia ora $g \in^h S^{(2)}$ un polinomio non costante tale che $Z_p(g) \supseteq Z$. Allora $Z_a\,(\alpha(g)) \supseteq Z$ e dunque, per la precedente asserzione, si ha che f divide (g). Ma allora $\beta(f)$ divide $\beta\,(\alpha(g))$ e dunque divide g. Infatti, com'è facile verificare si ha

$$\beta\,(\alpha(g))\, x_0^{\gamma} = g$$

dunque x_0^{γ} è la massima potenza di x_0 che divide g. In definitiva si trova $Z_P(g) \supseteq Z_P\,(\beta(f))$ e da ciò l'asserto. □

Rileviamo esplicitamente che il lemma (4.14) è caso particolare di un analogo risultato generale, concernente la chiusura proiettiva di ipersuperfici affini, che troveremo in seguito.
Considerando tutto ciò, possiamo finalmente dimostrare il seguente teorema:

Teorema 4.15. *I chiusi propri di $\mathbb{P}^2$ sono i suoi sottoinsiemi finiti o l'unione di una curva con un sottoinsieme finito.*

Dim. Se $Z \subseteq \mathbb{P}^2$ è un chiuso si ha $Z = Z_1 \cup Z_2$ con $Z_1 = \overline{Z \cap \mathbb{A}^2}$, $Z_2 = Z \cap H_0$. L'asserto segue allora da (4.14), (4.13). □

Concludiamo osservando che non vi è alcuna difficoltà, come ci si può convincere, ad estendere il teorema di Bezout in forma debole alle curve di $\mathbb{P}^2$.
Si ottiene il seguente risultato generale:

Teorema 4.16 (Forma debole del teorema di Bezout). *Siano date due curve piane (ossia di $\mathbb{A}^2$ o di $\mathbb{P}^2$) Z_1, Z_2 di equazioni $f = 0, g = 0$ rispettivamente. Sia φ il massimo comun divisore dei polinomi f, g, allora $Z_1 \cap Z_2 = Z(\varphi) \cup Z_3$ dove Z_3 è un insieme finito di punti.*

Da tale proposizione segue infine che i chiusi propri di una curva piana sono unioni di curve in esse contenute.

5 Funzioni regolari e razionali

Allo scopo di dare la definizione di morfismo tra varietà è necessario partire dalle funzioni regolari.

Definizione 5.1. Sia $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ una varietà affine. L'anello

$$A(X) = \frac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(X)}$$

è detto l'anello delle coordinate affini di X.

Proposizione 5.2. *$A(X)$ è un dominio d'integrità.*

Dim.

$$X \text{ varietà } \Leftrightarrow \mathcal{I}_a(X) \text{ primo } \Leftrightarrow A(X) \text{ dominio d'integrità }. \qquad \square$$

Sia considerato $A(X)$ l'anello delle coordinate affini e si definisca una relazione $\mathcal{R}$ nel prodotto cartesiano $A(X) \times A(X) - \{0\}$ nel seguente modo:

$$\forall (f,g),(f',g') \in A(X) \times A(X) - \{0\} \quad (f,g)\mathcal{R}(f',g') \Leftrightarrow fg' = gf'.$$

Lemma 5.3. *La relazione $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.*

Dim. $\mathcal{R}$ è riflessiva, in quanto:

$$\forall (f,g) \in A(X) \times A(X) - \{0\} \quad fg = gf \Rightarrow (f,g)\mathcal{R}(f,g).$$

È simmetrica:

$$\forall (f,g),(f',g') \in A(X) \times A(X) - \{0\} \quad (f,g)\mathcal{R}(f',g') \Rightarrow fg' = gf' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'g = g'f \Rightarrow (f',g')\mathcal{R}(f,g)$$

Infine vale la transitività poiché, se per ogni $(f,g),(f',g'),(f'',g'') \in A(X) \times A(X) - \{0\}$, allora

$$(f,g)\mathcal{R}(f',g') \text{ e } (f',g')\mathcal{R}(f'',g'') \Rightarrow fg' = gf' \text{ e } f'g'' = g'f''.$$

Dunque si ha:

$$\frac{f'}{f''} = \frac{g'}{g''} \qquad g' = \frac{f'}{f''}g'' \qquad f' = \frac{g'}{g''}f''\,.$$

Allora, sostituendo nell'uguaglianza $fg' = gf'$, si ha:

$$f\frac{f'}{f''}g'' = g\frac{g'}{g''}f'' \Rightarrow fg'' = gf'' \Rightarrow (f,g)\mathcal{R}(f'',g''). \quad \square$$

Per il lemma (5.3) la relazione $\mathcal{R}$ determina una partizione in classi di equivalenza

$$[(f,g)]_{\mathcal{R}} = \{(f',g') \in A(X) \times A(X) - \{0\} : (f',g')\mathcal{R}(f,g)\}$$

e la classe di equivalenza sarà denotata con il seguente simbolo:

$$[(f,g)]_{\mathcal{R}} = \frac{f}{g}$$

L'insieme quoziente

$$\frac{A(X) \times A(X) - \{0\}}{\mathcal{R}} = \left\{ \frac{f}{g} : f \in A(X) \text{ e } g \in A(X) - \{0\} \right\}$$

e il suddetto insieme sarà denotato con il simbolo $K(X)$.
$K(X)$ ha la struttura di campo, in quanto è possibile definire l'operazione di addizione e l'operazione di moltiplicazione nel modo seguente:

$$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{fg' + gf'}{gg'}$$

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{ff'}{gg'}$$

ed è chiaro che la struttura algebrica $(K(X), +, \cdot)$ è un campo.

Definizione 5.4. $K(X)$ è detto campo delle funzioni razionali.

Ora si passerà a definire una funzione regolare su un sottoinsieme aperto di una varietà affine.

Definizione 5.5. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una varietà affine e sia $P \in X$ un punto. L'insieme

$$\mathcal{O}_{X,P} = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in A(X) \text{ con } g(P) \neq 0 \right\} \subseteq K(X)$$

è chiamato anello locale di X nel punto P.

Definizione 5.6. Sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto della varietà affine. L'insieme

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$$

è chiamato anello delle funzioni regolari sull'aperto U.

Definizione 5.7. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una varietà affine e sia $f : X \to k$ una funzione e inoltre sia $P \in X$. La funzione f è regolare in P se esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ del punto P e se esistono due polinomi $g, h \in A^{(n)}$ con $h(Q) \neq 0$, per ogni $Q \in U$ e $f_{|U} = \dfrac{g}{h}$. In particolare la funzione f è regolare se è regolare in ogni punto di U.

Teorema 5.8. *Le condizioni fornite nelle definizioni (5.6) (5.7) di funzione regolare in un punto sono equivalenti.*

Dim. Sia $f \in \mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$, allora:

$$f \in \mathcal{O}_{X,P} \quad \forall P \in U \Rightarrow f(P) = \frac{g(P)}{h(P)} \text{ con } h(P) \neq 0 \quad \forall P \in U.$$

Viceversa; sia $f : X \to k$ una funzione regolare secondo la definizione (5.7), si ha

$$f_{|U} = \frac{g}{h}$$

con g, h polinomi con $h(P) \neq 0$, per ogni $P \in U \subseteq X$ aperto di X. Allora $f \in \mathcal{O}_X(U)$. $\square$

Proposizione 5.9. *Sia* $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ *una varietà affine e sia* $f \in A(X)$. *Si consideri l'insieme*

$$X_f = \{P \in X : f(P) \neq 0\}$$

allora

$$\mathcal{O}_X(X_f) = A(X)_f$$

dove $A(X)_f = \left\{ \dfrac{g}{f^r} : g \in A(X) \text{ con } r \geq 0 \right\}$. *In particolare* $\mathcal{O}_X(X) = A(X)$.

Dim. Sia $P \in X_f$, quindi $f(P) \neq 0$ e sia $\varphi \in A(X)_f$, allora

$$\varphi = \frac{g}{f^r} \text{ con } g, f \in A(X) \text{ e } r \geq 0$$

ponendo $r = 1$, ottengo

$$\varphi = \frac{g}{f} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}_X(X_f) \Rightarrow A(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X(X_f). \quad \square$$

Definizione 5.10. L'anello $S^{(n)}(X) = \dfrac{S^{(n)}}{\mathcal{I}_p(X)}$, anche denotato con $S(X)$, prende il nome di anello delle coordinate (omogenee) di X.

Sia $V \subseteq \mathbb{P}_k^n$ un insieme localmente chiuso, sia $f : V \to k$ una funzione e $P \in V$.

Definizione 5.11. La funzione f si dice regolare in P se esiste un intorno aperto U di P in V e se esistono polinomi omogenei dello stesso grado $g, h \in S^{(n)}$, con $Z_p(h) \cap U = \varnothing$, tale che la restrizione di $f_{|U} = \dfrac{g}{h}$ (si noti che $\dfrac{g}{h}$, quale funzione su ${\mathbb{P}^n}_k - Z_p(h) \supseteq U$ è ben definita).

Definizione 5.12. f è regolare in V se lo è in ogni punto di V.

Definizione 5.13. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ una varietà proiettiva e sia $P \in V$ un punto. L'insieme

$$\mathcal{O}_{V,P} = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in S(X) \text{ con } g(P) \neq 0 \right\}$$

è chiamato anello locale di V nel punto P.

Definizione 5.14. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ una varietà proiettiva e $U \subseteq V$ ne sia un aperto. Denotiamo

$$\mathcal{O}_V(U) = \{f : V \to k : f \text{ regolare in } U\}$$

l'insieme delle funzioni regolari.

Ogni funzione costante è regolare e se $f,\, g \in \mathcal{O}(U)$ le funzioni

$$f + g \colon P \in U \to f(P) + g(P) \in K$$

$$fg \colon P \in U \to f(P) \cdot g(P) \in K$$

sono regolari in U. $\mathcal{O}_V(U)$ è una $K-$algebra, la $K-$algebra delle funzioni regolari su U.
Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n{}_k$ una varietà proiettiva e siano $U \subseteq V$ e $U' \subseteq V$ due aperti con $U' \subseteq U$, allora si può considerare la seguente applicazione:

$$\rho_U^{U'} : f \in \mathcal{O}(U) \to f_{|U'} \in \mathcal{O}(U')$$

e se $f \in \mathcal{O}(U)$, si porrà $f^{-1}(0) = Z_V(f)$.

Proposizione 5.15. *Se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ è localmente chiuso e $f \in \mathcal{O}(V)$, allora f è continua, ove si pensi $k = \mathbb{A}^1$ dotato della topologia di Zariski.*

Dim. Basta far vedere che la controimmagine di un chiuso è un chiuso, cioè che

$$\forall a \in K,\ f^{-1}\left(a\right) = Z_V\left(f - a\right) \text{ è chiuso in } V.$$

Ciò può verificarsi localmente, infatti

$$Y \subseteq V \text{ chiuso } \Leftrightarrow \forall P \in Y, \exists U \subseteq V \text{ intorno aperto di } P : U \cap Y \text{ chiuso in } U$$

Sia $P \in Z_V(f - a)$, allora $(f - a)_{|U} = \dfrac{g}{h}$ con $g,\, h \in S^{(n)}$ polinomi omogenei dello stesso grado e $U \subseteq V$ intorno aperto di P e inoltre $Z_p(h) \cap U = \varnothing$. Allora

$$Z_V\left(f - a\right) \cap U = Z_p(g) \cap U$$

che è chiuso in U, dunque anche $Z_V(f - a) \cap U$ è un chiuso, e per quanto detto prima, si ha che $Z_V(f - a) = f^{-1}(a)$ è un chiuso, dunque l'asserto. $\square$

Proposizione 5.16. *Se V è irriducibile e $f,\, g \in \mathcal{O}(V)$ sono tali che esiste un aperto non vuoto U di V tale che $f_{|U} = g_{|U}$ allora $f = g$.*

Dim. Per provarla si ricordi che se V è irriducibile, ogni aperto non vuoto è denso in V. Si noti che $Z_V(f-g)$ è un chiuso per la proposizione (5.15) che contiene l'aperto denso U e quindi $f=g$. $\square$

Sia V una varietà quasi–proiettiva e si consideri il seguente insieme

$$\mathcal{K}(V)=\left\{(U,f):U=\overset{\circ}{U}\subseteq V \text{ e } f\in\mathcal{O}(U)\right\}.$$

Si definisca in esso la seguente relazione $\mathcal{R}$:

$$(U,\,f)\,\mathcal{R}\,(U',\,f')\Leftrightarrow f_{|U\cap U'}=f'_{|U\cap U'}$$

Si osservi che, poichè V è irriducibile, si ha $U\cap U'\neq\varnothing$.

Proposizione 5.17. *La relazione $\mathcal{R}$, cosí definita è una relazione di equivalenza.*

Dim. È chiaro che sia riflessiva e simmetrica. Per la transitività, si ha:

$$(U,f)\mathcal{R}(U',\,f') \text{ e } (U',\,f')\mathcal{R}(U'',\,f'')\Rightarrow f_{|U\cap U'}=f'_{|U\cap U'} \text{ e } f'_{|U'\cap U''}=f''_{|U'\cap U''}$$

Considerando $U\cap U'\cap U''\subseteq U\cap U''$ quindi per la (5.16), f e f'' coincidono su $U\cap U''$. $\square$

Denoteremo con $K(V)=\dfrac{\mathcal{K}(V)}{\mathcal{R}}$, ovvero

$$K(V)=\left\{[(U,\,f)]_{\mathcal{R}} \text{ con} \, U=\overset{\circ}{U}\subseteq V \text{ e} \, f\in\mathcal{O}(U)\right\}$$

Muniremo $K(V)$ di una struttura di campo, definendo l'operazione di addizione $+$ e di moltiplicazione $\cdot$ nel seguente modo:

$$[(U,f)]_{\mathcal{R}}+[(U',f')]_{\mathcal{R}}=[(U\cap U',f+f')]_{\mathcal{R}}$$
$$[(U,f)]_{\mathcal{R}}\cdot[(U',f')]_{\mathcal{R}}=[U\cap U',f\cdot f']_{\mathcal{R}}$$

$(K\left(V\right),+)$ è un gruppo abeliano dove l'elemento neutro è $[(V,0)]_{\mathcal{R}}$, e l'elemento opposto è del tipo $[(U,-f)]_{\mathcal{R}}$, per ogni $[(U,f)]_{\mathcal{R}}\in K(V)$, altrettanto $(K(V)-\{0\}\,,\cdot)$ è un gruppo abeliano, in cui l'inverso di ogni elemento $[(U,f)]_{\mathcal{R}}\in K(V)-0$ è del tipo

$$[(U,\,f)]^{-1}=\left[\left(U-Z_U(f),\,\frac{1}{f}\right)\right].$$

Definizione 5.18. $K(V)$ si dirà campo delle funzioni razionali di V.

Osservazione 12. Se $f\in\mathcal{O}(V)$, $Z_V(f)$ è un chiuso e $V-Z_V(f)=U_V(f)$ è un aperto, detto aperto principale associato a f. In $U_V(f)$ la funzione $\dfrac{1}{f}$ è ben definita e regolare. Tenendo ancora presente la (5.16) si verifica che la definizione è ben posta.

Osservazione 13. $(K(V), +, \cdot)$ è un sovracampo di k, attraverso l'immersione di k in $K(V)$ data da

$$a \in k \to [(V,\, a)] \in K(V).$$

Osservazione 14. Per ogni aperto non vuoto $U \subseteq V$, $K(V)$ è un sovracampo di $\mathcal{O}(U)$ in $K(V)$ essendo data da

$$\rho_U : \mathcal{O}(U) \to [U,\, f] \in K(V).$$

Definizione 5.19. Sia W una sottovarietà di V, cioè W è un varietà quasi-proiettiva. Si definisce l'insieme delle funzioni razionali definite in W

$$\mathcal{O}_{V,W} = \{[U,\, f] \in K(V) : \exists\, (U',\, f') \in [U,\, f] \quad U' \cap W \neq \varnothing\}\,.$$

Proposizione 5.20. *$\mathcal{O}_{V,W}$ è un sottoanello di $K(V)$.*

Dim. Siano $[U,\, f]\,, [U', f'] \in \mathcal{O}_{V,W}$, allora è ovvio che:

$$[U,\, f] + [U', f'] = [U \cap U',\; f + f'] \in \mathcal{O}_{V,W}$$

in quanto $(U \cap U') \cap W = (U \cap W) \cap (U' \cap W) \neq \varnothing$ per l'irriducibilità di W. Analogamente $[U,\, f] \cdot [U',\, f'] = [U \cap U',\; f \cdot f'] \in \mathcal{O}_{V,W}$, allora $\mathcal{O}_{V,W}$ è un sottoanello di $K(V)$. $\square$

È possibile considerare il sottoinsieme $\mathfrak{m}_{V,\,W}$ di $\mathcal{O}_{V,W}$ così definito:

$$\mathfrak{m}_{V,\,W} = \{[U,\, f] : Z_U(f) \supseteq W \cap U \neq \varnothing\}$$

$\mathfrak{m}_{V,\,W}$ è un ideale di $\mathcal{O}_{V,W}$.

Teorema 5.21. *$(\mathcal{O}_{V,W}, \mathfrak{m}_{V,W})$ è un anello locale con campo residuo $K(W)$.*

Dim. Si dimostrerà che:

$$(\mathcal{O}_{V,W}, \mathfrak{m}_{V,W}) \text{ locale } \Leftrightarrow \mathcal{O}_{V,W} - \mathfrak{m}_{V,W} \text{ insieme di elementi invertibili.}$$

Sia considerato un elemento $[U,\, f] \in \mathcal{O}_{V,W} - \mathfrak{m}_{V,\,W}$, allora

$$[U,\, f] \in \mathcal{O}_{V,W} - \mathfrak{m}_{V,\,W} \Leftrightarrow [U, f] \in \mathcal{O}_{V,W} \text{ e } [U, f] \notin \mathfrak{m}_{V,W} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U \cap W \neq \varnothing \text{ e } Z_U(f) \nsupseteq U \cap W.$$

L'elemento $[U, f] \in \mathcal{O}_{V,W}$ è invertibile in $K(V)$ e il suo inverso è:

$$[U, f]^{-1} = \left[\left(U - Z_U(f), \frac{1}{f}\right)\right]$$

e denotando con $U' = U - Z_U(f)$, si dimostri che $\left[U', \dfrac{1}{f}\right] \in \mathcal{O}_{V,W}$, ovvero bisogna far vedere che $U' \cap W \neq \varnothing$. Dunque:

$$U' \cap W = (U - Z_U(f)) \cap W = (U \cap W) - (Z_U(f) \cap W) \neq \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [U,\, f]^{-1} = \left[U',\, \frac{1}{f}\right] \in \mathcal{O}_{V,W} \Rightarrow [U,\, f] \text{ invertibile in } \mathcal{O}_{V,W}.$$

$Z_U(f) \cap U \cap W$ è un chiuso proprio di $U \cap W$ (e quindi di U), oppure è vuoto. Sia $[U,\, f]$ invertibile in $\mathcal{O}_{V,W}$, l'inverso è $\left[U - Z_U(f),\, \frac{1}{f}\right]$. Dimostriamo che non appartiene a $\mathfrak{m}$, cioè che $Z_U(f) \not\supseteq U \cap W$.
Se per assurdo $Z_U(f) \supseteq U \cap W$ allora

$$\begin{aligned} U' \cap W &= (U - Z_U(f)) \cap W = \\ &= (U \cap W) - (Z_U(f) \cap U \cap W) = \\ &= (U \cap W) - (U \cap W) = \varnothing \end{aligned}$$

Dunque $U' \cap W = \varnothing$ e quindi $\left[U',\, \frac{1}{f}\right] \notin \mathcal{O}_{V,W}$

Dimostriamo che $\dfrac{\mathcal{O}_{V,W}}{\mathfrak{m}_{V,\,W}} \simeq K(W)$. Sia considerata la seguente applicazione:

$$\varphi_{U,\,W} \colon\; [U,\, f] + \mathfrak{m}_{V,\,W} \to \left[U \cap W,\, f_{|U \cap W}\right] \in K(W).$$

La funzione è ben posta, in quanto:

$$\begin{aligned} [U,\, f] + \mathfrak{m}_{V,\,W} = [U',\, f'] + \mathfrak{m}_{V,\,W} &\Leftrightarrow [U,\, f] - [U',\, f'] \in \mathfrak{m}_{V,\,W} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [U \cap U',\, f - f'] \in \mathfrak{m}_{V,W} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Z_{U \cap U'}(f - f') \supseteq (U \cap U') \cap W \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f = f' \text{ su } U \cap U' \cap W \end{aligned}$$

Inoltre tale applicazione è iniettiva, poiché, considerando $\left[U \cap W,\, f_{|U \cap W}\right] = [U' \cap W\, |_{U' \cap W}]$ si ha $(U \cap W) \cap (U' \cap W) \neq \varnothing$ perchè W è irriducibile e $f_{|U \cap W \cap U'} = f'_{|U' \cap W \cap U}$.
Infine $\varphi_{U,W}$ è suriettiva; infatti sia $[U',\, f'] \in K(W)$ e sia $P \in U'$. Esiste un aperto U'' di U' passante per P tale che $f' = \dfrac{g}{h}$ in $U'' \subseteq U' \subseteq W$, con $g,\, h \in S_d^{(n)}$ e $U'' \cap Z_p(h) = \varnothing$. Quindi U'' è un aperto in W dunque esiste $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{P}^n$ aperto tale che $U'' = \widetilde{U} \cap W$. Possiamo supporre che $\widetilde{U} \cap Z_p(h) = \varnothing$ perchè $U'' \cap Z_p(h) = \varnothing$. Poniamo $U = \widetilde{U} \cap V$ e consideriamo $f = \dfrac{g}{h}$ in U. f è regolare, perchè U è un aperto, $P \in U$ e $U \cap Z_p(h) \subseteq \widetilde{U} \cap Z_p(h) = \varnothing$. Dimostriamo che $\varphi_{V,\,W}([U,\, f] + \mathfrak{m}_{V,\,W}) = [U \cap W,\, f\, |_{U \cap W}]$ è uguale a $[U',\, f']$.
Ciò è vero se e solo se $U \cap U' \cap W \neq \varnothing$, (vero perché W è irriducibile) e $f\, |_{U \cap W \cap U'} = f'\, |_{U \cap W \cap U'}$.
Ma $U \cap W \cap U' = \left(\widetilde{U} \cap V\right) \cap U' \cap W = \left(\widetilde{U} \cap W\right) \cap U' = U'' \cap U' = U''$.

Quindi $U \cap U' \cap W = U''$ su cui $f' = \dfrac{g}{h}$ per ipotesi e poichè $U'' \subseteq U, f = \dfrac{g}{h}$. Dunque $f' = f$ in $U' \cap U \cap W$ ed è suriettiva. $\square$

Definizione 5.22. L'anello locale $(\mathcal{O}_{V,W}, \mathfrak{m}_{V,W})$ si dice anello locale di W in V.

Si noti che per ogni aperto $U \subseteq V$ tale che $U \cap W \neq \varnothing$ si ha un omomorfismo iniettivo:

$$\rho_U : f \in \mathcal{O}(U) \to [U, f] \in \mathcal{O}_{V,W}$$

Risulta che

$$\rho_U^{-1}(\mathfrak{m}_{V,W}) = \{f \in \mathcal{O}(U) : Z_U(f) \supseteq U \cap W\} = \mathcal{I}_U(W)$$

ed è l'ideale di $\mathcal{O}(U)$.
Siano ancora V, W come prima e sia U un aperto non vuoto di V tale che $W' = U \cap W \neq \varnothing$. Ha allora senso considerare l'anello locale $\mathcal{O}_{U,W'}$ di W' in U. Si ha quanto segue :

Lemma 5.23. *$\mathcal{O}_{U,W'} \simeq \mathcal{O}_{V,W}$. In particolare $K(V) \simeq K(U)$.*

Dim. Si ha rispettivamente:

$$\mathcal{O}_{V,W} = \left\{ [U, f] \in K(V) : U = \overset{\circ}{U} \subseteq V \quad f \in \mathcal{O}(U) \text{ e } U \cap W \neq \varnothing \right\}$$

$$\mathcal{O}_{U,W'} = \left\{ [U', f'] \in K(U) : U' = \overset{\circ}{U'} \subseteq U \quad f \in \mathcal{O}(U') \text{ e } U' \cap W' \neq \varnothing \right\}.$$

Se $U' \subseteq U \subseteq V$ è un aperto di U, lo sarà anche in V.

$$\begin{aligned} [U', f'] \in \mathcal{O}_{U,W'} &\Rightarrow [U', f'] \text{ è definito in } W' \Rightarrow \\ &\Rightarrow W' \cap U' \neq \varnothing \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} U' \cap W \supseteq U' \cap W' \neq \varnothing \Rightarrow U' \cap W \neq \varnothing &\Rightarrow \\ &\Rightarrow [U', f'] \text{ è definito in } W' \Rightarrow \\ &\Rightarrow [U', f'] \in \mathcal{O}_{V,W} \end{aligned}$$

Esiste dunque un monomorfismo

$$[U', f'] \in \mathcal{O}_{U,W'} \to [U', f'] \in \mathcal{O}_{V,W}$$

Dimostriamo che è suriettivo, cioè, essendo $[U'', f''] \in \mathcal{O}_{V,W}$ $(U'' \cap W \neq \varnothing)$, esso proviene da $\left[U'' \cap U, f''_{|U'' \cap U}\right]$ e che quest'ultima funzione razionale appartiene a $\mathcal{O}_{U,W'}$.
Si ha $U'' \cap U$ aperto di U.

$$(U'' \cap U) \cap W' = U'' \cap U \cap W = (U'' \cap W) \cap (U \cap W) \neq \varnothing$$

in quanto intersezione di aperti non vuoti di W che è irriducibile.
Inoltre $[U'' \cap U,\, f'' \mid_{U'' \cap U}] \in \mathcal{O}_{V,\,W}$ perchè $U'' \cap U \cap W = (U'' \cap W) \cap (U \cap W) \neq \varnothing$ ed è ovviamente uguale a $[U'',\, f'']$. In particolare $K(V) \simeq K(U)$. Infatti $\mathcal{O}_{V,\,V} = K(V)$ e $\mathcal{O}_{U,\,U} = K(U)$ e l'isomorfismo segue dal precedente isomorfismo. $\square$

Osservazione 15. Se $V \subseteq \mathbb{A}^n$ è una varietà affine, denoteremo con $x_1, \ldots, x_n$ le immagini in $A(V)$, mediante l'epimorfismo canonico $A^{(n)} \to A(V)$ di $x_1, \ldots, x_n$. Ovviamente $A(V)$, è generato, come $K-$algebra, da $x_1, \ldots, x_n$.
Allo stesso modo se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva, si denoteranno con $x_0, \ldots, x_n$, le immagini in $S(V)$ mediante l'epimorfismo canonico $S^{(n)} \to S(V)$, di $x_o, \ldots, x_n$. Allora $S(V) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} S(V)_d$ e $S(V)_d$ è generato, quale $K-$spazio vettoriale dai monomi di grado d in $x_0, \ldots, x_n$.
In definitiva se $f\,(x_1, \ldots, x_n) \in A^{(n)}$ la sua immagine in $A(V)$ si denoterà ancora con $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ e analogo discorso vale nel caso proiettivo.

Sia V una varietà affine e sia $P \in V$ un punto della varietà. Si definisca il seguente insieme:

$$\mathfrak{m}_P = \{f \in A(V) : f(P) = 0\} \subseteq A(V).$$

Proposizione 5.24. *$\mathfrak{m}_P$ è un ideale di $A(V)$.*

Dim. Presi $f, g \in \mathfrak{m}_p$ e preso $h \in A(V)$, risulta che:

$$f(P) = 0, g(P) = 0 \Rightarrow f(P) + g(P) = 0 \Rightarrow f + g \in \mathfrak{m}_P$$

$$(hf)(P) = h(P)f(P) = 0 \Rightarrow hf \in \mathfrak{m}_P$$

dunque $\mathfrak{m}_P$ è un ideale di $A(V)$. $\square$

In particolare è possibile scrivere $\mathfrak{m}_P$ nel seguente modo:

$$\mathfrak{m}_P = \{f + \mathcal{I}_a(V) : f(P) = 0\}$$

, ovvero

$$\mathfrak{m}_P = \frac{\mathcal{I}_a(P)}{\mathcal{I}_a(V)}.$$

Proposizione 5.25. *$\mathfrak{m}_P$ è un ideale massimale di $A(V)$.*

Dim. Sia $P \in V$, si ha $\{P\} \subseteq V$ è una sottovarietà minimale, dunque $\mathcal{I}_a(P)$ è un ideale massimale in $A^{(n)}$, allora:

$$\mathcal{I}_a(P) \text{ massimale in } A^{(n)} \Rightarrow \frac{\mathcal{I}_a(P)}{\mathcal{I}_a(V)} \text{ massimale in } A(V).$$

Si può dimostrare che ogni ideale massimale di $A(V)$ è di questo tipo: infatti se $I \subseteq A^{(n)}$ è un ideale massimale tale che

$$\frac{I}{\mathcal{I}_a(V)} \supseteq \frac{\mathcal{I}_a(P)}{\mathcal{I}_a(V)} \Rightarrow I \supseteq \mathcal{I}_a(P).$$

Essendo I massimale, allora I è radicale e quindi $I = \mathcal{I}_a(X)$, dove $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$. Ne segue

$$I \supseteq \mathcal{I}_a(P) \Rightarrow \mathcal{I}_a(X) \supseteq \mathcal{I}_a(P) \Rightarrow X \subseteq \{P\}.$$

Poiché $\{P\}$ è una sottovarietà minimale, segue

$$X = \varnothing \text{ o } X = \{P\}.$$

Dunque

$$I = \mathcal{I}_a(\varnothing) = A^{(n)} \text{ o } I = \mathcal{I}_a(P) \Rightarrow \frac{I}{\mathcal{I}_a(V)} = A(V) \text{ o } \frac{I}{\mathcal{I}_a(V)} = \frac{\mathcal{I}_a(P)}{\mathcal{I}_a(V)}. \qquad \square$$

Proposizione 5.26. *$\mathfrak{m}_P$ è un ideale primo.*

Dim. Siano $f, g \in A(V)$, tali che $fg \in \mathfrak{m}_P$. Allora:

$$fg \in \mathfrak{m}_p \Rightarrow 0 = (fg)(P) = f(P)g(P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(P) = 0 \text{ o } g(P) = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{m}_P \text{ o } g \in \mathfrak{m}_P \Rightarrow \mathfrak{m}_P \text{ primo.}$$

$\square$

È determinata ora una corrispondenza biunivoca tra gli ideali massimali di $A(V)$ e i punti di V:

$$V \to \{\text{insieme degli ideali massimali di } A(V)\}$$

$$P \to \mathfrak{m}_P.$$

Enunciamo ora i seguenti fondamentali teoremi:

Teorema 5.27. *Sia $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine. Allora:*

(a) $\mathcal{O}(V) = A(V)$;
(b) per ogni sottovarietà W di V, $\mathcal{I}_V(W)$ è un ideale primo di $\mathcal{O}(V)$ e ogni ideale primo di $\mathcal{O}(V)$ si ottiene in questo modo, inoltre $\mathcal{I}_V(W)$ è massimale se e solo se W è un punto;
(c) se W è una sottovarietà di V, $\mathcal{O}_{V,W} = \mathcal{O}(V)_{\mathcal{I}_V(W)}$.

Dim. Si parta col dimostrare il punto (a). Poiché ogni polinomio $f \in A^{(n)}$ si può riguardare come una funzione regolare, in quanto $f = \dfrac{f}{1}$, si può definire in V un omomorfismo naturale:

$$\alpha\colon f \in A^{(n)} \to f \in \mathcal{O}(V).$$

Si noti che

$$Ker\alpha = \{f \in A^{(n)} : f(P) = 0 \quad \forall P \in V\} = \mathcal{I}_a(V).$$

Per il teorema di omomorfismo:

$$\exists! \alpha' \colon \frac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V)} \to \mathcal{O}(V) : \alpha' \text{ monomorfismo}$$

in particolare, sapendo che $A(V) = \dfrac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V)}$,

$$\alpha' \colon A(V) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$$

Si dimostri che α' è suriettiva. Per le proposizioni (5.25) e (5.26) ha senso considerare $A(V)_{\mathfrak{m}_P}$. L'applicazione α' induce un monomorfismo α'_P

$$\begin{tikzcd} \alpha'_P\colon A(V)_{\mathfrak{m}_P} \arrow[r] & \mathcal{O}_{V,\,P} \\ A(V) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\alpha'"] & \mathcal{O}(V) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

dove

$$\alpha'_P \colon \frac{f}{g} \in A(V)_{\mathfrak{m}_P} \to \left[U,\, \left(\frac{f}{g}\right)_{|U}\right] \in \mathcal{O}_{V,\,P}$$

con $U = (\mathbb{A}^n_k - Z_a(g)) \cap V$, cioè l'aperto principale associato a g. Questa applicazione è ben posta, poichè:

$$\frac{f}{g} \in A(V)_{\mathfrak{m}_P} \Rightarrow f \in A(V),\, g \in A(V) - \mathfrak{m}_P \Rightarrow g(P) \neq 0 \Rightarrow P \notin Z_a(g).$$

Dunque $U = (\mathbb{A}^n_k - Z_a(g)) \cap V$ è un intorno aperto di P e inoltre $\dfrac{f}{g}$ è regolare in $A^{(n)}$ e dunque in U. Allora $\left[U,\, \left(\dfrac{f}{g}\right)_{|U}\right] \in \mathcal{O}_{V,\,P}$. Risulta che:

- α'_P è un omomorfismo di $k-$algebre;
- α'_P è iniettiva;

  $$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \text{ su } V \Leftrightarrow fg' = gf' \Leftrightarrow fg' - gf' = 0 \text{ su } V$$

  allora $fg' - gf' = 0$ su ogni aperto e in particolare:

  $$fg' = gf' \text{ su } U \Leftrightarrow \frac{f}{g} = \frac{f'}{g} \text{su } U$$

  con U aperto di V.

- α'_P è suriettiva; ogni funzione di $\mathcal{O}_{V,P}$ è per definizione una coppia del tipo $\left[U, \left(\frac{f}{g}\right)_{|U}\right]$.

Dunque $A(V)_{\mathfrak{m}_P} \simeq \mathcal{O}_{V,\,P}$. Abbiamo quindi

$$A(V) \subseteq \mathcal{O}(V) \subseteq \bigcap_{P\in V} \mathcal{O}_{V,\,P} = \bigcap_{\mathfrak{m}} A(V)_{\mathfrak{m}}$$

La prima inclusione è tramite la α', mentre la seconda inclusione è perché per ogni W, $\mathcal{O}(V) \subseteq \mathcal{O}_{V,\,W}$ e dunque si ha $\mathcal{O}(V) \subseteq \bigcap_W \mathcal{O}_{V,\,W}$ e l'ultima intersezione è fatta su tutti gli ideali massimali di $A(V)$.
Inoltre $\mathcal{O}_{V,\,P} \simeq A(V)_{\mathfrak{m}_P}$ per ogni P allora $\bigcap_{P\in V} \mathcal{O}_{V,\,P} = \bigcap_{P\in V} A(V)_{\mathfrak{m}_P}$, ma, ricordando che gli ideali massimali di $A(V)$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di V, $\bigcap_{P\in V} A(V)_{\mathfrak{m}_P} = \bigcap_{\mathfrak{m}} A(V)_{\mathfrak{m}}$, in quanto abbiamo visto che tutti e soli gli $\mathfrak{m}$ si ottengono così. Dimostriamo che $A(V) = \bigcap_{\mathfrak{m}} A(V)_{\mathfrak{m}}$. Allora si ha l'asserto. Quindi si ha $A(V) \subseteq \mathcal{O}(V) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} A(V)_{\mathfrak{m}} = A(V)$ segue la suriettività di α e dunque α è un isomorfismo. Allora $A(V) \simeq \mathcal{O}(V)$.
Dimostriamo ora la (b). Sia W una sottovarietà di V e si ricordi che:

$$\mathcal{I}_a(W) = \left\{ f \in A^{(n)} : Z_a(f) \supseteq W \right\}$$

$$\mathcal{I}_V(W) = \left\{ f \in \mathcal{O}(V) : Z_V(f) \supseteq W \right\}.$$

Si ha prima di tutto:

$$W \text{ irriducibile } \Leftrightarrow \mathcal{I}_a(W) \text{ primo.}$$

Per la (a) $\mathcal{O}(V) \simeq A(V)$ e gli ideali primi si corrispondono nell'isomorfismo:

$$A^{(n)} \to A(V) \simeq \mathcal{O}(V) \ \text{ e } \ \mathcal{I}_a(W) \to \mathcal{I}_V(W)$$

allora $\mathcal{I}_V(W)$ è primo. Ogni ideale primo di $\mathcal{O}(V)$ deve provenire per l'epimorfismo canonico da un ideale primo di $A^{(n)}$, cioè da un $\mathcal{I}_a(X)$ con X sottovarietà di V. Infatti se I è primo, allora I è radicale e dunque esiste $X \subseteq V$ chiuso tale che $I = \mathcal{I}_a(X)$.
Naturalmente si ha che

$$\mathcal{I}_V(W) \text{ massimale } \Leftrightarrow W \text{ varietà minimale } \Leftrightarrow W \text{ è un punto.}$$

Dimostriamo la (c). Si distinguono due casi:

1° caso) Se $W = \{P\}$, abbiamo già considerato

$$\alpha_P \colon A(V)_{\mathcal{I}_V(P)} \to \mathcal{O}_{V,\,P}$$

perché

$$\mathcal{I}_V(P) = \{f \in \mathcal{O}(V) : [V,\, f] \in \mathfrak{m}_{V,\,P}\} = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid P \in Z_V(f)\}$$

e

$$\mathfrak{m}_P = \{f \in A(V) : f(P) = 0\} = \{f \in A(V) : P \in Z_a(f)\}$$

quindi

$$\mathfrak{m}_p = \mathcal{I}_V(P).$$

Per l'isomorfismo α'_P del punto (a), si ha:

$$A(V)_{\mathcal{I}_V(P)} = A(V)_{\mathfrak{m}_p} \simeq \mathcal{O}_{V,P}.$$

2° caso) Se W è una sottovarietà di V, si può definire la seguente applicazione:

$$\alpha_W : A(V)_{\mathcal{I}_V(W)} \to \mathcal{O}_{V,\,W}$$

$$\frac{f}{g} \to \left[U,\, \left(\frac{f}{g}\right)_{|U}\right]$$

α_W è ben posta perchè

$$g \notin \mathcal{I}_V(W) \Leftrightarrow Z_a(g) \not\supseteq W \Leftrightarrow U = (\mathbb{A}^n_k - Z_a(g)) \cap V,\, U \cap W \neq \varnothing.$$

È chiaro che α_W è un 'isomorfismo. $\square$

Sia considerato $S(V)$. Quest'ultimo è un dominio d'integrità e si può considerare il campo dei quozienti relativo ad esso $\mathbb{Q}(S(V))$ di cui $S(V)$ ne è un sottoanello. Inoltre si ha che: $\mathcal{O}_{V,\,V} = K(V)$, ma

$$\mathcal{O}_{V,\,V} = S(V)_{(\mathcal{I}_{P,\,V}(V))} = S(V)_{(\pi(\mathcal{I}_p(V))} = S(V)_{\left(\frac{\mathcal{I}_P(V)}{\mathcal{I}_P(V)}\right)} = S(V)_{(0)}$$

Quindi $K(V) = S(V)_{((0))} \leq \mathbb{Q}\,(S(V))$ perchè $S(V)$ è un dominio graduato. Dunque $\mathcal{O}(V)$ è un sottoanello di $K(V)$, con $K(V) \leq \mathbb{Q}\,(S(V))$. Poichè $\mathcal{O}(V) \leq K(V)$ possiamo riguardare ogni funzione regolare in V come elemento di $K(V) = S(V)_{((0))}$, quindi $f = \frac{h}{k}$, $h,\, k \in S(V)_d$, $k \neq 0$.

Proposizione 5.28. *Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ una varietà proiettiva, allora per ogni aperto U di V si può considerare la seguente applicazione:*

$$\psi : f \in \mathcal{O}(V) \to f_{|U} \in \mathcal{O}(U)$$

e risulta commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[dr, hook] & \mathcal{O}(U) \arrow[d, hook] \\
 & K(V)
\end{tikzcd}$$

dove l'applicazione α e β sono le immersioni di $\mathcal{O}(V)$ e $\mathcal{O}(U)$ rispettivamente in $K(V)$, tale che:

$$\alpha(f) = [V, f] \quad \forall f \in \mathcal{O}(V)$$

$$\beta(f_{|U}) = [U, f_{|U}] \quad \forall f_{|U} \in \mathcal{O}(U).$$

Dim. Dire che il diagramma è commutativo, significa che:

$$[V, f] = \alpha(f) = \beta(\psi(f)) = [U, f_{|U}] \quad \forall f \in \mathcal{O}(V)$$

Considerando che $U \subseteq V$ è un suo aperto, si ha chiaramente $[V, f] = [U, f_{|U}]$.
$\square$

Lemma 5.29. *Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ una varietà proiettiva e posto $V_i = V \cap U_i \neq \varnothing$ per $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Allora*

$$A(V_i) \simeq S(V)_{(x_i)} \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n.$$

Dim. Per semplicità si ponga $i = 0$ e si consideri l'omomorfismo

$$\overline{\varphi} : f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^{(n)} \to f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \frac{\beta(f)}{x_0^{degf}} \in S^{(n)}_{(x_0)}.$$

Tale applicazione ha senso perché x_0 non è nilpotente. Infatti se per assurdo esiste n tale che $x_0^n = 0$, risulta

$$x_0^n \in \mathcal{I}_P(V) \Leftrightarrow Z_P(x_0^n) = Z_P(x_0) \supseteq V_0$$

Si ha $Z_P(x_0) = H_0 \supseteq V$, contraddizione perchè $V \cap U_0 \neq \varnothing$ allora $V \nsubseteq (\mathbb{P}^n - U_0) = H_0$. Inoltre $\overline{\varphi}$ è

- iniettiva, in quanto

$$Ker\overline{\varphi} = \{f(x_1, \ldots, x_n) : \beta(f) = 0\} = \{0\};$$

- suriettiva, poiché ogni elemento di $S^{(n)}_{(x_0)}$ è del tipo

$$\frac{F(x_0, \ldots, x_n)}{x_0^{deg\,F}} = F\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) =$$
$$= \overline{\varphi}(F(1, x_1, \ldots, x_n)) = \overline{\varphi}(f(x_1, \ldots, x_n)) \text{ con } F \in^h S^{(n)}.$$

In particolare tale isomorfismo manda $\mathcal{I}_a(V_0)$ in $\mathcal{I}_p(V)S^{(n)}_{(x_0)}$. Infatti

$$\overline{\varphi}(\mathcal{I}_a(V_0)) = \left\{\frac{\beta(f)}{x_0^{degf}} : f \in \mathcal{I}_a(V_0)\right\} =$$
$$= \left\{\frac{\beta(f)}{x_0^{deg\,f}} : \beta(f) \in (\beta(\mathcal{I}_a(V_0))),\ x_0^{deg\,f} \in (x_0)\right\} = (\beta(\mathcal{I}_a(V_0)))\, S^{(n)}_{(x_0)}$$

V_0 è un aperto di V, denso in V, per la sua irriducibilità. Dunque

$$\overline{V}_0 = V \Rightarrow V_0 \subseteq \mathbb{A}_k^n \text{ chiuso}$$

perché $V_0 = \mathbb{A}_k^n \cap V \simeq U_0 \cap V$ e V è chiuso in $\mathbb{P}^n$, in quanto varietà. Quindi

$$\mathcal{I}_P(V) = (\beta\left(\mathcal{I}_a(V_0)\right) \Rightarrow \overline{\varphi}\left(\mathcal{I}_a(V_0)\right) = \mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}$$

Quozientando abbiamo:

$$A(V_0) = \frac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V_0)} \simeq \frac{S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}}$$

attraverso l'applicazione $\overline{\varphi}$ Ma risulta che la seguente applicazione:

$$\psi : \frac{S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}} \to S(V)_{(x_0)}$$

è a sua volta un isomorfismo. Infatti ψ è un applicazione ben posta perché $x_0 \notin \mathcal{I}_P(V)$ e l'immagine appartiene a $S(V)_{(x_0)} = \left\{\frac{a}{s} : a \in S(V),\, s \in (x_0) \qquad deg\, a = deg\, s\right\}$, ma $\dfrac{S(V)}{\mathcal{I}_P(V)} = S^{(n)} = \left\{f + \mathcal{I}_P(V) : f \in S^{(n)}\right\}$. Dunque

$$A(V_0) \simeq \frac{S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}} \to S(V)_{(x_0)} \Rightarrow A(V_0) \simeq S(V)_{(x_0)}$$

isomorfismo determinato dalla composizione dei due isomorfismi $\widetilde{\varphi} = \psi \circ \overline{\varphi}$.
□

Teorema 5.30. *Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, allora:*

(a) $\mathcal{O}(V) = K$;

(b) se W è una sottovarietà di V e se $\mathcal{I}_{P,\,W}(V)$ è l'ideale immagine di $\mathcal{I}_P(W)$ nell'epimorfismo canonico

$$\pi\colon S^{(n)} \to S(V)$$

allora $\mathcal{I}_{P,\,W}(V)$è un ideale primo omogeneo di $S(V)$ non irrilevante e ogni ideale primo omogeneo non irrilevante di $S(V)$ si ottiene in questo modo; inoltre, $\mathcal{I}_{P,\,W}(V)$ è massimale se e solo se W è un punto;

(c) $\mathcal{O}_{V,\,W} = S(V)_{(\mathcal{I}_{P,\,W}(V))}$.

Dim. Si inizi a dimostrare il punto (a). Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva, risulta già $k \subseteq \mathcal{O}(V)$. Dobbiamo provare che $\mathcal{O}(V) \subseteq k$. Per la proposizione (5.28), possiamo identificare f e $f_{|U}$ come elementi di $K(V)$ e scriverli come frazione $f = f_{|U} = \frac{h}{k}$, $h,\, k \in S(V)_d$, $k \neq 0$.
Sia $f \in \mathcal{O}(V)$, dimostriamo che $f \in k$. Distinguiamo due casi:

1. $\forall i = 0, \ldots, n : V_i = V \cap U_i \neq \varnothing$. Si ponga $f_i = f_{|V_i}$ V_i è un aperto di V, quindi per la proposizione (5.28), sostituendo U con V_i, si ha:

$$\begin{tikzcd} f \in \mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[dr, hook] & f_i \in \mathcal{O}(V_i) \arrow[d, hook] \\ & {[V, f] = [V_i, f_i] \in K(V)} \end{tikzcd}$$

e possiamo identificare, come elemento di $K(V)$, f con f_i. Inoltre per l'osservazione (**??**), come sottoanello di $\mathbb{Q}(S(V))$, $\mathcal{O}(V_i) \simeq S(V)_{(x_i)}$ e quindi $f = \frac{F}{{x_i}^{degF}}$ con $F \in S(V)$, ma per definizione di $S(V)_{(x_i)}$ si ha

$$S(V)_{(x_i)} = \left\{ \frac{a}{s} : a,\, s \in S(V)_d,\, s \in (x_i) \right\}.$$

F è omogeneo e sia $N_i = deg\, F$. Allora $x_i^{N_i} f = F \in S(V)_{N_i}$. In conclusione si ha che

$$\forall i = 0, \ldots, n : V_i = V \cap U_i \neq \varnothing\, \exists, N_i \geq 0 : x_i^{N_i} f \in S(V)_{N_i}$$

2. $\forall i = 0, \ldots, n$ tale che $V_i = \varnothing$, si ha:

$$\begin{aligned} V \cap (\mathbb{P}^n - H_i) = \varnothing \Rightarrow V \subseteq H_i \Rightarrow x_i = 0 \text{ su } V \Rightarrow \\ \Rightarrow x_i = 0 \text{ su } V_i \subseteq V \text{ e } 0 \in S(V)_{N_i} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_i^{N_i} f = 0 \in S(V)_{N_i}. \end{aligned}$$

In generale

$$\forall i = 0, \ldots, n, \exists N_i \geq 0 : x_i^{N_i} f \in S(V)_{N_i}.$$

Consideriamo un intero $N \geq \sum_{i=0}^{n} N_i$ e consideriamo un qualunque $g \in S(V)_N$. Quest'ultimo è generato come $k-$spazio vettoriale dai monomi di grado N in $x_0, \ldots, x_n$ (variabili quozientate). Allora $g \in S(V)_N$ è combinazione lineare di questi monomi, dunque possiamo ridurci al caso che g sia un monomio di grado N in $x_0, \ldots, x_n$.

$$\begin{aligned} gf \,&= x_i^{N_i} f q - x_i^{N_i}, f \in S(V)_{N_i}, Q \in S(V)_{N-N_i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow gf \in S(V)_N,\ \forall g \in S(V)_N \Rightarrow \\ &\Rightarrow S(V)_N \cdot f \subseteq S(V)_N \end{aligned}$$

Reiterando il ragionamento si ha

$$S(V)_N f^q \subseteq S(V)_N \qquad \forall q > 0$$

$x_i \in S(V)$ è del tipo $x_i = x_i + \mathcal{I}_P(V)$, allora $x_i = 0$ se e solo se $x_i \in \mathcal{I}_P(V)$ ma $V \subseteq \mathbb{P}^n$ e dunque

$$\begin{aligned} \exists\, U_i : U_i \cap V \neq \varnothing \Rightarrow \exists i : x_i \text{ non si annulla su } V \Rightarrow x_i \notin \mathcal{I}_P(V) \Rightarrow \\ \Rightarrow x_i \neq 0 \text{ in } S(V) \end{aligned}$$

Supponiamo $i = 0$. Consideriamo $g = x_0^N$, allora $x_0^N f^q \in S(V)_N$ con $q \geq 0$ allora

$$f^q \in S(V)_N x_0^{-N} \Rightarrow S(V)[f] \subseteq S(V)_N x_0^{-N} \text{ è un modulo}$$

ed è costituito da somme di prodotti af^q con $a \in S(V)$, cioè da somme di elementi di $S(V)f^q$. Dunque risulta

$$S(V)[f] \subseteq S(V)_N x_0^{-N} \subseteq S(V)x_0^{-N} \subseteq \mathbb{Q}(S(V)).$$

inoltre $S(V)x_0^{-N} \simeq S(V)$, dove l'isomorfismo è dato da

$$\gamma : \frac{f}{x_0^N} \in S(V)x_0^{-N} \to f \in S(V)$$

dunque $S(V)[f]$ è un sottomodulo di $S(V)$. Allora $S(V)[f]$ è un ideale di $S(V)$. Essendo $S(V) = \dfrac{S^{(n)}}{\mathcal{I}_p(V)}$ quoziente di un anello noetheriano, è a sua volta noetheriano. Allora $S(V)[f]$ è finitamente generato come $S(V)-$modulo. Allora f è integrale su $S(V)$ cioè:

$$\exists a_1, \ldots, a_n \in S : f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

ma $f = \frac{h}{k}$ con $deg\, h = deg\, k$, allora

$$h^n + a_1 h^{n-1} k + \cdots + a_n k^n = 0$$

con $a_i \in S(V)$.
$\forall i\ a_i = a_{i0} + \cdots + a_{il}$ con a_{ij} componenti omogenee di grado j di a_i. Allora possiamo sostituire le a_{i0} alle a_i:

$$h^n + a_{10} h^{n-1} k + \cdots + a_{n0} k^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^n + a_{10} h^{n-1} k + \cdots + a_{1l} h^{n-1} k + \cdots + a_{n0} k^n + \cdots + a_{nl} k^n = 0$$

raggruppando i termini dello stesso grado si ha:

$$\begin{aligned} &\left(h^n + a_{10} h^{n-1} k + \cdots + a_{n0} k\right) + \left(a_{11} h^{n-2} k^2 \cdots + a_{n1} h^{n-2} k^2\right) + \\ &\qquad + \cdots + \left(a_{1l} h^{n-1} k + \cdots + a_{nl} k^n\right) = 0. \end{aligned}$$

Il primo termine è di grado nd, il secondo è di grado $1 + (n-2)\, d + 2d = 1 + nd$ mentre l'ultimo ha grado $l + nd$. Il polinomio è nullo se e solo se ogni fattore della somma è nullo.Infine

$$a_{i0} \in S(V)_{(0)} = \frac{S_{(0)}^{(n)}}{\mathcal{I}_P(V)_{(0)}} = \frac{S_0^{(n)}}{(0)} = k \Rightarrow a_{i0} = \text{ cost }, \forall_i$$

Possiamo supporre le a_i costanti, allora dividendo per k^n e risostituendo $\frac{h}{k} = f$, abbiamo:

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

con $a_i \in k$, si ha che f è algebrico su k, ma k è algebricamente chiuso e dunque $f \in K$, ovvero $\mathcal{O}(V) \subseteq k$.
Si dimostri il punto (b). Sia W una sottovarietà di V, allora

$$W \text{ irriducibile } \Leftrightarrow \mathcal{I}_P(W) \subseteq S^{(n)} \text{ ideale primo .}$$

Quindi $\pi(\mathcal{I}_P(W)) = \mathcal{I}_{P,V}(W)$ è primo, in quanto:

$$xy \in \mathcal{I}_{P,V}(W) \Rightarrow \pi^{-1}(xy) = \pi^{-1}(x) \cdot \pi^{-1}(y) \in \mathcal{I}_P(W)$$

ma $\mathcal{I}_P(W)$ è primo e quindi

$$\pi^{-1}(x) \in \mathcal{I}_P(W) \text{ o } \pi^{-1}(y) \in \mathcal{I}_P(W) \Rightarrow x \in \mathcal{I}_{P,V}(W) \text{ o } y \in \mathcal{I}_{P,V}(W) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{P,V}(W) \text{ primo.}$$

Viceversa, sia $I \subseteq S(V)$ un ideale primo, si ha che $\pi^{-1}(I)$ è un ideale primo in $S^{(n)}$. Ma

$$\pi^{-1}(I) \subseteq S^{(n)} \text{ ideale primo } \Rightarrow \exists W \subseteq S^{(n)} \text{ irriducibile } : \pi^{-1}(I) = \mathcal{I}_P(W).$$

Inoltre

$$\mathcal{I}_{P,V}(W) \text{ è massimale } \Leftrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{I}_{P,V}(W) = \mathcal{I}_P(W)) \text{ massimale } \Leftrightarrow W = \{P\}.$$

Si dimostri infine il punto (c). Sia W una sottovarietà di V, gli aperti $U_i = \mathbb{P}^n - H_i$ sono un ricoprimento di $\mathbb{P}^n$, allora

$$\exists i : U_i \cap W = W_i \neq \varnothing \Rightarrow V_i = U_i \cap V \supseteq U_0 \cap W_0 \neq \varnothing.$$

Prendendo $i = 0$, abbiamo quindi U_0 aperto di V tale che $W_0 = U_0 \cap W \neq \varnothing$, V_0 è un aperto di V e allora $\mathcal{O}_{V_0,W_0} \simeq \mathcal{O}_{V,W}$.
Inoltre

$$\mathcal{O}_{V,\,W} \simeq \mathcal{O}_{V_0,\,W_0} = \mathcal{O}(V_0)_{\mathcal{I}_{V_0}(W_0)}.$$

e d'altra parte $\mathcal{O}(V_0) \simeq A(V_0)$.
Abbiamo quindi:

$$A^{(n)} \to A(V_0) \to \mathcal{O}(V_0)$$

$$f \to f + \mathcal{I}_a(V_0) \to f$$

$$\mathcal{I}_a(W) \to \frac{\mathcal{I}_a(W_0)}{\mathcal{I}_a(V_0)} \to \mathcal{I}_{V_0}(W_0)$$

perchè

$$\mathcal{I}_a(W_0) = \left\{ f \in A^{(n)} : Z_a(f) \supseteq W_0 \right\},$$

$$\mathcal{I}_{a,\,V_o}(W_0) = \frac{\mathcal{I}_a(W_0)}{\mathcal{I}_a(V_0)} = \{ f + \mathcal{I}_a(V_0) : Z_a(f) \supseteq W_0 \},$$

$$\mathcal{I}_{V_0}(W_0) = \{f \in \mathcal{O}(V_0) : Z_{V_0}(f) \supseteq W_0\}$$

perciò $\mathcal{O}(V_0)_{\mathcal{I}_{V_0}(W_0)} \simeq A(V_0)$. Quindi $\mathcal{O}_{V,W} \simeq A(V_0)_{\mathcal{I}_{a,V_0}(W_0)}$. Per il lemma (5.29) si ha $A(V_0) \simeq S(V)_{(x_0)}$ attraverso l'applicazione $\widetilde{\varphi} = \psi \circ \overline{\varphi}$. Si dimostri che $\widetilde{\varphi}(\mathcal{I}_{a,V_0}(W_0)) = \mathcal{I}_{P,V}(W)S(V)_{(x_0)}$. Si hanno le seguenti catene di applicazioni:

$$A^{(n)} \overset{\overline{\varphi}}{\underset{\sim}{\to}} S^{(n)}_{(x_0)} \xrightarrow{\gamma} \frac{S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}} \overset{\psi}{\underset{\sim}{\to}} S(V)_{(x_0)}$$

$$\mathcal{I}_a(W_0) \to \mathcal{I}_P(W_0)S^{(n)}_{(x_0)} \to \frac{\mathcal{I}_P(W)S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}} \to \mathcal{I}_{P,V}(W)S(V)_{(x_0)}$$

Ricordando che:

$$S^{(n)}_{(x_0)} = \left\{ \frac{f}{x_0^{deg\,f}} : f \in {}^hS^{(n)} \right\}$$

$$S(V)_{(x_0)} = \left\{ \frac{a}{x_0^{deg\,a}} : a \in S(V) \right\} = \left\{ \frac{f + \mathcal{I}_P(V)}{x_0^{deg\,f} + \mathcal{I}_P(V)} : f \in {}^hS^{(n)} \right\}$$

Si ha:

$$\gamma\colon S^{(n)}_{(x_0)} \to \frac{S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}}$$

$$\frac{f}{x_0^{deg\,f}} \to \frac{f + \mathcal{I}_P(V)}{x_0^{deg\,f} + \mathcal{I}_P(V)}$$

è l'epimorfismo canonico.
Si ha:

$$\mathcal{I}_P(W)S^{(n)}_{(x_0)} = \left\{ \frac{a}{s} : a \in \mathcal{I}_P(W),\, s \in (x_0) \right\} = \left\{ \frac{f}{{x_0}^{deg\,f}} : f \in \mathcal{I}_P(W) \right\}$$

$$\frac{\mathcal{I}_P(W)S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}} = \left\{ f + \mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)} : f \in \mathcal{I}_P(W)S^{(n)}_{(x_0)} \right\} = \left\{ \frac{f}{x_o^{deg\,f}} + \mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)} : f \in \mathcal{I}_P(W) \right\}$$

e $\gamma\left(\frac{f}{x_0^{deg\,f}}\right) = \frac{f}{x_0^{deg\,f}} + \mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)} \in \frac{\mathcal{I}_P(W)S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)}}$

ψ è così definita:

$$\psi\colon \frac{\mathcal{I}_P(W)S^{(n)}_{(x_0)}}{\mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_o)}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{P,V}(W)S(V)_{(x_0)}$$

$$\frac{f}{x_0^{deg\,f}} + \mathcal{I}_P(V)S^{(n)}_{(x_0)} \longrightarrow \frac{f + \mathcal{I}_P(V)}{{x_0}^{deg\,f} + \mathcal{I}_P(V)}$$

dove $f \in \mathcal{I}_P(W)$ e allora $f + \mathcal{I}_P(V) \in \dfrac{\mathcal{I}_P(W)}{\mathcal{I}_P(V)} = \mathcal{I}_{P,\,V}(W)$, quindi $\dfrac{f + \mathcal{I}_P(V)}{x_0^{deg\,f} + \mathcal{I}_P(V)} \in \mathcal{I}_{P,\,V}(W)S(V)_{(x_0)}$ perché

$$\mathcal{I}_{P,\,V}(W)S(V)_{(x_0)} = \left\{\frac{a}{s} : a \in \mathcal{I}_{P,\,V}(W) s \in (x_0)\right\} = \left\{\frac{f + \mathcal{I}_P(V)}{x_0^{deg\,f} + \mathcal{I}_P(V)} : f \in \mathcal{I}_P(W)\right\}$$

Dunque

$$\mathcal{O}_{V,\,W} \simeq A(V_0)_{\mathcal{I}_{a,\,V_0}(W_0)} \simeq (S(V)_{x_0})_{\mathcal{I}_{p,V}(W)S(V)}\,(x_0) \simeq S(V)_{\mathcal{I}_{P,\,V(W)}}.$$

Dimostriamo l'ultimo isomorfismo:

$$\frac{\dfrac{f}{x_0^{deg\,f}}}{\dfrac{g}{x_0^{deg\,g}}} \to \frac{f}{g}x_0^{deg\,g - deg\,f}$$

Infatti

$$\frac{\dfrac{f}{x_0^{deg\,f}}}{\dfrac{g}{x_0^{deg\,g}}} \in \big(S(V)_{(x_0)}\big)_{\mathcal{I}_{P,\,V}(W)S(V)_{(x_0)}}$$

poichè

$$\big(S(V)_{(x_0)}\big)_{\mathcal{I}_{P,\,V}(W)S(V)_{(x_0)}} = \left\{\frac{a}{s} : a \in S(V)_{(x_0)}\; s \in S(V)_{(x_0)} - \mathcal{I}_{P,\,V}(W)S(V)_{(x_0)}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\dfrac{f}{x_0^{deg\,f}}}{\dfrac{g}{x_0^{deg\,g}}} : f \in S(V)\; g \notin \mathcal{I}_{P,\,V}(W)\right\}.$$

D'altra parte

$$S(V)_{(\mathcal{I}_{P,\,V}(W))} = \left\{\frac{a}{s} : a \in {}^hS(V)\; s \in^h S(V) - \mathcal{I}_{P,\,V}(W) \text{ con } deg\,a = deg\,s\right\} =$$

$$= \left\{\frac{f}{g} : f \in S(V),\, g \in S(V) - \mathcal{I}_{P,\,V}(W) \text{ con } deg\,f = deg\,g\right\}.$$

Ma $\frac{f}{g}x_0^{deg\,g - deg\,f}$ (dove il grado del numeratore è lo stesso di quello del denominatore) appartiene a $S(V)_{(\mathcal{I}_{P,\,V}(W))}$. $\square$

Una prima importante conseguenza del teorema (5.30) è il seguente corollario:

Corollario 5.31. *Se V è una varietà quasi–proiettiva, $K(V)$ è un'estensione di tipo finito di k.*

Dim. Infatti $K(V) = K(\overline{V})$ dove $\overline{V}$ è la chiusura proiettiva di V (perchè $V \subseteq \overline{V}$ è un aperto) e $K(\overline{V})$ è contenuta in $\mathbb{Q}(S(\overline{V}))$ che è generato su k da $x_0, \ldots, x_n$. $\square$

Il grado di trascendenza di $K(V)$ su k si dice dimensione trascendente o semplicemente dimensione di V. Se U è un aperto non vuoto di V si ha $dimV = dimU$.

Esempio 5.32. Se V è un punto, è chiaro che $\mathcal{O}(V) = K(V) = k$. Di conseguenza, se V è una varietà e P ne è un punto, $\mathcal{O}_{V,\,P}$ ha come campo residuo K.

Esempio 5.33. $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = A^{(n)}$, $K(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Q}(A^{(n)}) = K(x_1, \ldots, x_n)$ e dim $\mathbb{A}^n = n$.

Esempio 5.34. $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n) = k$, $K(\mathbb{P}^n) = S^{(n)}_{((0))}$ (perchè $\mathcal{I}(\mathbb{P}^n) = (0)$). D'altra parte $K(\mathbb{P}^n) \simeq K(\mathbb{A}^n)$, sicchè dim $\mathbb{P}^n = n$.

6 Morfismi

Dopo aver definito le varietà algebriche affini, quasi affini, proiettive e quasi-proiettive, possiamo ora considerare le funzioni tra due varietà. Essendo X e Y spazi topologici, con la topologia di Zariski, sarà naturale richiedere che le funzioni siano continue, e, non solo, è necessario considerare funzioni tra due varietà che siano definibili in modo algebrico. Cerchiamo di capire che cosa significa dire che una funzione sia definibile in modo algebrico e lo si può fare mediante degli esempi. Si lavorerà, per semplicità, con le varietà affini, ma il discorso può essere esteso anche al caso di due varietà proiettive o quasi-proiettive.

Esempio 6.1. Siano $X = \mathbb{A}^n_k$ e $Y = \mathbb{A}^m_k$. È possibile descrivere una funzione $f\colon X \to Y$ nel seguente modo:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

dove le $f_i\colon \mathbb{A}^n_k \to k$, per $i = 1, \cdots, m$, sono le componenti della funzione f. La funzione $f\colon X \to Y$ si dirà essere definibile in modo algebrico, quando tutte le sue componenti $f_i\colon \mathbb{A}^n_k \to k$ sono definibili in modo algebrico, e le funzioni algebriche da $\mathbb{A}^n_k$ in k sono i polinomi nelle n indeterminate $x_1, \cdots, x_n$.

Dunque, dall'esempio, si nota che la definizione di funzione algebrica tra due spazi affini è quella di una funzione polinomiale, ovvero una funzione le cui componenti sono polinomi.

Esempio 6.2. Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una varietà, la funzione $f\colon X \to \mathbb{A}^m_k$ è algebrica se essa risulta essere la restrizione a X di una funzione polinomiale $f^*\colon \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^m_k$, cioè se:

$\exists f_1, \cdots, f_m \in k[x_1, \cdots, x_n] : f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$

$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in X$.

Esempio 6.3. Siano $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}_k^m$ due varietà , la funzione $f\colon X \to Y$ è algebrica se essa risulta essere semplicemente una funzione polinomiale $f\colon X \to \mathbb{A}_k^m$ tale che $f(X) \subseteq Y$.

Il modo con cui abbiamo esplicitato tali esempi, pur sostanzialmente corretto, non è tuttavia soddisfacente, in quanto ci si può chiedere il perché, nell'esempio (6.2), le uniche funzioni che vogliamo considerare da una varietà affine $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ a uno spazio affine $\mathbb{A}_k^m$ debbano essere la restrizione di analoghe funzioni definite globalmente su tutto lo spazio affine $\mathbb{A}_k^n$.
Il nostro obiettivo è di cercare una caratterizzazione più intrinseca di tali funzioni algebriche tra varietà, che chiameremo morfismi di varietà. Ricordiamo che per ogni aperto U di una varietà algebrica V, abbiamo definito l'anello $\mathcal{O}_V(U)$ delle funzioni regolari su U.

Definizione 6.4. Siano V e W varietà quasi-proiettive. Un'applicazione $\varphi\colon V \to W$ si dice un morfismo se è continua e se per ogni aperto $U \subseteq W$ e per ogni funzione regolare $f \in \mathcal{O}(U)$, la funzione $f_\varphi = f \circ \varphi$ è regolare in $\varphi^{-1}(U)$ (cioè $f_\varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$).

Si denoterà con

$$M(V,\, W) = \{\varphi : V \to W : \varphi \text{ morfismo } \}$$

l'insieme dei morfismi di V in W. È chiaro che l'identità è un morfismo e inoltre

$$\varphi, \psi \in M(V, W) \Rightarrow \varphi \circ \psi \in M(V, W).$$

Ha senso dunque considerare la categoria in cui gli oggetti siano le varietà quasi-proiettive e i morfismi siano quelli prima definiti.
Se $\varphi \in M(V,\, W)$, per ogni aperto $U \subseteq W$, si ha un'applicazione:

$$\varphi^U\colon f \in \mathcal{O}(U) \to f_\varphi \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$$

Proposizione 6.5. *φ^U è un omomorfismo di $K-$algebre.*

Dim.

$$\varphi^U\,(f+g) = (f+g)_\varphi = (f+g) \circ \varphi = f \circ \varphi + g \circ \varphi = \varphi^U(f) + \varphi^U(g).$$

Inoltre

$$\forall a \in K \quad \varphi^U(a) = a \circ \varphi = a\,(\varphi(\underline{x})) = a \in k$$

dunque φ^U fissa k punto per punto, allora è un $k-$omomorfismo. $\square$

Proposizione 6.6. *Siano φ e ψ morfismi, allora:*

$$(\varphi \circ \psi)^U = \psi^U \circ \varphi^U.$$

Dim. $(\varphi \circ \psi)^U(f) = f \circ (\varphi \circ \psi) = (f \circ \varphi) \circ \psi = \psi^U(f \circ \varphi) = \psi^U(\varphi^U(f)) = \psi^U \circ \varphi^U(f)$. $\square$

Definizione 6.7. Un morfismo $\varphi\colon V \to W$ è un isomorfismo se ammette inverso, ossia

$$\varphi \text{ isomorfismo } \Leftrightarrow \exists \psi\colon W \to V \text{ morfismo } : \psi \circ \varphi = id_V \text{ e } \varphi \circ \psi = id_W.$$

Osservazione 16. Se φ è un isomorfismo, si ha che φ e φ^{-1} sono continue, dunque φ è un omeomorfismo.

Proposizione 6.8. *Se φ è un isomorfismo, allora $(\varphi^U)^{-1} = (\varphi^{-1})^U$.*

Dim. Basti applicare la proposizione (6.6):

$$id^U = (\varphi \circ \varphi^{-1})^U = (\varphi^{-1}) \circ \varphi^U. \qquad \square$$

Definizione 6.9. Un morfismo $\varphi : V \to W$ è dominante se la sua immagine è densa in W, ovvero $W = \overline{\varphi(V)}$.

Sia $\varphi : V \to W$ un morfismo dominante, dunque $\overline{\varphi(V)} = W$, $\varphi^{-1}(U)$ è non vuoto se U è non vuoto e dunque denso in V. Si ha un'applicazione naturale:

$$\varphi'\colon (U,\, f) \in \mathcal{K}(W) \to \big(\varphi^{-1}(U),\, f_\varphi\big) \in \mathcal{K}(V).$$

Lemma 6.10. *φ' è compatibile con la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ definita in $\mathcal{K}(V)$ e in $K(W)$.*

Dim. Siano (U, f), (U', f') elementi di $\mathcal{K}(V)$ e sia la relazione $\mathcal{R}$ di equivalenza definita in $\mathcal{K}(V)$, nel seguente modo:

$$(U, f)\mathcal{R}(U', f') \Leftrightarrow U \cap U' \neq \varnothing \text{ e } f_{|U\cap U'} = f'_{|U\cap U'}.$$

Dire che $\varphi\prime$ sia compatibile con la relazione $\mathcal{R}$, significa dimostrare che

$$\varphi'(U, f)\mathcal{R}\varphi'(U', f') \Leftrightarrow (\varphi^{-1}(U), f_\varphi)\mathcal{R}(\varphi^{-1}(U'), f'_\varphi)$$

ovvero:

1. $\varphi^{-1}(U) \cap \varphi{-}1(U') \neq \varnothing$;
2. $(f \circ \varphi)_{|\varphi^{-1}\cap\varphi^{-1}(U')} = (f' \circ \varphi)_{|\varphi^{-1}\cap\varphi^{-1}(U')}$.

Per quanto riguarda il primo punto, si ha:

$$\varphi^{-1}(U) \cap \varphi{-}1(U') = \varphi^{-1}(U \cap U') \neq \varnothing$$

dove $U \cap U' \neq \varnothing$. Per il secondo punto:

$$(f \circ \varphi)_{|\varphi^{-1}\cap\varphi^{-1}(U')} = (f' \circ \varphi)_{|\varphi^{-1}\cap\varphi^{-1}(U')} \Leftrightarrow f_{|U\cap U'} = f'_{|U\cap U'}. \qquad \square$$

Proposizione 6.11. *Sia $\varphi : V \to W$ un morfismo dominante, allora induce un'applicazione iniettiva $\varphi^* : K(W) \to K(V)$.*

Dim. Essendo φ un morfismo dominante, per il lemma (6.10), φ è compatibile con le relazioni quindi φ induce l'applicazione:

$$\varphi^* : [U,\, f] \in K(W) \to \left[\varphi^{-1}(U),\, f_\varphi\right] \in K(V).$$

È ovviamente un omomorfismo di campi, ed essendo non nullo, è naturalmente iniettivo. □

Teorema 6.12.

$$V \simeq W \Rightarrow K(V) \simeq K(W).$$

Sia $\varphi : V \to W$ un morfismo e siano $V' \subseteq V$ e $W' \subseteq W$ sottovarietà, tali che $\varphi(V') \subseteq W'$. Si consideri la seguente applicazione:

$$\tilde{\varphi} = \varphi_{|V'} : V' \to W'.$$

Risulta che:

$$\varphi \in M(V, W) \Rightarrow \tilde{\varphi} \in M(V', W')$$

e inoltre

$$\varphi \text{ continua } \Rightarrow \tilde{\varphi} \text{ continua }.$$

Proposizione 6.13. *Preso un aperto $U' \subseteq W'$ e presa una funzione $f' \in \mathcal{O}(U')$, allora $f' \circ \tilde{\varphi} \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U')\right)$.*

Dim. Si ha

$$f' \in \mathcal{O}(U') \Rightarrow f' = \frac{h'}{g'} \text{ con } h',\, g' \in S_d^{(n)} \text{ e } g' \neq 0 \text{ in } U'.$$

Ora, per ogni $\underline{x} \in \varphi^{-1}(U')$, si ha

$$f' \circ \tilde{\varphi}(\underline{x}) = f'\left(\tilde{\varphi}(\underline{x})\right) = f'\left(\varphi(\underline{x})\right)$$

Ma φ è un omomorfismo, quindi

$$x_i \circ \varphi = \varphi_i \text{ è regolare } \Rightarrow \varphi_i = \frac{a_i}{b_i} \text{ con } a_i,\, b_i \in S_d^{(n)},\, b_i \neq 0 \text{ in } \varphi^{-1}(U')$$

Allora

$$f'\left(\varphi_1(\underline{x}), \ldots,\, \varphi_n(\underline{x})\right) = \frac{h'\left(\varphi_1(\underline{x}), \ldots,\, \varphi_n(\underline{x})\right)}{g'\left(\varphi_1(\underline{x}), \ldots,\, \varphi_n(\underline{x})\right)}$$

È lecito perchè $g' \neq 0$ in U' allora $g'\left(\varphi_1(\underline{x}), \ldots,\, \varphi_n(\underline{x})\right) \neq 0$ in $\varphi^{-1}(U')$ Si ha

$$\frac{h'\left(\dfrac{a_1(\underline{x})}{b_1(\underline{x})}, \ldots,\, \dfrac{a_n(\underline{x})}{b_n(\underline{x})}\right)}{g'\left(\dfrac{a_1(\underline{x})}{b_1(\underline{x})}, \ldots,\, \dfrac{a_n(\underline{x})}{b_n(\underline{x})}\right)} = \frac{\overline{h'}(\underline{x})}{\overline{g'}(\underline{x})}$$

con $\overline{g'} \neq 0$ in $\varphi^{-1}(U')$ e quindi $f' \circ \tilde{\varphi} \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U')\right)$ e $\overline{h'},\, \overline{g'} \in S_d^{(n)}$. □

Osservazione 17. Il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\varphi_U^*"] \arrow[d] & \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right) \arrow[d] \\ K(W) \arrow[r, "\varphi^*"] & K(W) \end{tikzcd}$$

è commutativo e la mappa di inclusione è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &\to K(W) \\ f &\to [W,\, f] \end{aligned}$$

φ^* è un'estensione di φ_U^*. Inoltre φ^* è iniettivo, e dunque φ_U^* è iniettivo perchè restrizione di φ^*.

Osservazione 18. Consideriamo V' sottovarietà di V e W' sottovarietà di W. Se $\varphi\colon V \to W$ è un morfismo, $\varphi'\colon V' \to W'$ è un morfismo dominante, allora ha senso l'applicazione :

$$\begin{aligned} \varphi^*\colon \mathcal{O}_{W,\,W'} &\to \mathcal{O}_{V,\,V'} \\ [U,\, f] &\to \left[\varphi^{-1}(U),\, f \circ \varphi\right] \end{aligned}$$

Esso è un omomorfismo di $k-$algebre, che fissa k punto per punto. Poiché φ' è dominante allora $\overline{\varphi'(V')} = W'$ e poi φ' è un morfismo per le considerazioni precedenti.
Se $[U,\, f] \in \mathcal{O}_{W,\,W'}$ dunque $U \cap W' \neq \varnothing$, con U aperto non vuoto di W. Inoltre $U \neq \varnothing$ implica $\varphi^{-1}(U) \neq \varnothing$. Infatti se per assurdo $\varphi^{-1}(U) \cap V' = \varnothing$ si ha

$$\begin{aligned} V' \subseteq V - \varphi^{-1}(U) \Rightarrow \varphi(V') \subseteq \varphi\left(V - \varphi^{-1}(U)\right) \Rightarrow \varphi(V') \subseteq \varphi(V) - U \subseteq W - U \Rightarrow \\ \Rightarrow W' = \overline{\varphi(V')} \subseteq \overline{W - U} \Rightarrow W' \subseteq W - U \Rightarrow W' \cap U = \varnothing \end{aligned}$$

Ma ciò è una contraddizione.
Se $U' \cap W' \neq \varnothing$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[r, "\varphi_U^*"] \arrow[d] & \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{W,\,W'} \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathcal{O}_{V,\,V'} \end{tikzcd}$$

è un'estensione di φ^*.

Osservazione 19. $V \simeq W$ e $V' \simeq W' \Rightarrow \mathcal{O}_{V,\,V'} \simeq \mathcal{O}_{W,\,W'}$.

Proposizione 6.14. *Se V' è una sottovarietà di V allora l'applicazione $i\colon V' \to V$ (inclusione) è un morfismo ed è chiamato immersione.*

Dim. Si dimostra che i è continua.

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f=f\circ i"'] & & V \supseteq U \arrow[dl, "f"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Per ogni funzione regolare in U, f regolare in $\varphi^{-1}(U) = U \cap U'$ ma

$$f = f \circ i \Rightarrow f \circ i \text{ è regolare in } \varphi^{-1}(U)$$

Allora i è un morfismo. □

Lemma 6.15. *Sia V una varietà quasi-proiettiva e W una varietà quasi-affine. Allora*

$$\varphi\colon V \to W \text{ morfismo } \Leftrightarrow \varphi_i = x_i \circ \varphi \text{ regolari su } V \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Inoltre $\varphi\colon P \in V \to (\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P)) \in W$ con x_i funzioni coordinate.

Dim. $\Rightarrow$) Consideriamo

$$P \xrightarrow{\varphi} \varphi(P)(= y_1, \ldots, y_n) \xrightarrow{x_i} y_i = x_i \circ \varphi(P) = \varphi_i(P)$$

Possiamo scrivere $P \xrightarrow{\varphi} (\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P))$ che è vero per ogni φ. Dunque le x_i sono le funzioni coordinate in $\mathbb{A}^n$ e sono regolari, perché $x_i = \frac{x_i}{1}$ in $\mathbb{A}^n$ e allora sono regolari in una sottovarietà come W.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_i=x_i\circ\varphi"'] & & W \arrow[dl, "x_i"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

$$\varphi \text{ morfismo, } x_i \text{ regolari } \Rightarrow \varphi_i \text{ regolari in } \varphi^{-1}(W) = V.$$

$\Leftarrow$) Dimostreremo che φ è continua, cioè che la controimmagine di un chiuso è un chiuso. Sia Z un chiuso di $W \subseteq \mathbb{A}^n$, Z è intersezione di W con un'ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$ Basta dimostrare che $\varphi^{-1}(Z_a(f)) \cap W$ è chiuso, con $f \in A^{(n)}$. Esplicitiamo il suddetto insieme:

$$\varphi^{-1}\left(Z_a(f) \cap W\right) = \{P \in V : \varphi(P) \in Z_a(f)\} =$$
$$= \{P \in V : f(\varphi(P)) = 0\} = \{P \in V : f\left(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_n(P)\right) = 0\}$$

Per ipotesi $\varphi_i \in \mathcal{O}(V)$, $f \in A^{(n)}$, dunque $f\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right) \in \mathcal{O}(V)_\infty$. Infatti

$$\varphi_i \in \mathcal{O}(V) \Rightarrow \varphi_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \text{ con } \alpha_i,\, \beta_i \in A^{(n)}, \text{ e } \beta_i \neq 0 \text{ in } U' \subseteq V \text{ e } b \in A^{(n)}$$

Allora

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = f\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = \frac{A}{B}$$

con $B =$M.C.D$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. $B \neq 0$ in U' e A, B sono polinomi di $A^{(n)}$ e dunque $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}(U')$, $\forall U' \subseteq V$. Poiché la regolarità è una definizione locale, si ha $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}(V)$, e segue

$$\varphi^{-1}(Z_a(f) \cap W) = Z_V(f(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$$

controimmagine di zero tramite $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, che è regolare su V, allora è continua; lo zero è un chiuso di K e Z_V è un chiuso e di conseguenza $\varphi^{-1}(Z_a(f) \cap W)$ è un chiuso, quindi φ è continua.
Dimostriamo la seconda proprietà, cioè:

$$\forall U \subseteq W \text{ aperto non vuoto }, \forall g \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow g \circ \varphi \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$$

Sia $U \subseteq W$ un aperto non vuoto. Preso un $g \in \mathcal{O}(U)$, si ha $g = \dfrac{Q(x_1, \dots, x_n)}{Q'(x_1, \dots, x_n)}$ in $U' \subseteq U$ aperto, con $Q' \neq 0$ in U' con Q e $Q' \in A^{(n)}$.
Si ha:

$$(g \circ \varphi)(P) = g(\varphi(P)) = \frac{Q(\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P))}{Q'(\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P))}$$

con $P \in \varphi^{-1}(U')$ e denominatore non nullo.
Queste due funzioni appartengono a $\mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ perchè $\varphi_i \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$, $Q(x_1, \dots, x_n) \in A^{(n)}$. Per la dimostrazione precedente $Q(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Analogamente per $Q' \neq 0$, poichè $\mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ è un'algebra, $\dfrac{Q}{Q'}$, con $Q' \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ quindi è invertibile e $Q \cdot \dfrac{1}{Q'} \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Si completa $g \circ \varphi \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ e allora φ è un morfismo. $\square$

Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ due varietà affini e si considerino i rispettivi anelli $A(V)$ e $A(W)$. A un morfismo di varietà $\varphi \colon V \to W$ corrisponde una funzione

$$\begin{array}{rl} \varphi^W : A(W) & \to A(V) \\ f & \to f \circ \varphi \end{array}$$

Proposizione 6.16. φ^W *è un omomorfismo di* k*-algebre.*

Dim. Siano f e g elementi di $A(W)$, si ha:

$$\varphi^W(f+g) = (f+g) \circ \varphi = f \circ \varphi + g \circ \varphi = \varphi^W(f) + \varphi^W(g).$$

Sia inoltre $a \in K$, segue:

$$\varphi^W(a) = a \circ \varphi = a(\varphi(x)) = a. \qquad \square$$

Così si ottiene una mappa di insiemi:

$$\alpha\colon \varphi \in M(V,\, W) \to \varphi^W \in \mathrm{Hom}\,(A(W),\, A(V))$$

dove $Hom\,(A(W),\, \mathcal{O}(V))$ denota l'insieme degli omomorfismi di k-algebre. In applicazione del lemma (6.15), possiamo dimostrare la seguente proposizione importante:

Proposizione 6.17. *Sia V una varietà quasi–proiettiva e W una varietà affine. L'applicazione:*

$$\alpha\colon \varphi \in M(V,\, W) \to \varphi^W \in Hom\,(A(W),\, \mathcal{O}(V))$$

è biettiva.

Dim. Il nostro obiettivo è di costruire l'inversa di α. Sia $h \in Hom\,(A(W),\, \mathcal{O}(V))$, con $A(W) = \dfrac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(W)}$ è generata da $x_i + \mathcal{I}_a(W) = x_i,\ i = 1, \dots, n$. Dunque $h\colon A(W) \to \mathcal{O}(V)$ è assegnato non appena si conoscano i valori assunti sulla x_i. Si ha

$$h\colon x_i \in A(W) \to \xi_i \in \mathcal{O}(V),\, i = 1, \dots, n$$

Costruiamo il morfismo:

$$\varphi\colon V \to \mathbb{A}^n \qquad P \to (\xi_1(P), \dots, \xi_n(P))$$

Dimostriamo che φ è un morfismo. Dunque segue

$$\varphi\colon P \in V \to (\xi_1(P), \dots, \xi_n(P)) \in \mathbb{A}^n,\, \varphi_i = x_i \circ \varphi = \xi_i$$

è regolare per il lemma (6.15), allora φ è un morfismo. Inoltre $\varphi(V) \subseteq W$. Infatti W è intersezione di ipersuperfici passanti per W, cioè:

$$W = \bigcap_{Z_a(f) \supseteq W} Z_a(f) = \bigcap_{f \in \mathcal{I}_a(W)} Z_a(f)$$

Proveremo che

$$Z_a(f) \supseteq \varphi(V) \qquad \forall f \in \mathcal{I}_a(W)$$

e allora $W \supseteq \varphi(V)$.

$$\forall f \in \mathcal{I}_a(W), f = f + \mathcal{I}_a(W) = 0 \Rightarrow f\,(x_1, \dots, x_n) = 0$$

come elemento di $A(W)$. Applichiamo h ai due membri di $f\,(x_1, \dots, x_n) = 0$ tale che

$$0 = h(0) = h\left((f(x_1, \dots, x_n))\right).$$

Essendo h un omomorfismo di K-algebre:

$$f\,(h(x_1), \dots, h(x_n)) = f\,(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{O}(V) \Rightarrow f\,(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall P \in V,\ f\,(\xi_1(P), \dots, \xi_n(P)) = 0 \Rightarrow \forall P \in V f\,(\varphi(P)) = 0 \Rightarrow \varphi(V) \subseteq Z_a(f).$$

Dimostriamo che $\varphi^* = h - \varphi^*$:

$$f \circ \varphi^* \colon \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$$

ma $A(W) = \mathcal{O}(W)$ perché W è affine. Si nota $f \to f \circ \varphi$, cioè $f(x_1, \ldots, x_n) \to f(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$. Si ha quindi

$$f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Osservando l'applicazione $h \colon A(W) \to \mathcal{O}(V)$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to h(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Dunque $\varphi^* = h$. L'applicazione

$$\alpha^{-1} \colon Hom(A(W), \mathcal{O}(V)) \to M(V, W)$$

è ovviamente l'inverso di α. $\square$

Osservazione 20. Ad ogni varietà V possiamo associare $\mathcal{O}(V)$, $k-$algebra priva di divisori dello zero, e si ha: $V \to \mathcal{O}(V)$. Ad ogni morfismo $\varphi \colon V \to W$ possiamo associare un $K-$omomorfismo di $k-$algebre:

$$\varphi^* \colon \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V), \qquad \varphi \to \varphi^*$$

C'è corrispondenza tra proprietà algebriche e geometriche.
Se W è affine allora $\mathcal{O}(W)$ è finitamente generata, perchè $\mathcal{O}(W) = A(W)$ che è generato da $x_1, \ldots, x_n$. Se W è affine, dare un morfismo $\varphi \colon V \to W$ equivale a dare un omomorfismo $\varphi^* \colon A(W) \to \mathcal{O}(V)$.

Dalla proposizione (6.17) segue subito che due varietà affini Ve W su K sono isomorfe se e solo se i loro anelli di coordinate $A(V)$ e $A(W)$ sono isomorfi, come K-algebre. Nel linguaggio delle categorie, quanto appena visto può essere espresso nel modo seguente:

Teorema 6.18. *Se V e W sono varietà affini,*

$$V \simeq W \Leftrightarrow A(V) \simeq A(W)$$

Inoltre il funtore controvariante $A \to \mathcal{O}(V)$ tra la categoria delle varietà quasi–proiettive e quella delle $k-$algebre prive di divisori dello zero, induce un'equivalenza di categorie tra le categorie delle varietà affini e quelle delle $k-$algebre finitamente generate prive di divisori dello zero.

Dim. $\Rightarrow$) vale sempre.
$\Leftarrow$) Per la proposizione (6.17) $M(V, W)$ è in corrispondenza biunivoca con $Hom(A(W), \mathcal{O}(V))$, dunque un isomorfismo φ^* di $k-$algebre deve provenire da un morfismo φ di varietà, ma, poichè un isomorfismo di varietà è portato da α in un isomorfismo di $k-$algebre e α è biettiva, φ^* può provenire solo

da un φ isomorfismo di varietà. Abbiamo visto che le algebre delle funzioni regolari di varietà affini sono finitamente generate e prive di divisori dello zero. Questo risultato si inverte. Sia A una $K-$algebra, senza divisori dello zero, finitamente generata allora esiste V varietà affine tale che $A(V) \simeq A$. Sia $\{t_1, \ldots, t_n\}$ un sistema di generatori di A su k come $k-$algebra.
L'applicazione

$$h \colon A^{(n)} \to A$$
$$x_i \to t_i \text{ per } i = 1, \ldots, n$$

è un omomorfismo di $k-$algebre suriettivo, determinato perchè ne abbiamo dato l'immagine dei generatori di $A^{(n)}$.
$\mathcal{I} = Ker\, h$ è un ideale di $A^{(n)}$ tale che $\frac{A^{(n)}}{Ker\, h} \simeq A$, ma A è privo di divisori dello zero, allora:

$$I \text{ è primo } \Rightarrow I \text{ è radicale } \Rightarrow \exists V \subseteq \mathbb{A}^n_k \text{ varietà } : I = \mathcal{I}_a(V) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \simeq \frac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V)} = A(V) \Rightarrow \exists V \subseteq \mathbb{A}^n_k : A \simeq A(V)$$

□

Un risultato analogo del teorema (6.18) non vale, però, nel caso delle varietà proiettive e dei loro anelli delle coordinate omogenee e non vale neanche se consideriamo i loro anelli delle funzioni regolari. Infatti $\mathcal{O}_V(V) = K$ per ogni varietà proiettiva V su K, gli anelli delle funzioni regolari non sono invarianti per isomorfismo.
Sia dato un omomorfismo di K-algebre graduate

$$\psi : S(W) \to S(V) \quad \psi(S(W)_d) \subseteq S(V)_d \quad \forall d \geq 0.$$

Dall'applicazione ψ non si ottiene un morfismo di varietà $\phi : V \to W$, dovuto alla presenza dell'ideale irrilevante. Però si potrebbe cercare di definire la mappa ϕ, almeno a livello dei punti, in modo analogo a quanto fatto nel caso delle varietà affini: un punto $P \in V$ corrisponde a un ideale omogeneo massimale $\mathfrak{m}_P$ di $S(V)$, si consideri quindi l'ideale $\psi^{-1}(\mathfrak{m}_P)$ di $S(W)$ e cerchiamo di vedere se ciò determina un punto di W. Può accadere che, mentre l'ideale $\mathfrak{m}_P$ del punto P non contiene l'ideale irrilevante $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ di $S(V)$, la sua anti-immagine $\psi^{-1}(\mathbf{m}_P)$ contenga l'ideale irrilevante di $S(W)$ e quindi corrisponda all'insieme vuoto. Ciò corrisponde alla situazione seguente: considerato

$$\psi : K[y_0, \ldots, y_m] \to K[x_0, \ldots, x_n]$$

un omomorfismo di K-algebre definito da $y_i \to \phi_i(x_0, \ldots, x_n)$. Se utilizziamo i polinomi ϕ_i per definire una mappa

$$\phi : {\mathbb{P}^n}_K \to \mathbb{P}^m_K \quad (x_0, \ldots, x_n) \to (\phi_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_0, \ldots, x_n)).$$

L'applicazione ϕ non è definita nei punti $(z_0, \ldots, z_n)$ per le quali si ha $\phi_i(z_0, \ldots, z_n) = 0$, per $i = 0, \ldots, m$. In corrispondenza a un tale ψ, si ottiene una mappa ϕ che è definita non su tutto $\mathbb{P}^n{}_K$ ma solo sull'aperto complementare del luogo degli zeri di tutti i polinomi ϕ. In generale, dato un omomorfismo $\psi : S(W) \to S(V)$ come in precedenza, si può definire un morfismo $\phi : U \to W$, dove $U \subseteq V$ è l'aperto contenente i punti $P \in V$ che corrispondono a un ideale massimale $\mathbf{m}_P \subset S(V)$ tale che $\psi^{-1}(\mathbf{m}_P)$ non contiene l'ideale irrilevante di $S(W)$. Date due varietà proiettive V e W su K è possibile che V e W siano isomorfe ma che le K-algebre $S(V)$ e $S(W)$ non lo siano. È sufficiente che si abbia $S(V)_d \cong S(W)_d$ per ogni $d \geq d_0$, per qualche $d_0 \geq 0$, per avere $V \cong W$.

Esempio 6.19. Sia V una varietà proiettiva su k e sia $S(V) = \oplus_{d \geq 0} S(V)_d$ la k-algebra graduata corrispondente. Per ogni $n \geq 1$ definiamo la k-algebra graduata $S(V)^{(n)} = S(V)^{(n)}_d$ ponendo $S(V)^{(n)}_d = S(V)_{nd}$. Le k-algebre $S(V)$ e $S(V)^{(n)}$ non sono isomorfe, se $n \geq 2$, ma corrispondono entrambe alla stessa varietà proiettiva V.

Tale esempio rappresenta il caso in cui si hanno due varietà proiettive isomorfe corrispondenti a due k-algebre non isomorfe.

Osservazione 21. V è univocamente determinato a meno di isomorfismo. Infatti:

$$\exists V' \subseteq \mathbb{A}^n_k : I = \mathcal{I}_a(V') \Rightarrow A \simeq \frac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V)} \simeq \frac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V')}$$

sapendo che $\dfrac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V)} = A(V)$ e $\dfrac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(V')} = A(V')$ segue $A(V) \simeq A(V')$ e per il teorema (6.18), $V \simeq V'$.

Osservazione 22. Se V e W sono varietà proiettive, allora $\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(W) = k$ e

$$\exists!\, \varphi^* \colon \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$$

$k-$omomorfismo di $k-$algebre che è proprio l'identità, dunque $\forall \varphi \colon V \to W$, $\varphi^* = id_K$.

Non è vero perciò che le φ coincidono : infatti per esempio costanti distinte danno applicazioni distinte. Ciò implica che

$$\mid M(V, W) \mid = \infty \qquad \mid Hom\,(\mathcal{O}(W), \mathcal{O}(V)) \mid = 1$$

Vi è un'utile caratterizzazione dei morfismi tra varietà quasi–proiettive, infatti cominciamo con il dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 6.20. *Per ogni $i = 0, \ldots, n$, l'applicazione $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{A}^n$ è un isomorfismo.*

Dim.

$$\begin{aligned}\varphi_i\colon U_i &\to \mathbb{A}^n\\ [a_0,\dots,a_n] &\to \left(\frac{a_0}{a_i},\dots,\frac{a_{i-1}}{a_i},\frac{a_{i+1}}{a_i},\dots,\frac{a_n}{a_i}\right)\end{aligned}$$

Sappiamo già che le φ_i sono omeomorfismi, dunque $\varphi_i,$ e φ_i^{-1} sono continue. Dimostriamo che φ_i è un morfismo.

$$(\varphi_i)_j = x_j \circ \varphi_i = \begin{cases}\dfrac{a_{j-1}}{a_i} & \text{se } j \leq i\\ \dfrac{a_j}{a_i} & \text{se} j > i\end{cases}$$

$x_j \circ \varphi_i$ è rapporto di due polinomi con $a_i \neq 0$ su $U_i \Rightarrow x_j \circ \varphi_i$ è regolare su U_i

Allora φ_i è un morfismo. Dimostriamo che φ_i^{-1} è un morfismo. Analizziamo il caso in cui $i = 0$.

$$\varphi_0^{-1}\colon\ (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n \to [1,a_1,\dots,a_n] \in U_0$$

$\forall f \in \mathcal{O}(U)$ con $U \subseteq U_0$ aperto $\Rightarrow f = \dfrac{P(x_0,\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_n)}$ su U con $P,Q \in S_d^{(n)}, Q \neq 0$ in $U \Rightarrow f \circ \varphi_0^{-1}(\underline{x}) = f(\varphi_0^{-1})(\underline{x}) = \dfrac{P(1,x_1,\dots,x_n)}{Q(1,x_1,\dots,x_n)}$ in $\varphi_0^{-1}(U) \subset \mathbb{A}^n$ con $Q \neq 0$ è quoziente di due polinomi di $A^{(n)} \Rightarrow f \circ \varphi_0^{-1}$ regolare $\Rightarrow \varphi_0^{-1}$ è un morfismo. Quindi $\mathbb{P}^n$ risulta ricoperto da aperti che, come varietà, sono isomorfi a spazi affini. □

Quindi ora possiamo dimostrare quanto segue:

Teorema 6.21. *Siano $V \subseteq \mathbb{P}^n$, $W \subseteq \mathbb{P}^m$ varietà quasi–proiettive. Un'applicazione $\varphi\colon V \to W$ è un morfismo se e solo se per ogni punto $P \in V$ esistono un intorno aperto U di P in V ed $m+1$ polinomi omogenei dello stesso grado $f_0,\dots,f_m \in S^{(n)}$ tale che per ogni punto $P' \in U$ esiste un $i \in \{0,\dots,m\}$ per cui $f_i(P') \neq 0$ e che $\varphi(P') = [f_o(P'),\dots,f_m(P')] \in W \subseteq \mathbb{P}^m$.*

Dim. $\Rightarrow$) Sia $\varphi\colon V \to W$ morfismo, fissiamo $P \in V$, quindi $\varphi(P) = Q \in W$ Considerato il ricoprimento aperto $\{U_0,\cdots,U_m\}$ di $\mathbb{P}^m$, essendo W una varietà quasi proiettiva, in particolare un aperto, per cui

$$\exists i = 0,\cdots,m : Q \in U_i \subseteq W$$

Sia $i = 0$ si ha $Q \in U_0$ e $x_0 \neq 0$. Poniamo $U = \varphi^{-1}(U_0 \cap W) \subseteq V$ dove $U_0 \cap W$ aperto e consideriamo:

$$\varphi_{|U}\colon U \subseteq V \to U_0 \cap W \subseteq U_0 \simeq \mathbb{A}^m \Rightarrow \varphi_{|U}\colon U \subseteq \mathbb{P}^n \to W_0 \subseteq \mathbb{A}^m$$

$\varphi_{|U}$ è un morfismo, perchè restrizione di un morfismo dalla varietà proiettiva U, aperto non vuoto in quanto $Q \in U$, alla varietà affine W_0.

$\varphi_{|U}(P') = (\varphi_1(P'), \ldots, \varphi_m(P'))$ $\forall P' \in U$ e $\varphi_i \in \mathcal{O}(U)$ per ogni i, dunque le φ_i sono regolari in $P \in U$. A patto di restringere eventualmente U possiamo supporre che in U $\varphi_i = \dfrac{f_{i1}}{f_{i0}}$ con $f_{i1},\ f_{i0} \in S^{(n)}_{d_{i_0}}$, $f_{i0} \neq 0$ in U, $i = 0, \ldots, m$

$$\forall P' \in U\ \varphi_{|U}(P') = \left(\frac{f_{11}(P')}{f_{10}(P')}, \ldots, \frac{f_{m1}(P')}{f_{m0}(P')}\right)$$

riducendo a M.C.D.$\{f_{10}(P'), \cdots, f_{m0}(P')\} = f_0(P')$, si ha

$$\forall P' \in U\ \varphi_{|U}(P') = \left(\frac{f_1(P')}{f_0(P')}, \ldots, \frac{f_m(P')}{f_0(P')}\right) \in U_0 \simeq \mathbb{A}^m \subseteq \mathbb{P}^m$$

$f_0 \neq 0$ in U perchè $f_{i0} \neq 0$ in U, per ogni $i = 0, \ldots, m$. Inoltre numeratori e denominatori sono ancora dello stesso grado e quindi $deg\, f_i = deg\, f_0 = d$. Siccome $U_0 \subseteq \mathbb{P}^m$, come punto di $\mathbb{P}^m$,

$$\varphi_{|U}(P') = \left(\frac{f_1(P')}{f_0(P')}, \ldots, \frac{f_m(P')}{f_0(P')}\right) \Rightarrow x_i \circ \varphi_{|U} = \frac{f_i}{f_0}$$

con f_i, f_0 polinomi e $f_0 \neq 0$. Quindi

$$x_i \circ \varphi_{|U} \text{ sono regolari } \Rightarrow \varphi_{|U} \colon U \to W \cap U_0 \subseteq U_0 \text{ è un morfismo}$$

Abbiamo, in conclusione, $U \overset{\varphi_{|U}}{\to} U_0 \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^m$ dove i è l' immersione che è un morfismo, $\varphi_{|U} \colon U \to \mathbb{P}^m$ è morfismo in quanto composto di due morfismi e φ è localmente un morfismo, cioè $\varphi \colon V \to W$ è un morfismo. Quest'ultima affermazione deriva dal fatto che la definizione di morfismo è locale, cioè:

$$\varphi \colon V \to W \text{ morfismo } \Leftrightarrow \varphi \text{ è continua}$$

$\exists \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ricoprimento aperto di W, $\exists \{U'_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ ricoprimento aperto di V e $\varphi\,|_{U'_i} \colon U'_i \to U_i$ morfismo $\forall_i \in \mathcal{I}$.
Osserviamo che $f_0, \ldots, f_m$ sono determinati a meno di una costante, cioè di un polinomio non nullo in tutto U, oppure di un polinomio appartenente $\mathcal{I}_P(V)$, perchè:

$$g \in \mathcal{I}_P(V) \Rightarrow g(V) = \{0\} \Rightarrow f_i + g = f_i \text{ in } V$$

perciò $f_0, \ldots, f_m$ sono dati modulo $\mathcal{I}_P(V)$.
In definitiva per dare un morfismo basta dare $f_0, \ldots, f_m \in S(V)_d$, perché $S(V)_d = \left\{ f + \mathcal{I}_P(V) \mid f \in S^{(n)}_d \right\}$. $\square$

Trattare con varietà affini è spesso più conveniente che trattare con varietà proiettive, perchè le prime sono in corrispondenza biunivoca con le $k-$algebre finitamente generate, quindi ci si cerca di ridurre le varietà quasi–proiettive a varietà quasi–affini. Si inizi con degli esempi:

Esempio 6.22. La varietà quasi-affine $V = \mathbb{A}^1_K - \{0\}$ è affine, cioè è isomorfa a una varietà affine. Se consideriamo l'anello delle funzioni regolari su V, è facile vedere che

$$\mathcal{O}(V) \cong K[x]_x = \left\{\frac{f(x)}{x^n} : f(x) \in K[x], n \geq 0\right\} \cong K[x, x^{-1}] \cong \frac{K[x,y]}{(xy-1)}$$

Consideriamo la varietà affine $W \subset \mathbb{A}^2_K$ di equazione $xy - 1 = 0$. Allora la proiezione sull'asse delle x,

$$\pi : W \to V$$

$$(x, y) \to x$$

determina un isomorfismo tra W e V.

Esempio 6.23. La varietà quasi-affine $X = \mathbb{A}^2_K - \{(0,0)\}$ non e' isomorfa a una varietà affine, quindi esistono varietà quasi-affini che non sono affini. Osserviamo che V può essere ricoperta dai due aperti

$$U_1 = \mathbb{A}^2_K - Z_1 \qquad U_2 = \mathbb{A}^2_K - Z_2$$

dove Z_1 e Z_2 sono i due sottoinsiemi chiusi di equazioni $x = 0$ e $y = 0$ rispettivamente. Si vede che

$$\mathcal{O}_V(U_1) = K[x,y]_x \text{ e } \mathcal{O}_V(U_2) = K[x,y]_y$$

Consideriamo ora $f \in \mathcal{O}_V(V)$. Si ha

$$f_{|U_1} \in \mathcal{O}_V(U_1) = K[x,y]_x \text{ e } f_{|U_2} \in \mathcal{O}_V(U_2) = K[x,y]_y$$

quindi

$$f_{|U_1} = \frac{p(x,y)}{x^n}, f_{|U_2} = \frac{q(x,y)}{y^m}$$

per qualche $n, m \geq 0$ e per due opportuni polinomi $p, q \in K[x,y]$. Queste due espressioni devono coincidere nell'intersezione $U_1 \cap U_2$ e dovrà aversi:

$$\frac{p(x,y)}{x^n} = \frac{q(x,y)}{y^m}$$

per ogni $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Ciò è possibile solo se $m = n = 0$, da ciò segue che f deve essere un polinomio. Si è così dimostrato che $\mathcal{O}_V(V) = K[x,y]$. Supponiamo, per assurdo che V sia affine, dato che $\mathcal{O}_V(V) = K[x,y]$, si dovrebbe avere un isomorfismo $V \cong \mathbb{A}^2_K$ ma $\mathbb{A}^2_K - \{(0,0)\}$ non è isomorfo a $\mathbb{A}^2_K$. Dunque V non è una varietà affine.

Esempio 6.24. Siano V una varietà proiettiva e W una varietà affine sul campo k. Ricordando che $\mathcal{O}_V(V) = K$, si ha:

$$M(V, W) \cong \operatorname{Hom}(A(W), \mathcal{O}_V(V)) \cong \operatorname{Hom}(A(W), K)$$

Se P è una varietà affine consistente in un unico punto, si ha $A(P) = k$ e dunque

$$\operatorname{Hom}(A(W), K) \cong \operatorname{Hom}(A(W), A(P)) \cong M(P, W).$$

Si è così dimostrato, con tale esempio, che ogni morfismo da una varietà proiettiva a una varietà affine è costante.

Esempio 6.25. Consideriamo l'immersione, detta di Veronese, di $\mathbb{P}^1_k$ in $\mathbb{P}^2_k$ data da

$$\phi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^2_k, (x_0, x_1) \to (x_0^2, x_0x_1, x_1^2).$$

Se indichiamo con (z_0, z_1, z_2) le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2_k$, l'immagine di ϕ e' la conica di equazione $z_0z_2 = z_1^2$ e ϕ determina un isomorfismo tra $\mathbb{P}^1_k$ e la sua immagine in $\mathbb{P}^2_k$. Geometricamente questo isomorfismo tra la retta proiettiva $\mathbb{P}^1_k$ e una conica C del piano proiettivo può essere descritto come segue: sia C una conica e identifichiamo $\mathbb{P}^1_k$ con una retta proiettiva r immersa nel piano proiettivo. Fissiamo un punto P sulla conica C, in modo che P non stia sulla retta r e consideriamo la proiezione ϕ di centro P della retta r sulla conica C. Per ogni punto $Q \in r$, il punto $\phi(Q) \in C$ è il punto determinato in modo tale che la retta passante per P e Q intersechi la conica C nella coppia di punti P e $\phi(Q)$, con la convenzione che $\phi(Q) = P$ se la retta per P e Q e' tangente a C nel punto P. Se introduciamo delle coordinate affini $V = \dfrac{x_1}{x_0}$ su $\mathbb{P}^1_k$ e $Z_1 = \dfrac{x_1}{x_0}$, $Z_2 = \dfrac{x_2}{x_0}$ su $\mathbb{P}^2_k$, l'immersione ϕ e' data da $\phi(V) = (X, X^2)$ che e' un isomorfismo tra la retta affine e la parabola di equazione $Z_2 = Z_1^2$. Nel considerare gli anelli delle coordinate omogenee, si ha:

$$S(\mathbb{P}^1_k) = k[x_0, x_1] \text{ e } S(C) = k[z_0, z_1, z_2]/(z_0z_2 - z_1^2),$$

i quali non sono isomorfi. Poniamo dunque

$$S = K[x_0, x_1] = \oplus_{d \geq 0} S_d \text{ e } R = k[z_0, z_1, z_2]/(z_0z_2 - z_1^2) = \oplus_{d \geq 0} R_d$$

Considerando i generatori x_0^2, x_0x_1 e x_1^2 di $S_2 = S_1^{(2)}$ e ponendo $z_0 = x_0^2$, $z_1 = x_0x_1$ e $z_2 = x_1^2$, si trova che questi sono dei generatori di R_1 e di conseguenza , $R_1 \cong S_1^{(2)} = S_2$. In modo analogo si dimostra che $R_d \cong S_d^{(2)} = S_d$, per ogni $d \geq 2$. In conclusione le K-algebre S e R non sono isomorfe, ma $R \cong S^{(2)}$. Le due K-algebre graduate S e $S^{(2)}$ corrispondono entrambe alla retta proiettiva ma, mentre S corrisponde a $\mathbb{P}^1_k$, $S^{(2)}$ corrisponde alla retta proiettiva immersa in $\mathbb{P}^2_k$ tramite l'immersione di Veronese ψ. Si dimostra in generale che per ogni intero $d \geq 1$, la K-algebra graduata $S^{(d)}$ corrisponde alla retta proiettiva immersa in $\mathbf{P}^d$ tramite la seguente immersione:

$$\phi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^d_k, (x_0, x_1) \to (x_0^d, x_0^{d-1}x_1, x_0^{d-2}x_1^2, \ldots, x_0x_1^{d-1}, x_1^d).$$

Definizione 6.26. Se V è una varietà quasi–proiettiva, essa è affine se e solo se V è isomorfa a una varietà affine. Inoltre $U \subseteq V$ quasi–proiettiva è affine se e solo se U è affine secondo la definizione di sopra.

Proposizione 6.27. *Sia Z l'ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$ di equazione $f(\underline{x}) = 0$, con $f \in A^{(n)}$ polinomio non costante. Allora $\mathbb{A}^n - Z$ è isomorfo all'ipersuperficie irriducibile $Z_a(x_{n+1}f - 1)$ di $\mathbb{A}^{(n+1)}$. In particolare $\mathbb{A}^n - Z$ è una varietà affine e $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n - Z) \simeq A_f^{(n)}$.*

Dim. È chiaro che $x_{n+1}f-1$ è irriducibile perché polinomio di primo grado in x_{n+1}. $Z_a(x_{n+1}f-1)$ è un'ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{A}^{n+1}$ ed è chiusa e quindi è sottovarietà di $\mathbb{A}^{n+1}$. Dimostriamo che $\mathbb{A}^n - Z \simeq Z_a\left(x_{n+1}f-1\right) = Z'$. Sia considerata l'applicazione

$$\varphi\colon\ (a_1,\ldots,a_{n+1}) \in Z' \to (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{A}^n - Z$$

la quale è un morfismo, perchè $x_i \circ \varphi = a_i$ è regolare. Inoltre $\varphi(Z') \subseteq \mathbb{A}^n - Z$, perché preso una $n-$pla $(a_1,\cdots,a_n) \in Z'$, si ha

$$a_{n+1}f(a_1,\ldots,a_n) - 1 = 0 \Rightarrow a_{n+1}f(a_1,\ldots,a_n) = 1 \Rightarrow f(a_1,\ldots,a_n) \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1,\ldots,a_n) \notin Z \Rightarrow (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{A}^n - Z \Rightarrow \varphi\colon Z' \to \mathbb{A}^n - Z \text{ è un morfismo.}$$

Costruiamo, ora l'inversa, per dimostrare che φ è un isomorfismo:

$$\psi\colon\ (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{A}^n - Z \to \left(a_1,\ldots,a_n,\frac{1}{f(a_1,\ldots,a_n)}\right) \in Z'$$

L'applicazione ψ ha senso perché $(a_1,\ldots,a_n) \notin Z$, allora $f\left(a_1,\ldots,a_n\right) \neq 0$ e in più è un morfismo perchè $x_i \circ \psi = a_i$, per $i = 1,\ldots,n$ e $x_{n+1} \circ \psi = \dfrac{1}{f(a_1,\ldots,a_n)}$ sono regolari, dunque

$$\mathbb{A}^n - Z \simeq Z_a\left(x_{n+1}f-1\right) \Rightarrow \mathbb{A}^n - Z \text{ è una varietà affine .}$$

Ciò implica che

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n - Z) \simeq \mathcal{O}(Z') = A(Z') = \frac{A^{n+1}}{(x_{n+1}f-1)} =$$
$$= \frac{k\left[x_1,\ldots,x_{n+1}\right]}{(x_{n+1}f-1)} \simeq A_f^{(n)} = \left\{\frac{h}{f^n} \mid h \in A^{(n)}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

In effetti $A(Z') = \dfrac{A^{n+1}}{\mathcal{I}_a(Z')}$, ma Z' è un'ipersuperficie irriducibile e allora $\mathcal{I}_a(Z')$ è generato da ogni polinomio irriducibile che si annulla su Z' come per esempio dall'equazione ridotta: $\mathcal{I}_a(Z') = (x_{n+1}f-1)$. Concludiamo col dimostrare l'ultimo isomorfismo:

$$\alpha\colon h\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right) + (x_{n+1}f-1) \to h\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{1}{f}\right)$$

α è ben posta, infatti cambiando rappresentante:

$$h\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right) + (x_{n+1}f-1) = h'\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right) + (x_{n+1}f-1)$$
$$\Leftrightarrow h\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right) - h'\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right) + (x_{n+1}f-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(h-h'\right)\left(x_1,\ldots,x_{n+1}\right) + (x_{n+1}f+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow h - h' \in (x_{n+1}f - 1) \ \text{ con } k \text{ polinomio}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\left(h - h'\right) = \alpha(h) - \alpha(h') = k\left(\frac{1}{f}f - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(h) = \alpha(h')$$

Da ciò segue che α è anche iniettivo. Inoltre α è un omomorfismo ed è suriettiva, in quanto per ogni $\dfrac{h\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{f^n} \in A_f^{(n)}$ si ha $\dfrac{h(x_1, \ldots, x_n)}{f^n} = h'\left(x_1, \ldots, x_n, \dfrac{1}{f}\right)$ che proviene da $h'\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \left(x_{n+1}f - 1\right)$.
Se consideriamo $\varphi \colon Z' \to \mathbb{A}^n$, cioè $\varphi \colon Z_a\left(x_{n+1}f - 1\right) \to \mathbb{A}^n$ che è un morfismo, φ corrisponde a $\varphi^* \colon \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(Z')$, cioè $\varphi^* \colon A^{(n)} \hookrightarrow A^{(n)}$ che è un'inclusione. Infatti φ è dominante perchè $\varphi(Z') = \mathbb{A}^n - Z$ è un aperto di $\mathbb{A}^n$ ed è irriducibile e dunque:

$$\overline{\varphi(Z')} = \overline{\mathbb{A}^n - Z} = \mathbb{A}^n \Rightarrow \overline{\varphi(Z')} = \mathbb{A}^n \Rightarrow \varphi^* \text{ è iniettivo .}$$

φ^* è l'unica immersione di $A^{(n)}$ in $A_f^{(n)}$ perchè i generatori di $A^{(n)}$ si trasformano nei generatori di $A_f^{(n)}$, cioè $x_i \to x_i \circ \varphi = x_i$. $\square$

Osservazione 23. Se V è una varietà quasi–proiettiva affine allora $\mathcal{O}(V)$ è una $k-$algebra finitamente generata. Il viceversa non vale.

Proposizione 6.28. *Su ogni varietà V vi è una base per la topologia di Zariski costruita da aperti affini.*

Dim. Abbiamo visto che ciò vale per $\mathbb{P}^n$. Dimostriamo che:

$\forall P \in V$ e $\forall U' \subseteq V$ aperto passante per P, $\exists U$ aperto affine, tale che $P \in U \subseteq U'$.

$$U' \subseteq U \,\text{aperto} \Rightarrow \begin{cases} U' & \text{irriducibile perchè } V \text{irriducibile} \\ U' & \text{localmente chiuso perchè } V \text{ localmente chiuso} \\ V = A \cap C & \text{con } A \text{ aperto e } C \text{ chiuso} \Rightarrow U' = (U' \cap A) \cap (U' \cap C) \\ & \text{rispettivamente aperto di } U' \text{e chiuso di } U'. \end{cases}$$

Quindi U' è una varietà quasi–proiettiva, allora possiamo ridurci al caso $U' = V$ e dimostriamo che $\forall P \in V$ esiste U aperto affine tale che $P \in U \subseteq V$. Inoltre se $P \in V \subseteq \mathbb{P}^n$, allora esiste un i tale che $P \in U_i$, (per esempio U_0). Dunque possiamo sostituire V con $U_0 \cap V$ e possiamo ridurci al caso V quasi–affine e dimostrare quanto segue:

$$\forall\, V \subseteq \mathbb{A}^n \text{ varietà quasi–affine } \forall P \in V, \exists U \text{ aperto affine } \mid P \in U \subseteq V.$$

Poniamo $Z = \overline{V} - V$, che è un chiuso di $\mathbb{A}^n$. Infatti V è localmente chiuso, allora $V = A - B$, con A chiuso di $\mathbb{A}^n$ e B chiuso in $\mathbb{A}^n$ tale che $B \subset A$, ma $\overline{V} \subseteq A$ perchè $V \subseteq A$, di conseguenza possiamo prendere $A = \overline{V}$ e allora

$$V = \overline{V} - B \Rightarrow \overline{V} - V = B$$

chiuso, perché in questo caso $B = Z$. Segue

$$\forall P \in V \Rightarrow P \notin Z \Rightarrow \exists f \in \mathcal{I}_a(Z) \mid f(P) \neq 0.$$

Consideriamo $U = V \cap (\mathbb{A}^n - Z_a(f))$ e dimostriamo che U è l'aperto cercato. U è un aperto di V perchè $\mathbb{A}^n - Z_a(f)$ è aperto in $\mathbb{A}^n$. $P \in U$, perchè $P \notin Z_a(f)$ e $P \in V$. Dimostriamo che U è affine cioè che è isomorfo a un aperto affine. Se f non è costante allora

$$\mathbb{A}^n - Z_a(f) \simeq Z_a\left(1 - x_{n+1}f\right) \Rightarrow \mathbb{A}^n - Z_a(f) \text{ affine.}$$

Se f è costante, si ha

$$Z_a(f) = \begin{cases} \varnothing \\ \mathbb{A}^n \end{cases} \Rightarrow \mathbb{A}^n - Z_a(f) = \begin{cases} \mathbb{A}^n \\ \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow \mathbb{A}^n - Z_a(f) \ \text{ affine}$$

Ma $U = (\mathbb{A}^n - Z_a(f)) \cap V$ allora $U \subseteq \mathbb{A}^n - Z_a(f) \simeq Z_a\left(1 - x_{n+1}f\right) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, dove $H_i = Z_a\left(1 - x_{n+1}f\right)$ è un chiuso. Se dimostriamo che U è chiuso in $\mathbb{A}^n - Z_a(f) \overset{\varphi}{\simeq} H$ avremo che, poichè φ è chiusa, U è portato in U' da φ, con $U' \subseteq H$ chiuso di H, con H chiuso di $\mathbb{A}^n$,

$$U' \text{ chiuso in } \mathbb{A}^{n+1} \Rightarrow U \overset{\varphi}{\simeq} U' \text{ chiuso in } \Rightarrow U \text{ affine.}$$

Dimostriamo che U chiuso in $\mathbb{A}^n - Z_a(f)$.
Consideriamo $\overline{U}$, chiusura di U in $\mathbb{A}^n - Z_a(f)$. Risulta che

$$\overline{U} = \overline{V} \cap (\mathbb{A}^n - Z_a(f)) = \overline{V} \cap \left(\overline{V} - Z_a(f)\right)$$

perchè $\overline{V} \cap (\mathbb{A}^n - Z_a(f))$ è il complementare di $Z_a(f)$ in $\overline{V}$, ma $f \in \mathcal{I}_a(Z)$ allora

$$Z_a(f) \supseteq Z_a(\mathcal{I}_a(Z)) \supseteq Z \Rightarrow Z_a(f) \supseteq Z \Rightarrow \overline{V} - Z_a(f) \subseteq \overline{V} - Z$$

$$\Rightarrow \overline{U} = \overline{V} \cap \left(\overline{V} - Z_a(f)\right) \subseteq \overline{V} \cap (\overline{V} - Z) = \overline{V} - Z = V \Rightarrow \overline{U} \subseteq V$$

$$\Rightarrow \overline{U} \subseteq V \cap (\mathbb{A}^n - Z_a(f)) = U \Rightarrow \overline{U} \subseteq U \Rightarrow U \text{ chiuso in } \mathbb{A}^n - Z_a(f).$$

U irriducibile perchè aperto non vuoto di V, che è irriducibile. □

Esempio 6.29. Se V è una varietà quasi–proiettiva, allora $M\left(V, \mathbb{A}^1\right) = \mathcal{O}(V)$. Ciò segue subito dal lemma (6.15).
Proviamo la prima inclusione. Sia $\varphi \in M(V, \mathbb{A}^1)$,allora φ è continua e

$$\forall U \subseteq \mathbb{A}^1 \text{ e } \forall f \in \mathcal{O}(U), f \circ \varphi \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$$

In particolare per $U = \mathbb{A}^1$ e $f = i_{\mathbb{A}^1}$ si ha $i_{\mathbb{A}^1} \circ \varphi = \varphi \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(\mathbb{A}^1)\right) = \mathcal{O}(V)$ e dunque $\varphi \in \mathcal{O}(V)$. Viceversa, sia $\varphi \in \mathcal{O}(V)$, allora φ è continua. Inoltre $\forall P \in V, \exists U' \subseteq V$ aperto passante per P, tale che $\varphi = \dfrac{A}{B}$, con $A, B \in S_d^{(n)}$ e $B \neq 0$ in U', cioè $\varphi = \dfrac{A(x_0, \dots, x_n)}{B(x_0, \dots, x_n)}$;

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & & U \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{A}^1 & \end{tikzcd}$$

Dimostriamo che: $\forall U \subseteq \mathbb{A}^1\, \forall f \in \mathcal{O}(U),\ f \circ \varphi \in \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$

$$f \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f = \frac{\psi}{\Phi} \text{ con } \psi, \Phi \in A^{(1)},\ \Phi \neq 0 \text{ in } U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \circ \varphi = \frac{\psi}{\Phi}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\psi\left(\frac{A}{B}\right)}{\Phi\left(\frac{A}{B}\right)} \text{ in } \varphi^{-1}(U) \text{ con } \Phi\left(\frac{A}{B}\right) \neq 0 \text{ in } \varphi^{-1}(U)$$

Dimostriamo che questo è un quoziente di due polinomi dello stesso grado. Consideriamo il massimo comun divisore di $\psi\left(\dfrac{A}{B}\right)$ e $\Phi\left(\dfrac{A}{B}\right)$ che sarà lo stesso per ψ e Φ perchè hanno lo stesso grado e in essi, al denominatore, compare solo B elevato alle potenze a cui si trova la variabile di ψ e Φ. Si può semplificare il massimo comun divisore e si ottiene $\dfrac{\psi(x_0, \dots, x_n)}{\Phi(x_0, \dots, x_n)}$ con Φ e $\psi \in S_D^{(n)}$.

Esempio 6.30. La cubica gobba affine Z è isomorfa ad $\mathbb{A}^1$.
Questo perché, sia

$$Z = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in K\}$$

allora si ha:

$$\varphi \colon t \in \mathbb{A}^1 \to (t, t^2, t^3) \in Z$$

è un morfismo, in quanto

$$x_i \circ \varphi = \begin{cases} t \\ t^2 \\ t^3 \end{cases}$$

che sono regolari.Inoltre $\varphi^{-1} \colon (t, t^2, t^3) \in Z \to t \in \mathbb{A}^1$ è anch'esso un morfismo per la stessa ragione allora φ è un isomorfismo.

Esempio 6.31. La cubica gobba proiettiva $\overline{Z}$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$.
Consideriamo
$$\varphi\colon [\lambda,\mu]\in\mathbb{P}^1 \to [\lambda^3,\lambda^2\mu,\lambda\mu^2,\mu^3]\in\overline{Z}$$
che è un morfismo. Si consideri
$$\varphi^{-1}\colon [x_0,x_1,x_2,x_3]\in\overline{Z} \to \begin{cases}[x_0,x_1] & \text{se}\, x_0\neq 0\\ [x_2,x_3] & \text{se}\, x_3\neq 0\end{cases}$$
il quale è un morfismo, ricordando che in $\overline{Z}$ non è mai $x_0=x_3=0$, perchè altrimenti dalle equazioni di $\overline{Z}$ si avrebbe anche $x_1=x_2=0$, che è una contraddizione. Non è suriettiva in quanto $x_1\notin Im\,\varphi^*$ perchè gli elementi di $Im\,\varphi^*$ sono combinazioni lineari di x_1^2 e x_1^3 allora φ^* non è un isomorfismo e dunque φ non è un isomorfismo.
Facciamo vedere che φ è biettiva costruendo l'inversa:
$$\psi\colon (x,y)\in V\to\begin{cases}0 & \text{se}\,(x,y)=(0,0)\\ \dfrac{y}{x} & \text{se}\, x\neq 0\,(\text{ se } \ x=0\Rightarrow y=0, \text{ perchè il punto} \in V)\end{cases}$$
$$\psi\circ\varphi\colon t\to(t^2,t^3)\to\begin{cases}0 & \text{se }\ t=0\\ \dfrac{t^3}{t^2}=t\end{cases}$$
$$\varphi\circ\psi\colon (x,y)\to\begin{cases}0\\ \frac{y}{x}\end{cases}$$
$$\to\begin{cases}(0,0)\\ \left(\frac{y^2}{x^2},\frac{y^3}{x^3}\right)=\left(\frac{x^3}{x^2},\frac{y^3}{y^2}\right)=(x,y)\end{cases}$$
dove $x^3=y^2$ è l'equazione di V. Dunque φ è biettiva.

Un'altra utile caratterizzazione di morfismi è il morfismo di Frobenius. Supponiamo $char k=p>0$.

Definizione 6.32. L'applicazione
$$F\colon [x_0,\ldots,x_n]\in\mathbb{P}^n\to[x_0^P,\ldots,x_n^P]\in\mathbb{P}^n$$
è chiamato morfismo di Frobenius in $\mathbb{P}^n$. Invece l'applicazione
$$F\colon (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{A}^n\to(x_1^P,\ldots,x_n^P)\in\mathbb{A}^n$$
è chiamato morfismo di Frobenius in $\mathbb{A}^n$

Per ogni $i, F(U_i) = U_i$ cioè F porta gli aperti affini in sè stessi. Infatti se $x_i \neq 0$ anche $x_i^p \neq 0$ e dunque il punto immagine appartiene a U_i. F, perciò, induce un isomorfismo su ogni U_i , per esempio per $U_0 \simeq \mathbb{A}^n$.

Osservazione 24. F non è un isomorfismo in $\mathbb{A}^n$.
Infatti, se per assurdo F fosse un isomorfismo allora

$$F^*\colon A^{(n)} \to A^{(n)}$$

$$x_i \to x_i \circ F = x_i^P$$

sarebbe un isomorfismo di $k-$algebre. Invece F^* non è un isomorfismo perchè F^* non è suriettivo, in quanto i polinomi di grado minore di p non sono immagine di nulla, perchè gli elementi di $Im\, F^*$ sono i polinomi le cui variabili compaiono con esponente multiplo di p. Neanche F in $\mathbb{P}^n$ è un isomorfismo, perchè altrimenti F indurrebbe un isomorfismo in $\mathbb{A}^n$, per restrizione.

Lemma 6.33. *L'applicazione*

$$\varphi\colon \alpha \in k \to \alpha^P \in k$$

è un isomorfismo, detto isomorfismo di Frobenius.

Dim. È un omomorfismo, perché

$$\varphi(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)^P = \alpha^P + \binom{p}{1}\alpha^{(p-1)}\beta + \cdots + \binom{p}{p-1}\alpha\beta^{p-1} + \beta^p = \alpha^p + \beta^p$$

perché i coefficienti binomiali sono tutti multipli di p. Quindi sono nulli e dunque $\varphi\,(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. È chiaro che valga anche quanto segue

$$(\alpha\beta)^p = \alpha^p\beta^p \Rightarrow \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

Facciamo vedere che φ è biettiva, cioè che

$$\forall \beta \in k\, \exists! \alpha \in k : \alpha^P = \beta$$

Poichè k è algebricamente chiuso allora esisterà una radice $\alpha \in k$ di $x^p = \beta$. La radice è unica perché

$$\frac{d}{dx}(x^p - \beta) = px^{p-1} = 0$$

perchè $p = char\, k$ e così via tutte le derivate sono nulle. x è soluzione delle derivate, allora x è soluzione di molteplicità massima pari a p. Qualora k non è algebricamente chiuso esisterà un omomorfismo di Frobenius iniettivo ma non necessariamente suriettivo. L'inversa è

$$\psi\colon \beta \in k \to \beta^{\frac{1}{P}} \in k$$

dove $\beta^{\frac{1}{p}}$ è l'unica radice di $x^p = \beta$. Considerando che

$$(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}} = \alpha^{\frac{1}{p}} + \beta^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow (\alpha+\beta) = (\alpha^{\frac{1}{p}} + \beta^{\frac{1}{p}})^p \Leftrightarrow (\alpha+\beta) = \alpha^{\frac{1}{p}p} + \beta^{\frac{1}{p}p} = \alpha+\beta$$

si ha

$$\psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$$

Analogamente

$$\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$$

Si conclude che ψ è un omomorfismo. Dunque

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id_k \Rightarrow \varphi \text{ isomorfismo.} \qquad \square$$

Osservazione 25. φ induce un isomorfismo di anelli

$$\Phi \colon A^{(n)} \to A^{(n)}$$

$$f = \sum a_{i_1 \dots i_n} x_n^{i_1} \dots x_n^{i_n} \to \Sigma \underbrace{\varphi(a_{i_1 \dots i_n})}_{=a^P_{i_1 \dots i_n}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Non è un isomorfismo di $k-$algebre, perché l'applicazione ad ogni elemento $a \in k$ associa $a^P \in k$ cioè non fissa le costanti punto per punto. Φ muta polinomi omogenei in polinomi omogenei dello stesso grado (perchè non agisce sulle variabili). Φ è biettiva perchè tale era φ. Analogamente φ induce:

$$\Phi \colon S^{(n)} \to S^{(n)}$$

$$f = \sum b_{i0 \dots in} x_0^{i0} \dots x_n^{in} \to \sum \varphi(b_{i0 \dots in}) x_0^{i0} \dots x_n^{in}$$

isomorfismo di anelli.

Proposizione 6.34. *F è un omeomorfismo.*

Dim. Dimostriamo che F è chiusa. Consideriamo $f \in S_d^{(n)}$, si ha

$$F^*(f(x_0 \dots x_n)) = f(x_0^P, \dots, x_n^P).$$

Si farà vedere che:

$$f(x_0^p \dots x_n^p) = \left(\Phi^{-1}(f)(x_0 \dots x_n)\right)^p$$

Dunque

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \Rightarrow f(x_0^p, \dots, x_n^p) = \sum a_{i_0 \dots i_n} x_0^{P_{i_0}} \dots x_n^{P_{i_n}}$$

Quindi

$$\Phi^{-1}(f)(x_0 \dots x_n) = \sum \varphi^{-1}(a_{i_0 \dots i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} = \sum \psi(a_{i_0 \dots i_n}) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$$

Segue che

$$\left(\Phi^{-1}(f)(x_0\dots x_n)\right)^p = \left(\sum \psi(a_{i_0\dots i_n})x_0^{i_0}\dots x_n^{i_n}\right)^p = \sum \left(\psi(a_{i_0\dots i_n})\right) x_0^{p_{i_0}}\dots x_n^{p_{i_n}}$$

perchè $(\alpha+\beta)^p = (\alpha^p+\beta^p)$. φ eleva gli elementi di k alla p.

$$\sum \varphi\left(\psi(a_{i_0\dots i_n})\right) x_0^{p_{i_0}}\dots x_n^{p_{i_n}} = \sum a_{i_0\dots i_n} x_0^{p_{i_0}}\dots x_n^{p_{i_n}}$$

Dimostriamo che

$$F\left(Z_p(\Phi^{-1}(f))\right) = Z_p(f)$$

$$[\alpha_0\dots\alpha_n] \in Z_p\left(\Phi^{-1}(f)\right) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(f)(\alpha_0\dots\alpha_n) = 0$$

Allora

$$\left(\Phi^{-1}(f)(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\right)^p = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_0^p,\dots\alpha_n^p) = 0$$

$$f(F([\alpha_0,\dots,\alpha_n])) = 0 \Leftrightarrow F([\alpha_0,\dots,\alpha_n]) \in Z_p(f)$$

Poichè Φ è un isomorfismo, si ha $\Phi^{-1}(f)$ è un polinomio g.

$$F(Z_p(g)) = Z_p(\Phi(g))$$

cioè F manda chiusi in chiusi, cioè F è chiusa. F è continua perchè è un morfismo, inoltre è biettiva perché lo è la φ, del resto l'inversa è:

$$F^{-1}\colon [x_0,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n \to [x_0^{\frac{1}{p}},\dots,x_n^{\frac{1}{p}}] \in \mathbb{P}^n$$

Quindi F è un omeomorfismo. $\square$

Osservazione 26. Il morfismo di Frobenius muta chiusi in chiusi, perché è un omeomorfismo, in più muta ipersuperfici di un certo grado in ipersuperfici dello stesso grado, perchè $F(Z_p(g)) = Z_p(\Phi(g))$ e Φ conserva i gradi e i polinomi omogenei e muta sottospazi in sottospazi, perchè definita da un sistema di equazioni lineari e iperpiani in iperpiani perchè definiti da un'equazione lineare.

7 Varietà di Segre

La varietà di Segre, citata precedentemente come esempio di varietà proiettiva, assume particolare significato dopo aver introdotto il concetto di morfismo. Infatti, ricordando ciò che è stato detto prima, siano n, m due interi, e si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}_k^{(n+1)(m+1)}$. I punti di $\mathbb{A}^{(n+1)(m+1)}$ possono identificarsi con le matrici

$$W = (w_{ij})_{i=0,\dots,n \quad j=0,\dots,m}$$

di tipo $(n+1)\times(m+1)$ sul campo k. Di conseguenza i punti di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ possono identificarsi con le classi di equivalenza $[W]$, rispetto alle proporzionalità di matrici W non nulle di tipo $(n+1)$ e $(m+1)$.
È stato definito l'insieme:

$$S_{n,m} = \{[W] \in \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \colon \rho(W) = 1\}$$

ed abbiamo dimostrato che è una varietà proiettiva, in particolare è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}_k^{(n+1)(m+1)-1}$.

Definizione 7.1. $S_{n,m}$ prende il nome di varietà di Segre di tipo n, m, e si denota sovente con $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, pensando tale insieme identificato con $S_{n,m}$ tramite la $\sigma_{n,m}$ e quindi munite della topologia indotta dalla $\sigma_{n,m}$.

Osservazione 27. $S_{n,m}$ è non degenere ossia non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. Infatti, come è facile rendersi conto, non vi sono polinomi di primo grado in $\mathcal{I}^{(n,m)}$.

Fissati due interi positivi n ed m e considerate le seguente indeterminate sul campo K: $x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_m$, si costruisca l'anello di polinomi in tali indeterminate:

$$S^{(n,m)} = K[x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_m]$$

dove è chiaro che si presenta una struttura di anello graduato. Per ogni coppia $(d_1, d_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, posto $d = d_1 + d_2$, si consideri l'insieme $S_{d_1 d_2}^{(n,m)}$ dei polinomi omogenei di grado d che sono omogenei di grado d_1 nelle variabili x_i e di grado d_2 nelle variabili y_j. È chiaro che in tal modo si determina una bigradazione su $S^{(n,m)}$.

Definizione 7.2. Sia $f \in^p S^{(n,m)}$ un polinomio omogeneo e sia $(P_1, P_2) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ un punto, rispettivamente di coordinate $P_1 = [\underline{a_1}]$ e $P_2 = [\underline{a_2}]$. Il punto (P_1, P_2) è uno zero del polinomio f e si scriverà $f(P_1, P_2) = 0$ se $f(\underline{a_1}, \underline{a_2}) = 0$.

Definizione 7.3. Sia $f \in^p S^{(n,m)}$, si definisce insieme degli zeri di f, il seguente insieme:

$$Z_s(f) = \{(P_1, P_2) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m : f(P_1, P_2) = 0\} \subseteq \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m.$$

Inoltre se si considera un sottoinsieme $F \subseteq S^{(n,m)}$, si può definire l'insieme degli zeri di F, nel seguente modo:

$$Z_s(F) = \bigcap_{f \in^p F} Z_s(f)$$

dove ${}^pF = F \cap^p S^{(n,m)}$.

Proposizione 7.4. *Sia $F \subseteq S^{(n,m)}$ e sia l'insieme ${}^pF$ e il relativo ideale generato*

$$({}^pF) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} g_i f_i : f_i \in^p F, g_i \in S^{(n,m)} \right\}$$

allora risulta $Z_s(F) = Z_s(({}^pF))$.

Dim.

$$z \in Z_s(F) \Rightarrow z \in Z_s(f) \quad \forall f \in^p F \Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall f \in^p F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \in Z_s((^pF)) \Rightarrow Z_s(F) \subseteq Z_s((^pF))$$

Viceversa

$$z \in Z_s((^pF)) \Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall f \in (^pF)$$

poiché $^pF \subseteq (^pF)$, si ha

$$f(z) = 0 \quad \forall f \in^p F \Rightarrow z \in Z_s(f) \quad \forall f \in^p F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \in \bigcap_{f \in^p F} Z_s(f) = Z_s(F) \Rightarrow Z_s((^pF)) \subseteq Z_s(F) \Rightarrow Z_s((^pF)) = Z_s(F).$$

□

Osservazione 28. L'anello $S^{(n,m)}$ è un anello noetheriano, quindi ogni suo ideale è finitamente generato, allora

$$\exists f_1, f_2, \cdots, f_r \in (^pF) : Z_s(F) = Z_s(f_1) \cap Z_s(f_2) \cap \cdots \cap Z_s(f_r).$$

In tal caso si dice anche che $f_i(\underline{x}) = 0$ per $i = 1, \cdots, m$, costituisce un sistema di equazioni per $Z_s(F)$.

Si denoti con $\mathcal{C}^{(n,m)}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ di tipo $Z_s(F)$.

Teorema 7.5. *$\mathcal{C}^{(n,m)}$ costituisce una famiglia di chiusi per una topologia.*

Dim. Siccome $\varnothing = Z_s(\underline{1})$ e $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m = Z_s(\underline{0})$, quindi $\varnothing, \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \in \mathcal{C}^{(n,m)}$. Siano $F_1, F_2 \subseteq S^{(n,m)}$, risulta che anche $F_1 \cup F_2 \subseteq S^{(n,m)}$; si dimostri per doppia inclusione che

$$Z_s(F_1 \cup F_2) = Z_s(F_1F_2) \in \mathcal{C}^{(n,m)}.$$

Se $P \in Z_s(F_1 \cup F_2)$ allora

$$P \in F_1 \text{ o } P \in F_2 \Leftrightarrow f(P) = 0 \quad \forall f \in^p F_1 \text{ o } g(P) = 0 \quad \forall g \in^p F_2$$

quindi si ha $P \in Z_s(F_1F_2)$. Viceversa, se $P \in Z_s(F_1F_2)$, allora

$$(fg)(P) = 0 \quad \forall f \in^p F_1, \forall g \in^p F_2 \Rightarrow f(P)g(P) = 0 \quad \forall f \in^p F_1, \forall g \in^p F_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(P) = 0 \quad \forall f \in^p F_1 \text{ o } g(P) = 0 \quad \forall g \in^p F_2 \Rightarrow P \in Z_s(F_1 \cup F_2).$$

Sia infine $\{F_r\}_r$ una famiglia si sottoinsiemi di $S^{(n,m)}$, si consideri la rispettiva famiglia di elementi di $\mathcal{C}^{(n,m)}$, $\{Z_s((F_r))\}_r$, risulta:

$$\bigcap_r Z_s(F_r) = Z_s\left(\bigcup_r F_r\right) \in \mathcal{C}^{(n,m)}.$$

□

Definizione 7.6. $(\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k, \mathcal{C}^{(n,m)})$ è chiamata topologia di Zariski di $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$.

Focalizzeremo ora l'attenzione sulle sottovarietà di $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$. Si inizi a dimostrare il seguente lemma:

Lemma 7.7. *La topologia di Zariski di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ coincide con l'immagine tramite $\sigma_{n,m}$ della topologia di Zariski di $S_{n,m}$.*

Dim. Sia $f \in k\left[w_{ij}\right]$ un polinomio omogeneo di grado d. Allora

$$f' = f\left(x_i y_j\right) \in k\left[x_0, \ldots, x_n,\, y_0, \ldots, y_m\right] = S^{(n,m)}$$

è un polinomio pluriomogeneo di grado d, e si ha $Z_p(f') = \sigma^{-1}_{n,m}\left(Z_p(f)\right)$. D'altra parte se $f'(\underline{x}, y) \in S^{(n,m)}_{d_1,d_2}$, e se, ad esempio $d_1 \leq d_2$, posto $e = d_2 - d_1$ si ha:

$$f'_i = (\underline{x}, \underline{y}) \in S^{(n,m)}_{d_1,d_2}, i = 0, \ldots, n$$

Poiché ovviamente $\sigma^*_{n,m}$ è suriettiva [4], esistono polinomi omogenei $f_i \in S^{(n+1)(m+1)}_{d_2}$ tali che $f_i(x_i y_j) = x_i^e f'(\underline{x}, y)$, $i = 0, \ldots, n$. Si ha allora

$$\sigma_{n,m}\left(Z_s(f')\right) = \sigma_{n,m}\left(Z_s(f'_1, \ldots, f'_n)\right) = Z_p\left(f_1, \ldots, f_n\right).$$

Ciò prova l'asserto. $\square$

Il lemma (7.7) ha la seguente importante conseguenza:

Teorema 7.8. *Siano $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m_k$ varietà proiettive, allora $V \times W \subseteq \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$ è una varietà proiettiva.*

Dim. V e W sono chiusi irriducibili rispettivamente di $\mathbb{P}^n_k$ e $\mathbb{P}^m_k$. Allora esisteranno dei polinomi omogenei $f_1, \cdots, f_l \in {}^hS^{(n)}$ e $g_1, \cdots, g_k \in {}^hS^{(m)}$ tali che $V = Z_p\left(f_1, \cdots, f_l\right)$ e $W = Z_p\left(g_1, \cdots, g_k\right)$.
Il prodotto $f_i g_j$ appartiene a ${}^pS^{(n,m)}$, poichè ogni f_i (rispettivamente g_j) può essere rivisto come polinomio pluriomogeneo di grado 0 nelle variabili che compaiono in g_j(rispettivamente in f_i) ma non in esso. Dunque $V \times W$ è un chiuso di $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$, in quanto

$$V \times W = Z_p\left(f_1, \cdots, f_l, g_1, \cdots, g_k\right).$$

Se consideriamo il prodotto di due sottoinsiemi irriducibili A, B appartenenti rispettivamente agli spazi $\mathbb{A}^n_k \times \mathbb{A}^m_k$, esso è irriducibile nello spazio affine $\mathbb{A}^n_k \times \mathbb{A}^m_k \simeq \mathbb{A}^{n+m}_k$. Vale un risultato analogo anche nel caso proiettivo. $\square$

Più in generale sussiste il seguente teorema:

Teorema 7.9. *Siano $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ e $W \subseteq \mathbb{P}^m_k$ varietà quasi proiettive, allora $V \times W \subseteq \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$ è una varietà quasi proiettiva.*

[4] sulle sottoalgebre $\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S^{(n+m+1)_{d,d}}$ di $S^{(n+m+1)}$

Dim. Siano V e W varietà quasi proiettive, ossia sottoinsiemi aperti di varietà proiettive.
Pertanto esse possono essere espresse al seguente modo:

$$\begin{aligned} V &= V_0 - V_1 \text{ con } V_0 \text{ chiuso e irriducibile, e } V_1 \text{ chiuso} \\ W &= W_0 - W_1 \text{ con } W_0 \text{ chiuso e irriducibile, e } W_1 \text{ chiuso} \end{aligned}$$

Dunque, passando al prodotto:

$$V \times W = (V_0 - V_1)) \times (W_0 - W_1) = (V_0 \times W_0) - [(V_0 \times W_1) \cup (V_1 \times W_0)]$$

In base a quanto dimostrato nel teorema precedente, $V_0 \times W_0$ è una varietà, mentre $[(V_0 \times W_1) \cup (V_1 \times W_0)]$ è un chiuso in quanto unione di chiusi.
Dunque $V \times W$ è una varietà quasi proiettiva. $\square$

Si è ora in grado di dare la seguente definizione:

Definizione 7.10. Siano $V \subseteq \mathbb{P}_k^n$ e $W \subseteq \mathbb{P}_k^m$ varietà quasi proiettive, la varietà $V \times W$ si chiama varietà prodotto di V e W, ed è chiaramente una sottovarietà di $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$.

È possibile generalizzare il discorso. Si consideri le seguenti indeterminate su k, $x_0^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_0^r, \dots, x_{n_r}^r$ e poniamo

$$S^{(n_1,\dots,n_r)} = k\left[x_0^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_0^r, \dots, x_{n_r}^r\right]$$

che è un anello graduato. Per ogni $(d_1, \dots, d_r) \in \mathbb{N}^r$, posto $d = \sum_{i=1}^r d_i$, poniamo

$$S_{d_1 \dots d_r}^{(n_1 \dots n_r)} = \{f \in S_{d_i}^{(n)} \text{ nelle variabili } x_0^i, \dots, x_{n_i}^i,\ i = 1, \dots, r\}$$

È chiaro che in tal modo si determina una $r-$graduazione su $S^{(n_1 \dots n_r)}$. Posto $\underline{x}^i = \left(x_0^i, \dots, x_{n_i}^i\right)$, un elemento $f \in S^{(n_1,\dots,n_r)}$ si scrive brevemente come $f\left(\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^r\right)$. Chiaro che se $f \in S_{d_1,\dots,d_r}^{(n_1 \dots n_r)}$, si ha

$$f\left(t_1\underline{x}^1, \dots, t_r\underline{x}^r\right) = t_1^{d_1} \dots t_r^{d_r} f\left(\underline{x}^1, \dots \underline{x}^r\right) \tag{1}$$

per ogni $(t_1, \dots, t_r) \in k^r$. La (1) è pure condizione sufficiente affinché $f \in S_{d_1 \dots d_r}^{(n_1 \dots n_r)}$. Un elemento $f \in S_{d_1 \dots d_r}^{(n_1 \dots n_r)}$, con $d = d_1 + \dots d_r > 0$ dicesi forma pluriomogenea di grado d. Poiché $S_0^{(n_1 \dots n_r)} = k$, $S_{d_1 \dots d_r}^{(n_1 \dots n_r)}$ un $k-$spazio vettoriale di dimensione

$$p\left(n_1 \dots n_r,\, d_1 \dots d_r\right) = \prod_{i=1}^{2} \binom{n_i + d_i}{d_i}$$

Definizione 7.11. Sia $f \in^p S^{(n_1 \dots n_r)}$ e sia $(P_1, \dots, P_r)$ un punto di $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}$, con $P_i = \left[\underline{a}^i\right]$, $i = 1, \dots, n$. Si dice che $(P_1, \dots, P_r)$ è uno zero di f, e si scrive $f(P_1, \dots, P_r) = 0$, se $f\left(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^r\right) = 0$.

Definizione 7.12. Il sottoinsieme di $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_r}$

$$Z_s(F) = \cap_{f \in {}^pF = F \cap {}^pS^{(n_1 \cdots n_r)}} Z_s(f)$$

di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ è detto l'insieme degli zeri di F.

Proposizione 7.13.

$$Z_s(F) = Z_s\left(({}^pF)\right)$$

Osservazione 29. Per la noetherianità di $S^{(n_1, \cdots, n_r)}$ esistono polinomi pluriomogenei $f_1, \ldots, f_m \in ({}^pF)$ tali che

$$Z_s(F) = Z_s(f_1) \cap \cdots \cap Z_s(f_m) \tag{2}$$

Se vale la (2) si dice che $f_i\left(\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^r\right)$, $i = 1, \ldots, m$ è un sistema di equazioni per $Z_s(F)$.

È possibile considerare la famiglia $\mathcal{C}^{(n_1 \ldots, n_r)}$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ del tipo $Z_s(F)$, con $F \subseteq S^{(n_1 \ldots, n_r)}$. Analogamente si verifica che $\mathcal{C}^{(n_1, \ldots n_r)}$ può assumersi come famiglia dei chiusi di una topologia detta topologia di Zariski di $P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$.
Se V, W sono varietà quasi–proiettive, la varietà $V \times W$ dicesi prodotto di V e W. Si inizi a considerare le due proiezioni canoniche:

$$p_1 \colon V \times W \to V$$
$$p_2 \colon V \times W \to W$$

Lemma 7.14. *Le proiezioni p_1, p_2 sono dei morfismi.*

Dim. È chiaro che basta ridursi al caso $V = \mathbb{P}^n_k$, $W = \mathbb{P}^m_k$ e riferirsi a p_1. Se $\left([\underline{x}], [\underline{y}]\right) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e , ad esempio, $x_0 \neq 0$,$y_o \neq 0$, allora $\left([\underline{x}], [\underline{y}]\right)$, come punto di $S_{n,m}$, ha coordinate omogenee $[\underline{w}]$, con $w_{0,0} \neq 0$. Allora $p_1\left([\underline{x}], [\underline{y}]\right) = [w_{00}, w_{10}, \ldots, w_{n0}]$. Ciò prova l'asserto. $\square$

Sia ora Z una terza varietà quasi–proiettiva e siano $f \colon Z \to V$, $g \colon Z \to W$ delle applicazioni. L'applicazione

$$f \times g \colon P \in Z \to (f(P), g(P)) \in V \times W$$

è l'unica che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f \times g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drr, "g"] & V \times W \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
& V & W
\end{tikzcd}$$

Lemma 7.15. *Se f e g sono morfismi, anche $f \times g$ è un morfismo .*

Dim. Sia P un punto di Z. Per la proposizione (7) esiste un intorno aperto U di P in $Z \subseteq \mathbb{P}^r$ ed esistono polinomi omogenei $f_0, \ldots, f_n \in S^{(r)}$ dello stesso grado, e polinomi omogenei $g_0, \ldots, g_m \in S^{(r)}$ dello stesso grado, i primi $n+1$ e i secondi $m+1$ non tutti nulli in U, tali che per ogni $P' \in U$ si abbia

$$f(P') = [f_0(P'), \ldots, f_n(P')] \in V \subseteq \mathbb{P}^n$$

$$g(P') = [g_0(P'), \ldots, g_m(P')] \in W \subseteq \mathbb{P}^m$$

Allora, per ogni $P' \in U$ si ha

$$(f \times g)(P') = [f_i(P')g_j(P')] \in V \times W \subseteq \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

dove $f_i g_j$ sono polinomi dello stesso grado, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$. Ancora per la proposizione si ha l'asserto. $\square$

Dai due precedenti lemma segue infine il seguente teorema:

Teorema 7.16. *Se V, W sono varietà quasi proiettive e se X è una varietà quasi proiettiva tale che esistono due morfismi $\pi_1 \in M(X, V)$, $\pi_2 \in M(X, W)$, tali che per ogni varietà quasi proiettiva Z e per ogni coppia di morfismi $(f, g) \in M(Z, V) \times M(Z, W)$, esiste un unico morfismo $y \in M(Z, X)$ che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g"] & & X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
& V & & W
\end{tikzcd}$$

allora esiste un unico isomorfismo $\alpha\colon X \to V \times W$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi_1"'] \arrow[drr, "\pi_2"] & & V \times W \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "P_2"] \\
& V & W
\end{tikzcd}$$

Dim. In virtù del lemma (7.15) il morfismo $\alpha = \pi_1 \times \pi_2 \in M(X, V \times W)$ rende commutativo il diagramma. Proviamo che α è un isomorfismo. Per le ipotesi, esiste un unico morfismo $\beta \in M(V \times W, X)$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& V \times W \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "P_2"'] & & X \arrow[dlll, "\pi_1"] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
V & & W &
\end{tikzcd}$$

Allora $\beta \circ \alpha \in M(X, X)$ rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"'] \arrow[rr, "\beta\circ\alpha"] & & X \arrow[lll, "\pi_1"] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
V & & W &
\end{tikzcd}$$

sicché per le ipotesi è $\beta \circ \alpha = id_X$. Similmente si verifica che $\alpha \circ \beta = id_{V\times W}$ e da ciò l'asserto. $\square$

Corollario 7.17. *Se V, W sono varietà affini, il prodotto definito dianzi coincide, a meno di isomorfismi, con quello definito nel §3.*

Corollario 7.18. *Se V, W sono varietà affini, il prodotto definito dinanzi coincide, a meno di morfismi, con quello definito nel §3.*

Dim. Sia X il prodotto di V e W definito nel §3, che è poi la varietà affine a meno di isomorfismo, corrispondente alla $k-$algebra finitamente generata $A(V) \otimes_k A(W)$; siano infatti $\pi_1 \colon X \to V$, $\pi_2 \colon X \to W$ le proiezioni canoniche corrispondenti agli omomorfismi di $k-$algebre.

$$\begin{aligned}
\pi_1^* \colon f \in A(V) \to f \otimes 1 \in A(V) \otimes_k A(W) \\
\pi_2^* \colon g \in A(W) \to 1 \otimes g \in A(V) \otimes_k A(W)
\end{aligned}$$

Se poi Z è una varietà quasi proiettiva e $(f, g) \in M(Z, V) \times (Z, W)$, ad f e g corrispondono omomorfismi di

$$\begin{aligned}
f^* \colon A(V) \to (\mathcal{O})(Z) \\
g^* \colon A(W) \to \mathcal{O}(Z)
\end{aligned}$$

Esiste allora un unico omomorfismo di $k-$algebre

$$f^* \otimes g^* \colon \sum_{i,j} f_i \otimes g_j \in A(V) \otimes_k A(W) \to \sum_{ij} f^*(f_i) g^*(g_j) \in \mathcal{O}(Z)$$

$$\begin{tikzcd}
 & A(V) \otimes_k A(W) \arrow[rr, "f^*\otimes g^*"'] & & \mathcal{O}(Z) \\
A(V) \arrow[ur, "\pi_1^*"'] \arrow[urrr, "f^*"'] & & A(W) \arrow[ul, "\pi_2^*"] \arrow[ur, "g^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Ad $f^* \otimes g^*$ corrisponde l'unico morfismo $y \in M(Z, X)$ che renda commutativo il diagramma 7.16. L'asserto segue allora dal teorema precedente. $\square$

Esempio 7.19. Esaminiamo da vicino un caso particolare del corollario (7.18): $\mathbb{A}^n$ può considerarsi identificato con l'aperto

$$U_0 = \mathbb{P}^n - Z_p(x_0)$$

di $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{A}^m$ con l'aperto

$$U'_0 = \mathbb{P}^m - Z_p(y_0)$$

di $\mathbb{P}^m$. Allora $U_0 \times U'_0$ è isomorfo a $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$. L'isomorfismo, l'unico che commuta con le proiezioni, si ottiene esplicitamente nel modo che segue. Visto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ come $S_{n,m}$ in $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, $U_0 \times U'_0$ chiaramente coincide con

$$S_{n,m} - (S_{n,m} \cap Z_p(W_{00}))$$

Ha dunque senso considerare il morfismo

$$[\underline{W}] \in U_0 \times U'_0 \to \left(\frac{W_{10}}{W_{00}}, \ldots, \frac{W_{n0}}{W_{00}}, \frac{W_{01}}{W_{00}}, \ldots, \frac{W_{0m}}{W_{00}} \right) \in \mathbb{A}^{n+m}$$

che è l'isomorfismo richiesto.

Il teorema precedente ha altra notevoli conseguenze, cui brevemente accenniamo nei seguenti corollari:

Corollario 7.20. *Se V, W, V', W' sono varietà quasi–proiettive*

$$V \simeq V' \text{ e } W \simeq W' \Rightarrow V \times W \simeq V' \times W'.$$

Corollario 7.21. *Se V, W sono varietà quasi–proiettive,*

$$V \times W \simeq W \times V$$

Corollario 7.22. *Se V, W, Z sono varietà quasi–proiettive,*

$$(V \times W) \times Z \simeq V \times (W \times Z)$$

tale varietà, che s'indica con $V \times W \times Z$ prende il nome di prodotto di $V \times W \times Z$. Più in generale, se $V_1, \ldots, V_n$ sono varietà quasi–proiettive, è ben definito il loro prodotto $V_1 \times \cdots \times \cdots V_n$ come la varietà $(((V_1 \times V_2) \times V_3) \times V_n)$ che è isomorfo a $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_n}$, dove $(i_1, \ldots, i_n)$ è una qualunque permutazione di $(1, \ldots, n)$.

Corollario 7.23.

$$\forall P \in V \quad p_1^{-1}(P) \simeq W$$

Rispettivamente

$$\forall Q \in W \quad p_2^{-1}(Q) \simeq V.$$

Corollario 7.24. *Se V, W, Z sono varietà quasi–proiettive, un'applicazione $f \colon Z \to V \times W$ è un morfismo se e solo se $p_i \circ f$ sono morfismi , $i = 1, 2$.*

Ora di seguito vi sono alcune applicazioni di esempi relativo alle varietà di Segre.

Esempio 7.25. Nel caso particolare del prodotto $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$, possiamo considerare, sulla varietà di Segre $\mathbb{P}_k^{n(n+2)}$ [5] la cosiddetta sottovarietà diagonale, ossia il luogo Δ dei punti di tipo $\sigma_{n,m}([x],[x])$ per ogni $[x] \in \mathbb{P}_k^n$. Essa è intersezione di W con il sottospazio costituito dall'intersezione degli iperpiani indipendenti di equazioni:

$$w_{ij} = w_{ji}$$

con $i, j = 0, \cdots, n$.
Analogamente, se consideriamo la varietà di Segre:

$$S_{n_1,\cdots,n_r} = \sigma_{n_1,\cdots,n_r}\left(\mathbb{P}_k^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_k^{n_r}\right)$$

con $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = n$, essa è il modello proiettivo del prodotto di r copie di $\mathbb{P}_k^n$, e possiamo considerare la varietà diagonale Δ, luogo dei punti del tipo $\sigma_{n,\cdots,n}\left(\underbrace{[x],\cdots,[x]}_{r}\right)$.

Proposizione 7.26. *Data una varietà V, la diagonale $\Delta_V = \{(P,P) \in V \times V\}$ del prodotto, è un chiuso isomorfo a V.*

Dim. Per dimostrare che Δ_V è un chiuso, basta ridursi al caso $V = \mathbb{P}^n$. Preso $\big([\underline{x}],[\underline{y}]\big) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, risulta

$$([\underline{x}][\underline{y}]) \in \Delta_{\mathbb{P}^n} \Leftrightarrow x_i y_i = x_j y_j \qquad i = 0,\ldots,n\, j = 0,\ldots,n$$

ossia

$$W_{ij} = W_{ji} \qquad i,j = 0,\ldots,n$$

Dunque

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = S_{n,m} \cap Z_p\left(W_{ij} - W_{ji}\right)_{i,j=0,\ldots,n}$$

Per provare che V è isomorfo a Δ_V, basta applicare il teorema precedente con $V = W$, $Z = V$ e adoperando $f \circ g = id_V$. $\square$

Esempio 7.27. Ponendo $n = m = 1$ otteniamo la varietà di Segre $S_{1,1}$.
Sapendo che $S_{n,m} \subseteq \mathbb{P}_k^{(n+1)(m+1)-1}$, quindi, in questo caso, $S_{1,1} \subseteq \mathbb{P}_k^{(1+1)(1+1)-1} = \mathbb{P}_k^3$. Dunque:

$$S_{1,1} = \left\{[W] \in \mathbb{P}_k^3 : \rho(W) = 1\right\} \subseteq \mathbb{P}_k^3$$

dove, al solito, abbiamo identificato gli elementi di $\mathbb{A}_K^4$ con le matrici W di tipo 2×2:

$$W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$$

In $S_{1,1}$ vi sono classi di equivalenza di matrici W di rango 1, esse sono caratterizzate dall'avere determinante nullo, dunque deve accadere che:

[5] osserviamo che $(n+1)(n+1) - 1 = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$

$w_{00}w_{11} - w_{10}w_{01} = 0$. In conclusione si ha che $S_{1,1} = Z_p\,(w_{00}w_{11} - w_{10}w_{01})$. Gli elementi di $S_{1,1}$ sono del tipo

$$[W] = [w_{00}, w_{01}, w_{10}, w_{11}] = [z_0, z_1, z_2, z_3]$$

, essendo $S_{1,1} \subseteq \mathbb{P}^3_k$. Alla luce di queste considerazioni, $S_{1,1}$ è rappresentata in $\mathbb{P}^3_k$ dall'equazione:

$$z_0z_3 - z_1z_2 = 0$$

che è l'equazione di una quadrica non degenere.

Osservazione 30. Se $[W] \in S_{1,1}$, W ha rango 1, per cui devono sussistere le seguenti relazioni lineari:

$$(z_0, z_1) = \lambda\,(z_2, z_3)$$
$$(z_0, z_2) = \lambda\,(z_1, z_3)$$

per degli opportuni $\lambda \in \mathbb{R}$. Otteniamo così due famiglie di rette in $S_{1,1}$:

$$\begin{cases} z_0 = \lambda z_2 \\ z_1 = \lambda z_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_0 = \lambda z_1 \\ z_2 = \lambda z_3 \end{cases}$$

ed esse sono immagini mediante $\sigma_{1,1}$ delle fibre delle due proiezioni di $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$. Dato che per ogni punto di $S_{n,m}$ passa un'unica retta di ciascuna delle due famiglie, la varietà di Segre è un esempio di varietà rigata.

Definizione 7.28. Siano V, W, Z varietà e siano $f\colon V \to Z$, $g\colon W \to Z$ morfismi. Si definisce prodotto di V e W su Z, denotato con il simbolo $V \times_Z W$ il sottoinsieme di $V \times W$ costituito dalle coppie $(P, Q) \in V \times W$ tali che $f(P) = g(Q)$.

$V \times_z W$ è un sottoinsieme chiuso di $V \times W$, infatti è chiaro che $V \times_z W = (f \times g)^{-1}(\Delta_z)$. [6]

Osservazione 31. $V \times_z W$ non è sempre irriducibile. Ad esempio se V, W sono sottovarietà di Z e f, g le relative immersioni, è chiaro che $V \times_z W = V \cap W$ e non è detto che l'intersezione di due varietà sia una varietà (anzi non lo è "quasi mai"). C'è tuttavia qualche caso in cui $V \times_z W$ è irriducibile. Ciò accade, ad esempio, se $W = Z$ e $g = id_z$. Allora $V \times_w W$ è costituito dalle coppie $(P, Q) \in V \times W$ tali che $Q = f(P)$, ossia è il grafico Γ_f dell'applicazione f. Ora la proiezione p_1 induce in Γ_f un isomorfismo Γ_f su V. Infatti basta tenere presente che esiste un morfismo $\alpha\colon V \to V \times W$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i\alpha_V"'] \arrow[drr, "f"'] & V \times W \arrow[d, "P_1"] \arrow[dr, "P_2"] & \\
& V & W
\end{tikzcd}$$

[6] $f \times g\colon (P, Q) \in V \times W \to (f(P), g(P)) \in Z \times Z$ è ovviamente un morfismo

Consideriamo il prodotto $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ degli spazi proiettivi $\mathbb{P}^{n_1}, \ldots, \mathbb{P}^{n_r}$. Come nel caso $r = 2$ si può fornire un ben preciso modello proiettivo di tale varietà. procedendo per induzione a partire dal caso $r = 2$, si vede infatti agevolmente che tale varietà è l'immagine $S_{n_1,\ldots,n_r}$ di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ tramite l'applicazione iniettiva

$$\sigma_{n_1\ldots n_r} \colon \left([\underline{x}^1], \ldots, [\underline{x}^r]\right) \in \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \to \left[x^1_{i_1} \ldots x^r_{i_r}\right] \in \mathbb{P}^{(n_1+1)\ldots(n_r+1)}$$

dove i punti di $\mathbb{P}^{(n+1)\ldots(n_r+1)-1}$ hanno coordinate omogenee $(W_{i_1\ldots i_r})$, $i_1 = 0, \ldots, n_1, \ldots, i_r = 0, \ldots, n_r$. Analogamente si prova che la topologia di Zariski di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ coincide con l'immagine tramite $\sigma_{n_1\ldots n_r}$ della topologia di Zariski di $S_{n_1,\ldots,n_r}$. Quest'ultima varietà, od una ad essa omografica, è detta varietà di Segre di tipo $n_1, \ldots, n_r$. Si noti in particolare che $S_n = \mathbb{P}^n$ e che $S_{n_1,\ldots,n_r}$ è omografica a $S_{nh_1\ldots nh_r}$ dove $(h_1, \ldots, h_r)$ è una qualsiasi permutazione di $(1, \ldots, n)$, l'omografia che le muta l'una nell'altra essendo data da

$$[W_{i_1\ldots i_r}] \in \mathbb{P}^{n_1+1)\ldots(n_r+1)-1} \to \left[W_{i_{h_1}\ldots i_{h_r}}\right] \in \mathbb{P}^{(n_1+1)\ldots(n_r+1)-1}$$

Proposizione 7.29. *Fissato $P_j = [\underline{a}^j] \in \mathbb{P}^{n_j}$ e considerata la $j-$esima proiezione*

$$p_j \colon \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \to \mathbb{P}^{n_j}$$

*allora $\delta_{n_1\ldots n_r}\left(p_j^{-1}(P_j)\right)$ è una sottovarietà di $S_{n_1\ldots n_r}$ isomorfo a $S_{n_1\ldots n_{j-1},n_{j+1}\ldots n_r}$ (cfr(**??**)(e)). Inoltre è una varietà di Segre $S_{n_1\ldots n_{j-1}n_{j+1}\ldots n_r}$.*

Dim. Proviamo che $N\left(n_1, \ldots, n_r\right) = (n_i+1)\ldots(n_r+1)-1$. Assumiamo che i punti di $\mathbb{P}^{N(n_1\ldots n_{j-1}n_{j+1}\ldots n_r)}$ abbiamo coordinate omogenee $\left(W_{i_1\ldots i_{j-1}i_{j+1}\ldots i_r}\right)$ e si consideri poi l'omografia

$$\omega_{p_j} \colon [W_{i_1} \ldots i_{j-1} i_{j+1} \ldots i_r] \in \mathbb{P}^{N(n_1\ldots n_{j-1}n_{j+1}\ldots n_r)} \to \left[a^j_{i_j} W_{i_1\ldots i_{j-1}i_{j+1}\ldots i_r}\right] \in \mathbb{P}^{N(n_1\ldots n_r)}$$

Essa è non degenere. Infatti ordinando le coordinate di $\mathbb{P}^{N(n_1\ldots n_r)}$ in modo che i_j sia successivamente $0, 1, \ldots, n$; la matrice di ω_p è di tipo

$$\left(N\left(n_1 \ldots n_r\right)+1\right) \times \left(N\left(n_1 \ldots n_{j-1} n_{j+1} \ldots n_r\right)+1\right)$$

si scrive nel modo seguente

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_0^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0^j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_0^j \\ a_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1^j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_j}^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{n_j}^j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n_j}^j \end{array} \right\|$$

e poiché $\left[\underline{a}^j\right] \in \mathbb{P}^{n_j}$, è chiaro che un suo minore d'ordine massimo è diverso da zero. L'omografia ω_{p_j} definisce un'immersione di $\mathbb{P}^{N(n_1 \dots n_{j-1} n_{j+1} \dots n_r)}$ in $\mathbb{P}^{N(n_1 \dots n_r)}$ che muta $S_{n_1 \dots n_{j-1} n_{j+1} \dots n_r}$ in $\sigma_{n_1 \dots n_r}\left(p_j^{-1}\left(P_j\right)\right)$. $\square$

Il Lettore dimostri, a titolo d'esercizio, che $S_{n_1 \dots n_r}$ è non degenere in $\mathbb{P}^{N(n_1 \dots n_r)}$. Inoltre svolga ancora, a titolo d'esercizio, una teoria analoga a quella del §2, sulle relazioni tra gli ideali di $S^{(n_1 \dots n_r)}$ e i chiusi di $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}$. Si pensi tra l'altro che un chiuso Z di $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}$ è irriducibile se e solo se l'ideale plurimo $\mathcal{I}_s(Z)$ di $S^{n_1 \dots n_r}$ generato dai polinomi pluriomogenei $f \in^P S^{(n_1 \dots n_r)}$ tali che $Z_s(f) \supseteq Z$, è un ideale primo.

Proposizione 7.30. *Se V, W sono varietà quasi–proiettive, si ha $dim\,(V \times W) = dim\, V + dim\, W$.*

Dim. Esistono aperti affini V' in V, W' in W, non vuoti e si ha, in virtù di

$$dim\ (V \times W) = dim\ (V' \times W') = dim\, V' + dim\, W' = dim\, V + dim\, W$$

$\square$

Osservazione 32. $S_{1,1}$ è una quadrica non degenere in $\mathbb{P}^3$ e dunque ogni siffatta quadrica, omografica a $S_{2,1}$ è una varietà di Segre.

8 Curve razionali normali

Relativo al discorso sulla varietà di Segre, è utile approfondire le curve razionali normali, e tali da chiarire l'esempio della varietà di Segre di tipo $S_{2,1}$. Sia d un numero intero positivo e sia considerato la seguente applicazione:

$$\nu_d : [x_0, x_1] \in \mathbb{P}_k^1 \longrightarrow \left[x_0^d, x_0^{d-1} x_1, \cdots, x_1^d\right] = [z_0, \cdots, z_d] \in \mathbb{P}_k^d.$$

Definizione 8.1. Si definisce curva razionale normale $C \subset \mathbb{P}^d_k$ l'immagine dell'applicazione $\nu_d\left(\mathbb{P}^1_k\right)$.

Osservazione 33. Una curva razionale normale può essere rivista come una generalizzazione della cubica gobba proiettiva.

L'immagine $C \subset \mathbb{P}^d_k$ non è altro che il luogo di zeri di polinomi del tipo:

$$F_{i,j}(z) = z_i z_j - z_{i-1} z_{j+1}.$$

con $1 \leq i \leq j \leq d-1$.
Un modo conveniente e significativo di esprimere le equazioni che definiscono una curva razionale normale è sotto forma di minori di ordine 2 di una matrice di forme lineari omogenee; per ogni intero $k \in \{1, \cdots, d-1\}$, essa può essere descritta come luogo dei punti $[z_0, \cdots, z_d] \in \mathbb{P}^d_k$ tali che il rango della seguente matrice sia 1:

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{k-1} & z_k \\ z_1 & z_2 & \cdots & \cdots & z_k & z_{k+1} \\ z_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{d-k} & \cdots & \cdots & \cdots & z_{d-1} & z_d \end{pmatrix}$$

Esempio 8.2. Sia $d = 2$ e si consideri l'applicazione:

$$\nu_2 : [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_k \to [x_0^3, x_0 x_1^2, x_1^3] \in \mathbb{P}^2_k$$

Risulta che $\nu_2(\mathbb{P}^1_k) \subset \mathbb{P}^2_k$ è una cubica di equazione $z_0 z_2^2 = z_1^3$.

Esempio 8.3. Sia $d = 2$ e si consideri l'applicazione:

$$\nu_2 : [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_k \to [x_0^3, x_0 x_1^2 - x_0^3, x_1^3 - x_0^2 x_1] \in \mathbb{P}^2_k.$$

Risulta che $\nu_2(\mathbb{P}^1_k) \subset \mathbb{P}^2_k$ è una cubica di equazione $z_0 z_2^2 = z_1^3 + z_0 z_1^2$.

Esempio 8.4. Sia $d = 3$ e si consideri l'applicazione:

$$\nu_3 : [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_k \to [x_0^4 - \beta x_0^3 x_1, x_0^3 x_1 - \beta x_0^2 x_1^2, \alpha x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1^3, \alpha x_0 x_1^3 - x_1^4] \in \mathbb{P}^3_k$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. L'immagine $C_{\alpha,\beta} = \nu(\mathbb{P}^1_k) \subset \mathbb{P}^3_k$ prende nome di curva quartica normale.

Siano ora k, l due interi positivi tali che $k \leq l$ e sia $n = k + l + 1$ e siano considerati due sottospazi lineari Λ e Λ' in $\mathbb{P}^n_k$ tali che $dim\Lambda = k$ e $dim\Lambda' = l$. Si scelgano due curve razionali normali $C \subset \Lambda$ e $C' \subset \Lambda'$ e un isomorfismo

$$\varphi : C' \longrightarrow C.$$

Definizione 8.5. Si definisce scroll razionale normale e lo si denota con $S_{(k,l)}$,

$$\bigcup_{p\in C'} \overline{p,\varphi(p)}$$

rette congiungenti i punti di C con le rispettive immagini mediante φ su C'. Tali rette sono dette anche rette direttrici di $S_{(k,l)}$.

Il concetto di scroll razionale normale può essere generalizzato come segue. Fissata una k-pla di numeri naturali $a_1, \cdots, a_k$ tali che $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = n - k + 1$, si considerino sottospazi lineari complementari $\Delta_i \cong \mathbb{P}_k^{a_i} \subset \mathbb{P}_k^n$ e in ognuno di essi una curva razionale normale C_i. Scelti degli isomorfismi $\varphi_i : C_1 \longrightarrow C_i$ con $i = 2, \cdots, k$, si definisce scroll razionale normale di dimensione k l'insieme:

$$S = S_{(a_1,\cdots,a_k)} = \bigcup_{p\in C_1} \overline{p,\varphi_2(p),\cdots,\varphi_k(p)}$$

ossia l'unione degli spazi congiungenti i punti $p, \varphi_2(p), \cdots, \varphi_k(p)$ al variare di P in C_1. Dopo aver introdotto tali concetti preliminari, torniamo a considerare la varietà di Segre $S_{2,1}$ (ossia $S_{n,m}$ con $n = 2$ e $m = 1$), essa è propriamente chiamata la tridimensionale di Segre ed è un esempio di scroll razionale normale: lo scroll $S_{(1,1,1)}$. Segue il teorema di caratterizzazione di scroll razionale normale.

Teorema 8.6. *Siano $S_{k,l}, S_{k',l'}$ due scroll di $\mathbb{P}_k^n$ con $k \leq l$, k', l', allora $S_{k,l}$ è proiettivamente equivalente a $S_{k',l'} \Leftrightarrow k = k'$.*

Proposizione 8.7. *Se $k < l$ esiste ed è univocamente determinata una curva normale razionale $C \subset S_{k,l}$ di grado $k < l$ appartenente alla costruzione dello scroll razionale normale. In particolare è univocamente determinata da $S_{k,l}$ e prende nome di direttrice di $S_{k,l}$.*

Osservazione 34. La proposizione (8.7) non vale nel caso di una curva normale razionale C' di grado maggiore a l e nel caso in cui $k = l$.

Proposizione 8.8. *L'immagine dello scroll $S_{k,l}$ attraverso la proiezione da un punto interno p è birazionalmente equivalente a $S_{k-1,l}$ se p giace sulla direttrice di $S_{k,l}$. È proiettivamente equivalente a $S_{k,l-1}$. In particolare tutte le scroll $S_{k,l}$ sono razionali.*

9 Applicazioni lineari

Definizione 9.1. Si dice applicazione lineare di $\mathbb{A}_k^n$ in $\mathbb{A}_k^m$ (affinità) un'applicazione del tipo:

$$\tau\colon \underline{x} \in \mathbb{A}_k^n \to \underline{a} + \underline{x}A \in \mathbb{A}_k^m$$

con A matrice di tipo $n \times m$ su k, $\underline{a} \in \mathbb{A}_k^m$ e il prodotto è effettuato righe per colonne.

Proposizione 9.2. *τ è un morfismo.*

Dim. Siano $(a_1,\dots,a_n)$, $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ e $A=(A_{ij})_{i=1,\dots,n\, j=1,\dots,m}$ quindi

$$\underline{x}A=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n-1} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}=(a_{11}x_1+\dots+a_{n1}x_n,\dots,a_{1m}x_1+\dots+a_{nm}x_n)$$

perciò

$$\tau(\underline{x})=(a_1,\dots,a_n)+(x_1,\dots,x_n)\,A$$

$$y_j=(\tau(\underline{x}))_j=x_j\circ\tau=a_j+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i=f_j\,(x_1,\dots,x_n)$$

È regolare perchè è un polinomio allora τ è un morfismo. □

Proposizione 9.3. *La composizione di applicazioni lineari sono ancora lineari.*

Dim. $\underline{x}\to\underline{a}+\underline{x}A\to\underline{b}+(\underline{a}+\underline{x}A)\,B\to(\underline{b}+\underline{a}B)+\underline{x}(AB)$. □

Osservazione 35. Le applicazioni lineari hanno per immagine di un punto una $m-$pla di polinomi calcolati nel punto.

Proposizione 9.4.

$$\tau \textit{ iniettivo } \Leftrightarrow \rho(A)=n$$

dove $\rho(A)$ è il rango della matrice A.

Se $\underline{a}=0$ allora τ è un omomorfismo di spazi vettoriali per i quali valgono le seguenti proprietà:

1. τ suriettiva $\Leftrightarrow\rho(A)=m$;
2. se $\underline{a}\neq 0$, τ è composta da $\underline{x}\to\underline{x}A\to\underline{a}+\underline{x}A$ (traslazione) che sono morfismi;
3. la traslazione è un isomorfismo con inversa $\underline{y}\to\underline{y}-\underline{a}$.

Se $\rho(A)\neq m\neq n$ allora $Im\tau$ è un sottospazio di $\mathbb{A}^m_k$ tale che $dimIm=\rho(A)$ e $Ker\tau$ è un sottospazio di $\mathbb{A}^n_k$ tale che $dimKer\tau=n-\rho(A)$.

Definizione 9.5. Se $n=m$, $\tau\colon\underline{x}\in\mathbb{A}^n\to\underline{a}+\underline{x}A\in\mathbb{A}^n$ si dice trasformazione lineare di $\mathbb{A}^n$. τ è non degenere.

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 9.6.

$$\tau \textit{ isomorfismo } \Leftrightarrow \tau \textit{ non degenere.}$$

Dim.

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \text{ e } \sigma\colon \underline{x} \in \mathbb{A}^n \to -\underline{a}A^{-1} + \underline{x}A^{-1} \in \mathbb{A}^n \text{ è l'inversa di } \tau$$

Questo perché

$$\tau \circ \sigma\colon \underline{x} \to -\underline{a}A^{-1} + \underline{x}A^{-1} \to \underline{a} + \left(-\underline{a}A^{-1} + \underline{x}A^{-1}\right) A = \underline{a} - \underline{a} + \underline{x} = \underline{x}$$

e viceversa. σ è un morfismo perchè $x_i \circ \sigma$ è un polinomio. τ è un isomorfismo poichè l'inversa è σ, ed esiste l'inversa di A, allora $\det A \neq 0$ (altrimenti A non è invertibile). □

Si indichi con il simbolo $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n_k)$, l'insieme delle trasformazioni lineari non degeneri di $\mathbb{A}^n_k$, ovvero:

$$\mathcal{G}(\mathbb{A}^n_k) = \{\tau : \underline{x} \in \mathbb{A}^n_k \to \underline{a} + \underline{x}A \in \mathbb{A}_k : \tau \text{ non degenere } \}.$$

Tale insieme si può strutturare come un gruppo rispetto l'operazione di composizione.

Definizione 9.7. $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n_k)$ prende nome di gruppo di Galilei di $\mathbb{A}^n_k$.

Sia $\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{A}^n_k)$, ad esso corrisponde

$$\tau^*\colon A^{(n)} \to A^{(n)}$$
$$x_j \to x'_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$$

$$\tau^* \text{ isomorfismo } \Leftrightarrow \tau \text{ isomorfismo } \Leftrightarrow A \text{ matrice non degenere}$$

Se τ^* è un isomorfismo, poichè $\{x_j\}$ sono generatori di $A^{(n)}$ allora gli x'_j sono generatori di $A^{(n)}$ e $x'_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$ si chiamano formule di cambiamento delle coordinate in $\mathbb{A}^n_k$.

Corollario 9.8. *τ muta sottospazi affini in sottospazi affini con la sua inversa, cioè*

$$\Sigma \subseteq \mathbb{A}^n \textit{ sottospazio affine } \Rightarrow \tau(\Sigma) \subseteq \mathbb{A}^n \textit{ sottospazio affine}$$

Dim.

$$\Sigma \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow \exists \underline{b}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_h \in \mathbb{A}^n : \{b_i\} \text{ linearmente indipendenti e}$$

$$\Sigma = \left\{\underline{b} + \lambda_1\underline{b}_1 + \cdots + \lambda_h\underline{b}_h : (\lambda_1, \dots, \lambda_h) \in \mathbb{A}^h\right\}$$

allora

$$\tau(\Sigma) = \{\underline{a} + (\underline{b} + \lambda_1\underline{b}_1 + \cdots + \lambda_h\underline{b}_h)\, A\} = \{(\underline{a} + \underline{b}A) + \lambda_1\underline{b}_1 A + \cdots + \lambda_h\underline{b}_h A\}$$

sottospazio affine di $\mathbb{A}^m$ ed è generato da $\underline{b}_1 A, \dots, \underline{b}_h A$. □

Corollario 9.9. *$\Sigma \subseteq \mathbb{A}^m$ sottospazio affine, allora $\tau^{-1}(\Sigma) \subseteq \mathbb{A}^n$ sottospazio affine.*

Dim. Poiché Σ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^m$, dunque, Σ ha equazioni del tipo

$$\begin{cases} b_1 + b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_h + b_{h1}y_1 + \cdots + b_{hm}y_m & = 0 \end{cases}$$

con $\{\underline{b}_i\}$ linearmente indipendenti e $\underline{b}, \underline{b}_i \in \mathbb{A}^m$. Σ è il luogo dei punti che verificano questo sistema

$$\tau^{-1}(\Sigma) = \{P \in \mathbb{A}^n : \tau(P) \in \Sigma\}$$

Ricordando che $\tau^*\colon A^{(m)} \to A^{(n)}$ tale che $\tau^*(y_j) = f_j(x_1, \dots, x_n)$, si ha

$$\tau^{-1}(\Sigma) = \{P \in \mathbb{A}^n : \text{ le coordinate di } \tau(P) \text{ verificano il sistema } \} =$$

$$= \left\{ P \in \mathbb{A}^n : y_j \circ \tau(P) = (\tau(P))_j = a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = f_j(x_1, \dots, x_n) \text{ verificano il sistema } \right\} =$$

$$= \{P \in \mathbb{A}^n : \tau^*(y_j) \, \text{verifica il sistema}\} =$$

$$= \left\{ P = [\underline{y}] \in \mathbb{A}^n : \begin{cases} b_1 + b_{11}\tau^*(y_1) + \cdots + b_{1m}\tau^*(y_m) & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_h + b_{h1}\tau^*(y_1) + \cdots + b_{hm}\tau^*(y_m) & = 0 \end{cases} \right\}$$

ovvero $\{P \in \mathbb{A}^n : b_i + b_{i1}f_1 + \cdots + b_{im}f_m = 0\}$ che è il luogo di zeri di un sistema di polinomi di primo grado, quindi $\tau^{-1}(\Sigma)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$. $\square$

Di seguito sono riportati esempi di applicazioni lineari.

Esempio 9.10. Sia $n \geq m$ e siano $0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ con $i_j \in \mathbb{N}$

$$\Pi_{i_1, \dots, i_m} \colon (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \to (x_{i_1}, \dots x_{i_m}) \in \mathbb{A}^m$$

$j_1 < \cdots < j_{n-m}$ e $j_1, \dots, j_{n-m} \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots i_m\}$, proiezione di $\mathbb{A}^n$ su $\mathbb{A}^m$ da $(\mathbb{A}^n_{j_1} \dots j_{n-m})_\infty$ (sottospazio all'infinito di $\mathbb{A}^n_{j_1} \dots, j_{n-m}$). Quest'applicazione è del tipo:

$$(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}^m \to \left(0, \dots, \underset{i_1}{x_1}, \dots, \underset{i_m}{x_m}, \dots, 0\right) \in \mathbb{A}^n_{i_1 \dots i_m} \subseteq \mathbb{A}^n$$

cioè è:

$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{A}^m \longrightarrow \Big(0,\dots,\underset{i_i1}{x_1},\dots,\underset{i_m}{x_m},\dots,0\Big)\in\mathbb{A}^n_{i_1\dots i_m}$$
$$\Big\downarrow id$$
$$(x_{i_1},\dots,x_{i_m})\in\mathbb{A}^m$$

Π è lineare perchè l'immagine è una $m-$pla di polinomi x_{ij}.

Esempio 9.11. Sia $n\le m$ e siano $\underline{a},\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\in\mathbb{A}^m.\{\underline{a}_i\}$ sono linearmente indipendenti.

$$\tau\colon\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{A}^n\to\underline{a}+\lambda_1\underline{a}_1+\dots+\lambda_n\underline{a}_n\in\mathbb{A}^m$$

immersione di $\mathbb{A}^n$ in $\mathbb{A}^m$. È lineare perchè la matrice è

$$A=\begin{pmatrix}\underline{a}_1\\ \vdots\\ \underline{a}_n\end{pmatrix}\ \text{e}\ \underline{a}\in\mathbb{A}^m$$

τ è lineare ed è un isomorfismo di $\mathbb{A}^n$ su un sottospazio affine di $\mathbb{A}^m$ di dimensione n. Inoltre $\tau\colon\mathbb{A}^n\to\tau(\mathbb{A}^n)=\Sigma$, $\tau(\mathbb{A}^n)$ è un sottospazio di $\mathbb{A}^m$ di dimensione n perchè $\{\underline{a}_i\}$ sono linearmente indipendenti e sono n. Costruiamo τ^{-1} e faremo vedere che è un morfismo. Sia $\tau^{-1}\colon\Sigma\to\mathbb{A}^n$. Per ogni $\underline{y}\in\Sigma$ si ha

$$\begin{cases}y_1= & a_1+\lambda_1a_{11}+\dots+\lambda_na_{n1}\\ \vdots & \\ y_n= & a_n+\lambda_1a_{1n}+\dots+\lambda_na_{nn}\\ \vdots & \\ y_m= & a_m+\lambda_1a_{1m}+\dots+\lambda_na_{nm}\end{cases}$$

essendo $\{\underline{a}_i\}$ linearmente indipendenti, quindi segue rg$A$ =rg$(a_{ij})=n$.
Supponiamo che n righe linearmente indipendenti siano le prime. Il sistema costituito dalle prime n equazioni ha allora n equazioni in n incognite λ_i e siccome rg$A=n$, per un fissato $\underline{y}=(y_1,\dots,y_n)$ il sistema ha un'unica soluzione che è data da:

$$\lambda_i=\frac{g_i(y_1,\dots,y_n)}{\mid a_{ij}\mid_{i=1,\dots,n\,j=1,\dots,n}}\ \text{per}\ i=1,\dots,n,\ \text{con}\ g_i\ \text{polinomio di primo grado}$$

Si ha $\tau^{-1}\colon(y_1,\dots,y_n)\in\Sigma\to(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{A}^n$, trovati come sopra. τ^{-1} è l'inversa di τ ed è lineare perché l'immagine è una n–pla di polinomi (λ_i).
Quindi τ^{-1} è un morfismo e segue che τ è un isomorfismo.

Quindi ogni sottospazio affine Σ è isomorfo a uno spazio affine di dimensione uguale a quella di Σ.
Consideriamo la seguente applicazione:

$$\alpha\colon (\underline{a}, A) \in \mathbb{A}^n \times (\mathbb{A}^{n^2} - Z_a(A)) \to \tau \in \mathcal{G}(\mathbb{A}^n)$$

Denotato Δ =det$A$, esso è un polinomio di A^{n^2} con a_{ij} indeterminate. α è ovviamente biettiva, quindi si può trasportare la struttura di gruppo su $\mathbb{A}^n \times (\mathbb{A}^{n^2} - Z_a(\Delta))$ e quella di varietà quasi–proiettiva su $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n)$. Il dominio è una varietà quasi–proiettiva, perchè $Z_a(\Delta)$ è un ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$, è irriducibile perchè isomorfa a $Z_a(x_{2n+1}\Delta - 1))$ che è irriducibile e inoltre è localmente chiuso perché è aperto ed è intersezione di se stesso con $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{2n}$.
La legge di gruppo sul dominio è:

$$((\underline{a}, A),\, (\underline{b}, B)) \to (\underline{a}B + \underline{b},\, AB)$$

Infatti se τ e δ sono due applicazioni lineari:

$$\underline{x} \xrightarrow{\tau} \underline{a} + \underline{x}A \xrightarrow{\delta} \underline{b} + (\underline{a} + \underline{x}A)B = (\underline{a}B + \underline{b})\underline{x}((AB))$$

Si indichi con $\mathcal{A}(\mathbb{A}^n_k)$ il gruppo degli automorfismo di $\mathbb{A}^n_k$. In generale $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n) \subseteq \mathcal{A}(\mathbb{A}^n)$ e in particolare $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n)$ è un sottogruppo di di $\mathcal{A}(\mathbb{A}^n)$.

Proposizione 9.12. $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n) = \mathcal{A}(\mathbb{A}^n) \Leftrightarrow n = 1$

Dim. $\Leftarrow$) Se $n = 1$ un automorfismo $\tau \in \mathcal{A}(\mathbb{A}^1)$ è del tipo:

$$\tau\colon x \in \mathbb{A}^1 \to P(x) \in \mathbb{A}^1$$

con $P \in A^{(1)}$, perchè è un morfismo e deve essere $\tau(x)_j = f_j(x)$ polinomio, per ogni indice j, allora $\tau(x) = f(x)$ polinomio. τ^{-1} è ancora un automorfismo ed è del tipo:

$$\tau^{-1}\colon y \in \mathbb{A}^1 \to Q(y) \in \mathbb{A}^1$$

con $Q \in A^{(1)}$. Poichè $\tau^{-1} \circ \tau = id_{\mathbb{A}^1}$ allora $Q(P(X)) = x$ e se $deg P = n$, $deg\, Q = m$ segue:

$nm = 1 \Rightarrow n = m = 1 \Rightarrow P$ è lineare $\Rightarrow \tau$ è un'applicazione lineare $\Rightarrow \tau \in \mathcal{G}(\mathbb{A}^n)$.

$\Rightarrow$) Se per assurdo $n > 1$, allora esistono automorfismi non lineari (come vedremo dopo) e dunque $\mathcal{G}(\mathbb{A}^n) \subset \mathcal{A}(\mathbb{A}^n)$, che è una contraddizione. $\square$

Proposizione 9.13. *Se* $\tau \in \mathcal{A}(\mathbb{A}^n)$ *allora il determinante jacobiano*

$$J_t = \frac{\delta(P_1, \ldots, P_n)}{\delta(x_1, \ldots, x_n)} \in K^*$$

Dim. τ è un automorfismo allora è del tipo:

$$\tau\colon \underline{x} \in \mathbb{A}^{(n)} \to (P_1(\underline{x}), \ldots, P_n(\underline{x})) \in \mathbb{A}^n,\ P_i \in A^{(n)}, \text{ ma è anche}$$

$$\tau^{-1}\colon y \in \mathbb{A}^n \to (Q_1(\underline{x}), \ldots, Q_n(\underline{x})) \in \mathbb{A}^n,\ Q_i \in A^{(n)}$$

$$\tau^{-1} \circ \tau = id_{\mathbb{A}^{(n)}} \Rightarrow \underline{x} = (Q_1(P_1(\underline{x}), \ldots, P_n(\underline{x})) \ldots, Q_n(P_1(\underline{x}), \ldots, P_n(\underline{x})))$$

cioè $x_i = Q_i(P_1(\underline{x}), \ldots, P_n(\underline{x}))$. Facciamo le derivate parziali ai due membri e scriviamo la matrice jacobiana:

$$I = \left\| \frac{\delta Q_i}{\delta y_h} \right\|_{\substack{i=1,\ldots,n \\ h=1,\ldots,n}} \left\| \frac{\delta P_h}{\delta x_j} \right\|_{\substack{h=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

e passando ai determinanti jacobiani:

$$1 = det\left(\frac{\delta Q_i}{\delta y_h}\right) det\left(\frac{\delta P_h}{\delta x_j}\right) = J_{\tau^{-1}} J_\tau$$

Il secondo membro è prodotto di due polinomi ed è uguale a 1. I due polinomi sono costanti diversi da zero allora $J_\tau \in k^*$. □

Osservazione 36. Se $n = 1$ ci riduciamo solo a $\underline{P}(x)$ e rientriamo nel caso precedente.

L'applicazione

$$\varphi \colon \tau \in \mathcal{A}(\mathbb{A}^n) \to J_\tau \in K^*$$

è un omomorfismo di gruppi. In particolare la restrizione, ottenuta restringendo il dominio

$$\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{A}^n) \to J_\tau \in k^*$$

è un omomorfismo di gruppi e morfismo di varietà, cioè è un omomorfismo algebrico. In pratica è $\tau \colon (\underline{a}, A) \to det\, A$ perchè lo jacobiano di $\underline{x}A$ è A, facendo le derivate di funzioni lineari.

Proposizione 9.14. *Esistono automorfismi non lineari per $n \geq 2$.*

Dim. Consideriamo l'applicazione

$$\tau \colon (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \to (x_1, x_2 + P(x_1)) \in \mathbb{A}^2,\ P \in A^{(1)}$$

che è un morfismo perchè ogni $x_i \circ \tau$ è un polinomio e allora è regolare.

$$\tau^{-1}(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \text{ è un morfismo } \Rightarrow \tau \text{ è un automorfismo.}$$

Ma non è lineare se P non è lineare. □

Gli automorfismi di questo tipo formano un gruppo isomorfo ad $(A^{(1)}, +)$ (gruppo additivo di $A^{(1)}$).

Definizione 9.15. Sia $n \leq m$ e sia A una matrice $(n+1) \times (m+1)$ su k di rango $n+1$. L'applicazione:

$$\tau \colon [\underline{x}] \in \mathbb{P}^n \to [\underline{x}A] \in \mathbb{P}^m$$

si dice omografia di ${\mathbb{P}^n}_k$ in $\mathbb{P}^m_k$ o trasformazione lineare di ${\mathbb{P}^n}_k$ in $\mathbb{P}^m_k$.

La definizione è ben posta: infatti se $\underline{x}$ varia di un fattore di proporzionalità, anche $\underline{x}A$ varia dello stesso fattore. Inoltre è un morfismo, perché $x_i \circ \tau$ sono polinomi allora è regolare.

Lemma 9.16. *Se* $P_i = [\underline{a}_i]$,

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_0 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

τ *è un isomorfismo di* $\mathbb{P}^n$ *su* $P_0 \vee \cdots \vee P_n$.

Dim. τ si può scrivere:

$$\tau \colon [\underline{x}] \in \mathbb{P}^n \to [x_0\underline{a}_0 + \cdots + x_n\underline{a}_n] \in P_0 \vee \cdots \vee P_n$$

che è l'applicazione che definisce il sottospazio $P_0 \vee \cdots \vee P_n$, poichè le $\underline{a}_i$ sono linearmente indipendenti, poichè $\mathrm{rg}A = n+1$. τ è un morfismo, e $\tau^{-1} \colon [x_0\underline{a}_0 + \cdots + x_n\underline{a}_n] \to [\underline{x}]$ a sua volta è un morfismo perchè $x_i \circ \tau^{-1} = x_i$ regolare e dunque τ è un isomorfismo. $\square$

Se $n = m$, si indichi con $\mathcal{G}(\mathbb{P}^n{}_k)$ l'insieme delle trasformazioni lineari, ovvero

$$\mathcal{G}(\mathbb{P}^n{}_k) = \{\tau \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n\}$$

ed è un gruppo, rispetto all'operazione di composizione.

Definizione 9.17. $\mathcal{G}(\mathbb{P}^n{}_k)$ è detto gruppo delle omografie.

Proposizione 9.18. $\mathcal{G}(\mathbb{P}^n) \simeq PGL(n,k)$ *è un isomorfismo di gruppi.*

Dim. Definiamo

$$\alpha \colon \tau \in \mathcal{G}(\mathbb{P}^n) \to [A] \in \mathrm{PGL}(n,k) = \mathbb{P}^{n2} - Z_p(\varDelta)$$

dove $\varDelta = det\,A$. α è ben posta ed iniettiva: infatti τ individua A a meno di un $\lambda \in k^*$, poichè

$$\tau = \tau' \Leftrightarrow \forall \underline{x} \in \mathbb{P}^n\, [\underline{x}A] = [\underline{x}B] \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^* : \underline{x}A = \lambda \underline{x}B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A = \lambda B \Leftrightarrow A \sim B$ nella relazione che determina $\mathrm{PGL}(n,k) \;\Leftrightarrow \alpha(\tau) = \alpha(\tau')$

Viceversa, assegnata A con $det\,A \neq 0$, resta individuata τ allora α è su

$$\mathrm{PGL}(n,k) = \frac{\mathrm{GL}(n+1,k)}{\{cI : c \in k\}} = \alpha(\mathcal{G}(\mathbb{P}^n)),$$

dove $\mathrm{GL}(n+1,k)$ è l'insieme delle matrici $(n+1) \times (n+1)$ non degeneri. Quindi il gruppo delle omografie di $\mathbb{P}^n$ in sè è isomorfo al gruppo $\mathrm{PGL}(n,k)$ che è il gruppo $\mathrm{GL}(n+1,k)$ delle matrici quadrate non degeneri del tipo $(n+1) \times (n+1)$ su k, quozientato rispetto al sottogruppo delle matrici scalari $\{cI : c \in k\}$. $\square$

Data τ e posto $\tau[\underline{x}] = [\underline{x}']$ si ha:

$$\lambda x_i' = a_{0i}x_0 + \cdots + a_{ni}x_n,\ \lambda \in k^*, i = 0, \ldots, m$$

con $A = (a_{ij})$. Se $n = m$ sono formule di cambiamento delle coordinate in $\mathbb{P}^n$. Ricordiamo che le proprietà affini sono, per definizione, proprietà invarianti per trasformazioni lineari $\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{A}^n)$. Le proprietà proiettive sono, per definizione, proprietà invarianti per omografie $\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{P}^n)$. Ad esempio il grado di un'ipersuperficie è una proprietà proiettiva dell'ipersuperficie; infatti $Z \subseteq \mathbb{P}^n$, $Z = Z_p(f)$ con Z ipersuperficie con f equazione ridotta.
Sia

$$\tau\colon [\underline{x}] \in \mathbb{P}^n \to [\underline{x}A] \in \mathbb{P}^n$$

un automorfismo lineare. Allora

$$\tau^{-1}(Z) = \{[\underline{x}] \in \mathbb{P}^n \mid [\underline{x}A] \in Z\} = \{[\underline{x}] \in \mathbb{P}^n \mid f(\underline{x}A) = 0\} = Z_p(f(\underline{x}A))$$

ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$ di equazione $f(\underline{x}A) = 0$ è irriducibile dello stesso grado perchè le trasformazioni lineari conservano il grado dei polinomi perchè sono cambiamenti di coordinate lineari. È irriducibile perché se per assurdo $\tau^{-1}(Z) = Z' \cup Z'' = Z_P(fg)$ allora $Z = \tau(Z') \cup (Z'')$ è riducibile, ma ciò è una contraddizione. Consideriamo

$$\begin{aligned}\tau^*\colon S^{(n)} &\to S^{(n)}\\ x_i &\to \sum_0 j^n a_{ij}x_j\end{aligned}$$

che è un isomorfismo di $k-$algebre perchè manda generatori in generatori. Infatti $\{\sum_j a_{ij}x_j\}$ sono $n+1$ linearmente indipendenti, perché l'isomorfismo conserva l'indipendenza lineare. Allora:

$$\tau^*\colon k\left[x_o, \ldots, x_n\right] \to k\left[\sum_{0\,j}^{n} a_{ij}x_j\right]_{i=0,\ldots,n}$$

τ^* muta polinomi omogenei in polinomi omogenei e dello stesso grado perchè opera una trasformazione lineare delle variabili e dunque τ^* induce un isomorfismo in ogni parte graduata $S_d^{(n)}$.
Inoltre τ^* manda polinomi irriducibile in polinomi irriducibili dello stesso grado,irriducibile perchè se per assurdo $\tau^*(f) = gh$ allora $f = (\tau^{-1})^*(g)(\tau^{-1})^*(h)$ riducibile, ed è una contraddizione.

Corollario 9.19. $\tau^{-1}\left(Z_P(f_1, \ldots, f_n)\right) = Z_P\left(\tau^*(f_1), \ldots, \tau^*(f_n)\right)$

Dim.

$$\begin{aligned}&[\underline{x}] \in \tau^{-1}\left(Z_P(f_1, \ldots, f_n)\right) \Leftrightarrow= \tau[\underline{x}] = [\underline{x}A] \in Z_P(f_1, \ldots, f_n) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow f_1(\underline{x}A) = \cdots = f_n(\underline{x}A) = 0 \Leftrightarrow [\underline{x}] \in Z_P\left(\tau^*(f_1), \ldots, \tau^*(f_n)\right).\end{aligned}$$

□

Quindi una trasformazione lineare manda ipersuperfici in ipersuperfici dello stesso grado. Inoltre le omografie mutano sottospazi in sottospazi. Si dimostra in modo analogo per il caso affine.

Proposizione 9.20. *Sia* $\varphi\colon V \to W$ *un morfismo tra varietà quasi–proiettive. Allora:*

(a) φ *dominante* $\Leftrightarrow \forall P \in V, \varphi_p^*$ *iniettivo ;*
(b) φ *isomorfismo* $\Leftrightarrow \varphi$ *omeomorfismo e* φ_p^* *isomorfismo* $\forall p \in V$*.*

Dim. Dimostriamo la a)
$\Rightarrow$) Sia φ dominante, allora $\varphi^*\colon K(W) \to K(V)$ ha senso ed è iniettiva. Poniamo $\varphi(p) = Q$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{a,w} & \xrightarrow{\varphi_p^*} & \mathcal{O}_{v,p} \\ \cap\!| & & \cap\!| \\ K(W) & \xrightarrow[\varphi^*]{} & K(V) \end{array}$$

$$\varphi_p^* \text{ è restrizione di } \varphi^* \Rightarrow \varphi_p^* \text{ è iniettiva}$$

Oppure

$$[U, f] \in \mathcal{O}_{w,a} \cap ker\varphi_p^* \Rightarrow \varphi_p^*[U, f] = [\varphi^{-1}(U), \underline{f \circ \varphi}] = 0$$

Se per assurdo, supponiamo $f \neq 0$, segue che

$$\varphi(V) = \varphi\big(\overline{\varphi^{-1}(U)}\big) \subseteq \overline{\varphi(\varphi^{-1}(U))} \subseteq Z_U(f) \subset W \Rightarrow Z_U(f) \subset W$$

Se per assurdo $\overline{Z_U(f)} = W$, allora

$$Z_U(f) = \overline{Z_U(f)} \cap U = W \cap U = U \Rightarrow f = 0$$

in U, ed è una contraddizione, per la supposizione fatta prima.

$$\varphi(V) \subset \overline{Z_U(f)} \subset W \Rightarrow \overline{\varphi(V)} \subset W$$

ed è una contraddizione perchè φ è dominante allora $ker\varphi^* = \{\underline{0}\}$, segue che φ^* è iniettiva.
$\Leftarrow$) Sia $P \in V$ tale che φ_p^* è iniettiva, poniamo $\varphi(P) = Q \in W$. Sappiamo che esiste un aperto affine che appartiene ad una base di W, per esempio, W_0 tale che $Q \in W_0 \subseteq W$. Si ha $p \in \varphi^{-1}(W_0) \subseteq V$ che è un aperto per la continuità di φ. Quindi esiste V_0 aperto affine di V tale che $P \in V_0 \subseteq \varphi^{-1}(W_0)$ Possiamo restringere φ e consideriamo

$$\varphi_{|p_0}\colon V_0 \to W = W_0 \text{ morfismo}$$

$$P \to Q$$

Siamo nell'ipotesi di $U \subseteq V$ aperto

$$W' = U \cap W \Rightarrow \mathcal{O}_{v,w} \simeq \mathcal{O}_{u,w'}$$

però con $V_0 \subseteq V$ aperto, $W' = \{P\} = V_0 \cap \{P\} = V_0 \cap W = \{P\}$, allora $\mathcal{O}_{V_0,P} \simeq \mathcal{O}_{V,P}$. Analogamente $\mathcal{O}_{W_0,\varphi(P)} \simeq \mathcal{O}_{W,\varphi(P)}$.
Abbiamo quindi:

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*_{|V_0}\colon \mathcal{O}_{W_0,Q} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V_0,p} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \varphi^*\colon \mathcal{O}_{W,Q} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V,p} \end{array}$$

In effetti φ^* e $\varphi^*_{|V_0}$ sono la stessa applicazione, φ^* è iniettiva per ipotesi, segue $\varphi^*_{|V_0}$ iniettiva. Facciamo vedere che $\varphi_{|V_0}$ è dominante.
W_0 e V_0 sono affini $\Rightarrow$ per il lemma (6)

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{W_0,a} \simeq \mathcal{O}(W_0)_{\underline{m}_Q} \\ \mathcal{O}_{V_0,P} \simeq \mathcal{O}(V_0)_{\underline{m}_p} \end{cases}$$

Quindi $\varphi^{\infty}_{|V_0}$ induce un'applicazione iniettiva

$$\alpha\colon \mathcal{O}(W_0)_{\underline{m}_Q} \to \mathcal{O}(V_0)_{\underline{m}_P}$$

Ma quest'applicazione α ha come restrizione la seguente applicazione:

$$\varphi^*_{|V_0}\colon \mathcal{O}(W_0) \to \mathcal{O}(V_0)$$

che risulta quindi iniettiva allora $\varphi_{|V_0}\colon V_0 \to W_0$ è dominante e dunque $\overline{\varphi_{|V_0}(V_0)} = W_0$. Ma W_0 è un aperto non vuoto di W irriducibile allora $\overline{W_0} = W$ (chiusura proiettiva in W) e quindi la chiusura proiettiva di $\varphi_{|_{V_0}}(V_0)$ in W è tale che $\overline{\varphi_{|V_0}(V_0)} = \overline{W_0} = W$. Ma $\varphi(V) \supseteq \varphi_{|V_0}(V_0)$, allora

$$\overline{\varphi(V)} \supseteq W \Rightarrow \overline{\varphi(V)} = W \Rightarrow \varphi \text{ è dominante}$$

Dimostriamo b)
$\Rightarrow$) Sia φ un isomorfismo, allora φ è suriettiva, anche φ^{-1} è suriettiva e dunque φ, φ^{-1} sono dominanti allora ${\varphi^*}_P$ e $(\varphi^{-1})^*_Q$ sono iniettive. Dimostriamo che quest'ultime sono una l'inversa dell'altra:

$$\begin{array}{rll} {\varphi^*}_P\colon \mathcal{O}_{W,Q} \to \mathcal{O}_{V,P} & \qquad & [U,f] \to [\varphi^{-1}(U), f\circ\varphi] \\ (\varphi^{-1})^*_Q\colon \mathcal{O}_{V,P} \to \mathcal{O}_{W,Q} & \qquad & [U,f] \to [\varphi(U), f\circ\varphi^{-1}] \end{array}$$

$$[U,f] \overset{\varphi^*_P}{\to} [\varphi^{-1}(U), f\circ\varphi] \overset{{(\varphi^{-1})_Q}^*}{\to} [\varphi(\varphi^{-1}(U)), f\circ\varphi\circ\varphi^{-1}] = [U,f] \text{ e viceversa}$$

□

Osserviamo esplicitamente che nel dimostrare la (a) della precedente proposizione si è di fatto dimostrato che:

(a) Se φ è dominante, allora φ_p^* è iniettivo per ogni $P \in V$;
(b) Se φ_p^* è iniettivo per qualche $P \in V$, allora φ è dominante.

Dunque φ_p^* è iniettivo per un $P \in V$ se e solo se lo è per ogni $P \in V$.

Proposizione 9.21. *Sia $H \subseteq \mathbb{P}^n$ sottospazio di dimensione minore o uguale a $n-2$ allora $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n - H) = k$.*

Dim. Un sottospazio di dimensione τ è definito da $n-\tau$ equazioni, allora in questo caso H è definito da 2 equazioni lineari. A meno di omografie possiamo supporre $H = Z_P(x_0, x_1)$. Per dimostrare la proposizione, faremo vedere la doppia inclusione. Ogni funzione costante è regolare. Sia $f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - H)$ allora possiamo considerare f come elemento di $K(\mathbb{P}^n)$ e dunque f è regolare in $\mathbb{P}^n$ e segue

$$\exists U \subseteq \mathbb{P}^n \text{ aperto } : f = \frac{g}{h}$$

su U con $g, h \in S_d^{(n)}, h \neq 0$ su U.
$h \notin k$ quindi possiamo supporre $(g, h) = 1$, tale che $h = 0$ definisce un'ipersuperficie. Ma ogni ipersuperficie ha intersezione non vuota con la varietà di dimensione maggiore o uguale 1, allora

$$Z_{\mathbb{P}^n}(h) \cap H \neq \varnothing \Rightarrow \exists P \in Z_{\mathbb{P}^n}(h) - H \mid h(P) \mid= 0$$

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^n - H) \Rightarrow \exists U'_P \subseteq \mathbb{P}^n - H : \forall Q \in U' f(Q) = \frac{g'(Q)}{h'(Q)}$$

con $h'(Q) \neq 0$. □

10 Varietà di Veronese

Dopo aver definito il concetto di morfismo esplicitando alcune sue proprietà, è possibile definire alcune varietà importanti, evidenziando le rispettive caratteristiche. Siano n, d interi positivi e si consideri l'intero

$$p(n,d) = \binom{n+d}{d}$$

delle combinazioni con ripetizioni di $n+1$ elementi a d a d. Posto poi $N(n,d) = p(n,d) - 1$ si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ i cui punti hanno coordinate omogenee che denoteremo con $(V_{i_0,\ldots,i_n})_{i_0+\cdots+i_n=d}$.

Definizione 10.1. Il morfismo

$$v_{n,d} \colon [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \to [x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}]_{i_0+\cdots+i_n=d} \in \mathbb{P}^{N(n,d)}$$

viene detto morfismo di Veronese di tipo (n, d).

Proposizione 10.2. *Ponendo*

$$V_{n,d} = v_{n,d}(\mathbb{P}^n)$$

$V_{n,d}$ è una sottovarietà di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$, detta varietà di Veronese di tipo (n,d), e $v_{n,d}$ è un isomorfismo di $\mathbb{P}^n$ su $V_{n,d}$.

Dim. Si consideri intanto l'omomorfismo di $k-$algebre

$$\vartheta_{n,d} \colon f(V_{i_0 \ldots i_n}) \in k[v_{i_0 \ldots i_n}]_{i_0 + \cdots + i_n = d} \to f(x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}) \in k[x_0 \ldots x_n]$$

e si interpreti $k_{i_0 + \cdots + i_n = d}$ come anello delle coordinate di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ e $k[x_0, \ldots, x_n]$ come anello delle coordinate V di $\mathbb{P}^n$. Si osservi che $Im\vartheta_{n,d}$ è il sottoanello $\overset{\infty}{\underset{d=0}{\oplus}} S_d^{(n)}$ di $S^{(n)} = K[x_0 \ldots x_n]$ che noi denoteremo con $[S^{(n)}]_d$. Si noti che tale anello è graduato e privo di divisori dello zero da cui si deduce che il nucleo $\mathcal{I}_{n,d}$ di $\vartheta_{n,d}$ è un ideale primo di $k[v_{i_0} \ldots v_{i_n}]$. Inoltre, poichè $\vartheta_{n,d}$ manda polinomi omogenei in polinomi omogenei (ciò si esprime dicendo che è un omomorfismo omogeneo), $\mathcal{I}_{n,d}$ è un ideale omogeneo. Proviamo che $V_{n,d} = Z_p(\mathcal{I}_{n,d})$. È chiaro che $V_{n,d} \subseteq Z_p(\mathcal{I}_{n,d})$. D'altra parte in $\mathcal{I}_{n,d}$ vi sono tutti i polinomi del tipo

$$(V_{i_{00} \ldots i_{0n}})^{\alpha_0} \ldots (V_{i_{l0} \ldots i_{ln}})^{\alpha_l} = (V_{j_{00} \ldots j_{0n}})^{\beta_0} \ldots (V_{j_{l0} \ldots j_{ln}})^{\beta_l} \tag{1}$$

con $\alpha_{0i0\mu} + \cdots + \alpha_{lil\mu} = \beta_{0j0\mu} + \cdots + \beta_{ljl\mu\ldots}$, $\mu = 0, \ldots, n$. Di qui segue che se $[v_{i_0 \ldots i_n}] \in Z_P(\tau)$, almeno una delle coordinate del tipo $v_{0 \ldots 0} d_{0 \ldots 0}$ è non nulla. Infatti dalla (1) si trae:

$$(v_{i_0 \ldots i_n})^d = v_{d0\ldots0}^{i_0} v_{0,d0\ldots0}^{i_1} \cdots v_{0\ldots0d}^{i_n}$$

Se, ad esempio, $v_{d0 \ldots 0 \neq 0}$, si ponga:

$$x_0 = 1, \ x_1 = \frac{v_{d-1,1\ldots0}}{v_{d0\ldots0}} \ \ldots, x_n = \frac{v_{d-1,\ldots,01}}{v_{d0\ldots0}} \tag{2}$$

Avendosi ancora dalla (1)

$$v_{i_0 \ldots i_n} v_{d0\ldots0}^{d-1} = v_{d0\ldots0}^{i_0} v_{d-1,1,0\ldots0}^{i_1} \cdots v_{d-1,0\ldots0,1}^{i_n}$$

si ha

$$V_{i0 \ldots in} = x_0^{i0} \ldots x_n^{in} V_{d0\ldots0}$$

sicchè

$$[V_{io\ldots in}] = V_{n,d}[x_0, \ldots, x_n]$$

Ciò prova che $V_{n,d}$ è una varietà e, fra l'altro, che $S(V_{n,d}) \simeq [S^{(n)}]_d$. Proviamo ora che $v_{n,d}$ è un isomorfismo di $\mathbb{P}^n$ su $V_{n,d}$. È chiaro che $v_{n,d}$ è un morfismo biettivo di $\mathbb{P}^n$ su $V_{n,d}$ il quale è ancora un morfismo, essendo localmente dato dalle formule (2) o da analoghe, e ciò basta a provare quanto asserito. La stessa cosa può però anche provarsi in applicazione della proposizione precedente (b). Intanto si osservi che se $f(v_{i_0 \ldots i_n}) \in k[v_{i_0 \ldots i_n}]$, esso è un polinomio omogeneo,

$v_{n,d}^{-1}(Z_P(f) \cap v_{n,d}) = Z_P(\vartheta_{n,d}(f))$, e ciò prova direttamente che $v_{n,d}$ è continua. D'altra parte, se $f(x_0, \ldots, x_n) \in S^{(n)}$ è un polinomio omogeneo, $f^d \in [S^{(n)}]_d$ sicchè esiste un polinomio $g(v_{i_0 \ldots i_n}) \in k[v_{i_0 \ldots i_n}]$ tale che $f^d = \mathcal{O}_{n,d}(g)$. Allora $v_{n,d}(Z_P(f)) = v_{n,d} \cap Z_P(g)$ e ciò prova che $v_{n,d}$ è pure chiuso e quindi è un omeomorfismo. Resta da provare che, per ogni punto $P \in \mathbb{P}^n$, $(v_{n,d})_P^*$ è un isomorfismo, ossia, che è suriettiva. Ora, se $[U, f] \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n, P}$, si può supporre che f sia in U del tipo $\frac{g}{h}$, con g, h polinomi omogenei dello stesso grado q, e h non nulla in U. Se l è un polinomio omogeneo di grado $\alpha d - a$, con $\alpha >> 0$, non nullo in P, m su un opportuno intorno di P, si ha $\frac{g}{h} = \frac{gl}{hl}$. D'altra parte esistono polinomi $G, H \in k[v_{i_0} \ldots v_{i_n}]$, omogenei di grado α, tali che $gl = \vartheta_{n,d}(G)$, $hl = \vartheta_{n,d}(H)$, sicchè

$$[U, f] = (v_{n,d})_P^*[V_{n,d} - (V_{n,d} \cap Z_P(H)), \frac{G}{H}]$$

□

Definizione 10.3. Si chiama varietà di Veronese di tipo (n, d) ogni varietà proiettivamente equivalente a $V_{n,d}$.

Esempio 10.4. Abbiamo già incontrato in precedenza delle varietà di Veronese: le cubiche gobbe sono omografiche a $V_{1,3}$, le coniche irriducibili $V_{1,2}$.

Definizione 10.5. Le varietà $V_{1,n}$ si dicono curva razionali normali di $\mathbb{P}^n$, le varietà $V_{2,n}$ si dicono superfici di Veronese di tipo n; $V_{2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$ si dice semplicemente superficie di Veronese.

Proposizione 10.6. *Le varietà di Veronese non sono contenute in alcun iperpiano, ovvero sono varietà non degeneri.*

Vogliamo ora dare un interpretazione geometrica della costruzione della varietà di Veronese. Per ogni $d > 0, S_d^{(n)}$ uno spazio vettoriale di dimensione $p(n, d)$, sicchè può essere considerato come uno spazio affine $\mathbb{A}^{p(n,d)}$, i cui punti corrispondono ai polinomi omogenei di grado d in $n + 1$ variabili $x_0, \ldots, x_n$, e hanno coordinate di dimensioni ancora con $(v_{i_0 \ldots i_n})_{i_0 + \cdots + i_n = d}$, dove $(v_{i_0 \ldots i_n})$ è il punto di $\mathbb{A}^{p(n,d)}$ che corrisponde al polinomio omogeneo $\sum_{i_0 \ldots i_n} v_{i_0 \ldots i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$. Naturalmente ha senso considerare lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ dedotto da $\mathbb{A}^{P(n,d)}$.

Definizione 10.7. Se $d = 1$, i punti di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ sono in corrispondenza biunivoca con gli iperpiani di $\mathbb{P}^n$: tale spazio si denota con $\check{\mathbb{P}^n}$ e prende il nome di spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}^n$.

Allo scopo di fornire un'analoga interpretazione per i punti di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$, se $d > 1$, premettiamo le seguenti considerazioni. Iniziamo con il fornire la seguente definizione:

Definizione 10.8. Sia $\mathcal{D}^{(n)}$ il gruppo libero generato dalle ipersuperfici irriducibili di $\mathbb{P}^n$. Un elemento di $\mathcal{D}^{(n)}$ è del tipo

$$V = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i V_i$$

dove $V_1, \ldots, V_h$ sono ipersuperfici irriducibili distinte di $\mathbb{P}^n$, che si dicono componenti irriducibili di V e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono degli interi che si dicono le molteplicità di $V_1, \ldots, V_h$ per V.

Definizione 10.9. L'intero $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i d_i$ dove d_i è il grado di V_i, si dice grado di V e si denota con $deg(V)$. Se $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, h$ si dice che V è effettivo e se $h = 1, \alpha_1 = 1$, che V è irriducibile.

Definizione 10.10. Denotato con $\mathcal{D}_+^{(n)}$ il semigruppo di $\mathcal{D}^{(n)}$ costituito dalle $V \in \mathcal{D}^{(n)}$ effettive, gli elementi di $\mathcal{D}_+^{(n)}$ si dice ipersuperficie generalizzate di $\mathbb{P}^n$ o, semplicemente, ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$, se non v'è luogo ad equivoco.

Se $V = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i V_i$ è un'ipersuperficie generalizzata ed $f_i = 0$ è l'equazione ridotta di V_i, diremo che $f_1^{\alpha_1} \ldots f_h^{\alpha_h} = 0$ è l'equazione di V in $\mathbb{P}^n$. Viceversa $f \in S^{(n)} - \{0\}$ di grado positivo, è un polinomio omogeneo, e $f = f_1^{\alpha_1}, \ldots, f_h^{\alpha_h}$ ne è la decomposizione in fattori primi, diremo che l'equazione $f = 0$ definisce l'ipersuperficie generalizzata $V = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i Z_p(f_i)$.

Osservazione 37. Se il grado di f è nullo diremo che l'equazione $f = 0$ definisce lo zero in $\mathcal{D}_+^{(n)}$, che è detto ipersuperficie nulla di $\mathbb{P}^n$.

È chiaro allora che $f = 0$ e $g = 0$ definiscono la stessa ipersuperficie generalizzata se e solo se esiste una costante $\lambda \in k^*$ tale che $f = \lambda g$,e quindi se e solo se f e g, i quali punti del relativo spazio affine $\mathbb{A}^{p(n,d)}$, con d grado di f e g, sono proporzionali. Ne segue che i punti di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ sono in corrispondenza biunivoca con le ipersuperfici generalizzate di grado d di $\mathbb{P}^n$.

Definizione 10.11. Considerata ora la seguente applicazione:

$$\check{v}_{n,d} \colon H \in \check{\mathbb{P}^n} \to dH \in \mathbb{P}^{N(n,d)}$$

che ad ogni iperpiano H di $\mathbb{P}^n$ associa l'ipersuperficie generalizzata di grado d, dH di $\mathbb{P}^n$. Tale applicazione è detta applicazione di Veronese di tipo (n, d).

Proposizione 10.12. $\check{v}_{n,d}$ *è un morfismo.*

Dim. Se $H = [n_0, \ldots, n_n] \in \check{\mathbb{P}^n}$, allora H ha equazione

$$n_0 x_0 + \cdots + n_n x_n = 0$$

in $\mathbb{P}^n$, sicchè dH ha equazione

$$(n_0x_o + \cdots + n_nx_n)^d = \sum_{i_0+\cdots+i_n=d} \frac{d!}{i_0!\ldots i_n!} n_0^{i_0} \ldots n_n^{i_n}$$

Quindi

$$v_{n,d}[n_0, \ldots, n_n] = [\frac{d!}{i_0!\ldots i_n!} n_0^{i_0} \ldots n_n^{i_n}]$$

Distingueremo ora due casi:

(a) $char(k) = 0$. Si consideri allora l'omografia di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ in sè:

$$\omega \colon [v_{i0\ldots in}] \in \mathbb{P}^{N(n,d)} \to \left[\frac{d!}{i_0!\ldots, i_n!} v_{i0\ldots in}\right] \in \mathbb{P}^{N(n,d)}$$

che ha per matrice una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono $\frac{d!}{i_0!\ldots i_n!}$; è allora chiaro che $\tilde{v}_{n,d} = \omega \circ v_{n,d}$ dove $v_{n,d}$ è il morfismo di Veronese di $\check{\mathbb{P}}^n$ in $\mathbb{P}^{N(n,d)}$, dunque in tal caso $\tilde{v}_{n,d}$ è un isomorfismo di $\check{\mathbb{P}}^n$ sulla sua immagine, che è una varietà di Veronese;

(b) $char(k) \neq 0$. Può avvenire che gli interi $\frac{d!}{i_0!\ldots i_n!}$ non siano più tutti diversi dallo zero, e ciò certo accade se $char(k)$ divide d. In tal caso il discorso precedentemente fatto non vale più e va esaminato, caso per caso. Nel caso citato in cui $char(k)$ divide d, si ha:

$$\tilde{v}_{n,d}[n_0, \ldots, n_n] = [n_0^d, \ldots, n_n^d, 0 \ldots 0]$$

sicchè $\tilde{v}_{n,d}$ è composto di un immersione di $\check{\mathbb{P}}^n$ in $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ e di morfismo di Frobenius.

$\square$

Si noti che accanto all'applicazione $\tilde{v}_{n,d}$, se ne può considerare un'altra, detta applicazione di Veronese duale così definita:

$$\tilde{v}^*_{n,d} \colon P \in \mathbb{P}^n \to \tilde{v}^*_{n,d}(P) \in \check{\mathbb{P}}^{N(n,d)}$$

che ad ogni punto di $\mathbb{P}^n$ associa l'iperpiano di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ costituito da tutte le ipersuperfici generalizzate che contengono P.
Se $P = [a_0, \ldots, a_n]$, sia V una ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$ di grado d e di equazione $\sum_{i_0+\cdots+i_n=d} v_{i_0\ldots i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$. Si ha

$$V \in \tilde{v}^*_{n,d}(P) \Leftrightarrow \sum_i v_{i_0+\ldots i_n} a_0^{i_0} \ldots a_n^{i_n} = 0$$

sicchè quest'ultima equazione in $v_{i_0\ldots i_n}$ definisce $\tilde{V}^*_{n,d}(P)$ in $\mathbb{P}^{n\,N(n,d)}$, e quindi in definitiva si ha:

$$\tilde{v}^*_{n,d}\,[x_0, \ldots, x_n] = \left[x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}\right]$$

Pertanto l'applicazione di Veronese duale coincide con il morfismo di Veronese di $\mathbb{P}^n$ in $\check{\mathbb{P}}^{N(n,d)}$.
Sia W un'ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^n$, come si è visto precedentemente

$$\exists W' \text{ un'iperpiano in } \mathbb{P}^{N(n,d)} \text{ tale che } v_{n,d}(W) = W' \cap V_{n,d}$$

Di qui segue che

$$\mathbb{P}^n - W \overset{v_{n,d}}{\simeq} V_{n,d} - (V_{n,d} \cap W') \subseteq \mathbb{P}^{N(n,d)} - W' \simeq \mathbb{A}^{N(n,d)}$$

Di qui si deduce una interessante conseguenza:

Proposizione 10.13. *Se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà non ridotta ad un punto e $W \subseteq \mathbb{P}^n$ è un'ipersuperficie, allora $V \cap W \neq \varnothing$. In particolare due curve piane proiettive hanno sempre intersezione non vuota.*

Dim. Se per assurdo $V \cap W = \varnothing$, V sarebbe una varietà proiettiva isomorfa ad una affine, il che è assurdo. □

Ciò costituisce una precisazione alla formulazione del teorema di Bezout per $\mathbb{P}^2$. Inoltre segue la validità del seguente corollario:

Corollario 10.14. *$\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{A}^2$ non sono omeomorfi. Infatti esistono anche piani affini (che sono chiusi) tutte le cui componenti irriducibili sono $1-$dimensionali che non hanno punti a comune.*

Osservazione 38. $\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\}$ è una varietà non affine. Infatti risulta

$$\vartheta(\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\}) \simeq A^{(2)}$$

poiché l'immersione $\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\} \to \mathbb{A}^2$ determina un'inclusione

$$A^{(2)} \subseteq \vartheta(\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\}) \text{ e } \vartheta(\mathbb{A}^2 - \{0\}) \subseteq \mathbb{Q}(A^{(2)}) = K(\mathbb{A}^2)$$

Allora se $f \in \vartheta(\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\})$, si può scrivere

$$f = \frac{g}{h} \text{ con } g, h \in A^{(2)}$$

Se $h \notin k$ possiamo assumere g, h primi tra loro. Ora se $P \in Z_a(h) - \{\underline{0}\}$, esiste un intorno aperto U di P in $\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\}$ tale che in U f si scrive come $\frac{g'}{h'}$ con $h'(Q) \neq 0$, per ogni $Q \in U$. Poichè in $U - (U \cap Z_a(h))$ si ha

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$$

ivi si ha pure

$$gh' = g'h$$

e tale relazione vale allora in tutto $\mathbb{A}^2$. Ma essendo g primo con h, si ha che h divide h' e quindi $h'(P) = 0$ il che è assurdo. Dunque $h \in k^*$ e $f \in A^{(2)}$. Ora se $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ fosse affine, l'isomorfismo $A^{(2)} \simeq \vartheta(\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\})$ di cui sopra, corrisponderebbe ad un isomorfismo di $\mathbb{A}^2 - \{\underline{0}\}$ con $\mathbb{A}^2$, il che non è possibile.

Teorema 10.15. *Si consideri in $\mathbb{P}^n$ un sottospazio H di dimensione $n-2$, che, a meno di omografie, si può sempre supporre sia $Z_p(x_0, x_1)$. Allora ogni funzione regolare su $\mathbb{P}^n - H$ è costante.*

Dim. Se $f \in \Theta(\mathbb{P}^n \cdot H) \subseteq K(\mathbb{P}^n)$, si può pensare a f della forma $\frac{g}{h}$ con g, h polinomi omogenei dello stesso grado in $S^{(n)}$. Ragionando come nell'osservazione precedente, si può verificare agevolmente che h e quindi g, è costante. $\square$

Proposizione 10.16. *Se V è una varietà proiettiva, $S(V)$ non è invariante per isomorfismi a differenza dell'anello delle coordinate affini di una varietà affine.*

Si noti infatti che $\mathbb{P}^n \simeq V_{n,d}$ ma

$$S(\mathbb{P}^n) = S^{(n)} \not\simeq S(V_{n,d}) = [S^{(n)}]_d$$

almeno come $k-$algebre, avendo un numero diverso di generatori come $k-$algebre, perchè $S^{(n)}$ ha $n+1$ generatori come $k-$algebra: $\{x_0, \dots, x_n\}$, mentre $[S^{(n)}]_d$ ne ha

$$\binom{n+d}{d} = p(n,d)$$

Quindi l'anello delle coordinate dipende dall'immersione della varietà.

Il teorema (19) caratterizza le $k-$algebre che sono anelli delle coordinate di varietà affini. Infatti si nota che se Z è un chiuso di $\mathbb{A}^n$, allora $A(Z) = \dfrac{A^{(n)}}{\mathcal{I}_a(Z)}$ è finitamente generata e priva di elementi nilpotenti, poiché $\mathcal{I}_a(Z)$ è un ideale radicale; il viceversa si prova ragionando come nella dimostrazione del teorema (19).Analogamente si può dimostrare quanto segue:

Teorema 10.17. *Una $k-$algebra è anello delle coordinate di un chiuso affine se e solo se è finitamente generata e priva di nilpotenti.*

Dim. Se $Z \subseteq \mathbb{A}^m$ è un chiuso affine allora $A(Z)$ è una $k-$algebra finitamente generata. che però potrebbe avere divisori dello zero, perchè se Z non è irriducibile, non si quozienterà più rispetto a un ideale primo. Ma $A(Z)$ è priva di elementi nilpotenti, perché

$$A(Z) = \frac{A^{(m)}}{\mathcal{I}_a(Z)} \text{ con } \mathcal{I}_a(Z) \text{ radicale}$$

in quanto Z è chiuso, allora

$$Z = Z_a(\mathcal{I}_a(Z)) \Rightarrow \sqrt[2]{\mathcal{I}_a(Z)} = \mathcal{I}_a(Z_a(\mathcal{I}_a(Z))) = \mathcal{I}_a(Z)$$

Si ha che se $f \in A(Z)$ e $f^n = 0$ per $n > 0$, consegue

$$f = f + \mathcal{I}_a(Z) \Rightarrow f^n = f^n + \mathcal{I}_a(Z) = 0 \Rightarrow f^n \in \mathcal{I}_a(Z)$$

Poichè $\mathcal{I}_a(Z)$ è radicale, dunque

$$f \in \mathcal{I}_a(Z) \Rightarrow f = 0 \Rightarrow A(Z) \text{ è privo di elementi nilpotenti}$$

Dimostriamo il viceversa. Se A è finitamente generato, allora esistono $t_1, \ldots, t_n$ generatori su$k$ Esiste un omomorfismo di $k-$algebre:

$$h \colon A^{(m)} \to A$$
$$x_i \to t_i$$

suriettivo e univocamente determinato. Segue $\mathcal{I} = kerh$ è un ideale di $A^{(m)}$ tale che $\frac{A^{(m)}}{\mathcal{I}} \simeq A$, ed è radicale, in quanto

$$x^n \in \mathcal{I} \subseteq A^{(n)} \Rightarrow \varphi(x^n) = \varphi(x)^m = 0$$

ma A non ha elementi nilpotenti quindi

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{I}$$

$\square$

Concludiamo questo paragrafo con una proposizione che ci sarà utile nel seguito e che mostra il profitto che si può trarre dall'uso delle omografie di uno spazio proiettivo in sè.

Proposizione 10.18. *Siano V, W varietà quasi–proiettive e siano*

$$\varphi \colon V \to W$$

$$\psi \colon V \to W$$

morfismi tali che esiste un aperto non vuoto $U \subseteq V$ in cui $\varphi_{|_U} = \psi_{|_U}$. Allora $\varphi = \psi$.

Dim. Sia $U \underset{\neq}{\subset} V$ e supponiamo per assurdo $\varphi(P) \neq \psi(P)$. Immaginiamo W in $\mathbb{P}^n$, $U \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} W \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$. Possiamo ridurci al caso $W = \mathbb{P}^n$. Cambiando eventualmente coordinate possiamo supporre $\varphi(P), \psi(P) \in U_0$, operando su $\varphi^{-1}(U_0) \cap \psi^{-1}(U_0)$, che è un intorno aperto di P in V possiamo supporre che $U_0 = \mathbb{A}^n$ perchè φ e ψ, in queste ipotesi, vanno in $U_0 = (\mathbb{A}^n)$. Poichè V e W sono rispettivamente varietà quasi–proiettiva, e varietà affine, allora possiamo applicare il lemma (6.15):

$$\varphi, \psi \text{ morfismi } \Rightarrow x_i \circ \varphi \text{ e } x_i \circ \psi \text{ sono regolari}$$

Inoltre

$$\exists U \subseteq V \text{ aperto tale che } \varphi_{|U} = \psi_{|U} \Rightarrow x_i \circ \varphi_{|U} = x_i \circ \psi_{|U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i \circ \varphi = x_i \circ \psi \text{ in } V \Rightarrow \varphi(P') = \psi(P') \ \forall P' \in V$$

ma è una contraddizione. Dimostriamo più in dettaglio. Possiamo supporre $W = \mathbb{P}^n$, se per assurdo $P' = \varphi(P) \neq \psi(P) = P''$ esiste l'iperpiano $P', P'' \ni H$. Facciamo un cambiamento di coordinate detto omografia:

$$H \equiv H_\infty = Z_P(x_0) \Rightarrow \mathbb{A}^n = U_0 = \mathbb{P}^n - H \text{ e } P', P'' \notin \mathbb{P}^n - H$$

Consideriamo $\varphi^{-1}(\mathbb{A}^n) = U_1$ che è non vuoto perchè c'è P, ed è aperto e $\varphi^{-1}(\mathbb{A}^n) = U_2$, anch'esso non vuoto perchè c'è P. Poniamo $\tilde{U} = U \cap U_1 \cap U_2$ esso è un aperto non vuoto. Dunque

$$\varphi_{|\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to \mathbb{A}^n$$
$$\psi_{|\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to \mathbb{A}^n$$

$\varphi_{|\tilde{U}} = \psi_{|\tilde{U}}$ perché $\tilde{U} \subseteq U$. Sono morfismi dunque si esprimono nel seguente modo:

$$Q \longrightarrow (\varphi_1(Q), \dots, \varphi_n(Q)), \varphi_i \in \mathcal{O}(U_1 \cap U)$$
$$Q \longrightarrow (\psi_1(Q), \dots, \psi_n(Q)), \psi_i \in \mathcal{O}(U_1 \cap U)$$

dove φ_i e ψ_i su $\tilde{U}$ coincidono. Dunque $\varphi_i = \psi_i$, ed esse sono definite ovunque. Allora $\varphi_i = \psi_i$ su $U_1 \cap U_2$ in particolare. Ma $P \in U_1 \cap U_2$ allora ha senso $\varphi_i(P)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Ne segue che

$$P' = \varphi(P) = (\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P)) = (\psi_1(P), \dots, \psi_n(P)) = \psi(P) = P''$$

e segue la contraddizione. $\square$

Esempio 10.19. Siano $Z_1 \subseteq \mathbb{A}^r$ e $Z_2 \subseteq \mathbb{A}^1$ varietà affini, dunque

$$\forall P \in Z_1 \qquad \varphi \colon P' \in Z_1 \to (P', Q) \in Z_1 \times Q$$

$$\forall Q \in Z_2 \qquad \psi \colon Q' \in Z_2 \to (P, Q') \in P \times Z_2$$

sono isomorfismi. Sono morfismi perchè sono regolari, $x_i \circ \varphi$ è una coordinata di P' o di Q'. L'inversa è la proiezione cheè un morfismo perché $x_i \circ \varphi^{-1} \colon (P', Q) \to P' = \underline{x} \to x_i$ regolare.

Esempio 10.20. Siano Z_1 e $Z_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affini, consideriamo:

$$\Delta = \{(P, P) \mid P \in \mathbb{A}^n\} \subseteq \mathbb{A}^{2n}$$

Esso è un sottospazio, perché, considerato

$$\tau\colon \underline{x}\mathbb{A}^n \to (x, \underline{x}) \in \mathbb{A}^{2n}$$

è lineare perchè l'immagine è una $2n-$pla di monomi di primo grado (x_i) e $\tau(\mathbb{A}^n) = \varDelta$. Allora $\varDelta \cap (Z_1 \times Z_2)$ è un chiuso di $Z_1 \times Z_2$, perchè $\varDelta$ è chiuso in $\mathbb{A}^{2n}$ di equazione $x_i = x_{n+i}$ per $i = 1, \dots, n$.Inoltre se consideriamo

$$\alpha\colon P \in Z_1 \cap Z_2 \to (P, P) \in (Z_1 \times Z_2) \cap \varDelta$$

esso è un isomorfismo, perché $x_i \circ \alpha$ è una coordinata di P, regolare, e α^{-1} è proiezione e $x_i \circ \alpha^{-1}$ una coordinata di P, regolare. Quindi α, α^{-1} sono morfismi.

Teorema 10.21. *Se V e W sono varietà affini e $\varphi\colon V \to W$ un morfismo e $\varphi^*\colon A(W) \to A(V)$ un omomorfismo di $k-$algebre. Allora φ è dominante se e solo se φ^* è iniettiva.*

Dim. $\Rightarrow$) Se per assurdo φ^* non è iniettiva allora $Ker\varphi^* \supset \{\underline{0}\}$ allora esiste f regolare non nulla su W, perché $A(W) = \mathcal{O}(W)$

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi = 0 \text{ in } A(V) \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{I}_a(V) \Rightarrow Z_a(f \circ \varphi) \supseteq V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\varphi(V)) = \{0\} \Rightarrow \varphi(V) \subseteq Z_W(f) \Rightarrow \overline{\varphi(V)} \subseteq Z_W(f) \subset W$$

perchè f è non nulla su W, allora $\overline{\varphi(V)} \subset W$, contraddizione perché φ dominante.
$\Leftarrow$) Se per assurdo, invece $\overline{\varphi(V)} \subset W$ si ha che esiste $f \notin \mathcal{I}_a(W)$ tale che $Z_a(f) \supseteq \overline{\varphi(V)}$ ovvero $(f \in \mathcal{I}_a(\overline{\varphi(V)}) - \mathcal{I}_a(W))$ cioè esiste un chiuso proprio di W che contiene $\overline{\varphi(V)}$. Allora $f = 0$ in $\overline{\varphi(V)}$. In particolare

$$f = 0 \text{ in } \varphi(V) \Rightarrow f(\varphi(V)) = \{0\} \Rightarrow f \circ \varphi = 0 \text{ in } A(V) \Rightarrow f \in Ker\varphi^*, f \not\equiv 0$$

contraddizione perchè φ^* è iniettiva. $\square$

Proposizione 10.22. *Ogni aperto U non vuoto di $\mathbb{A}^1$ è affine. Infatti U non è isomorfo ad $\mathbb{A}^1$ ma è omeomorfo ad $\mathbb{A}^1$.*

Dim. Se U è aperto di $\mathbb{A}^1$ vuol dire che U è complementare di un chiuso, ovvero

$$U = \mathbb{A}^1 - \{a_1, \dots, a_n\} = \mathbb{A}^1 - Z_a\left((x_1 - a_1)\dots(x - a_n)\right) \stackrel{def.}{=} \mathbb{A}^1 - Z$$

Ma $f(x) = (x - a_1)\dots(x - a_n)$ è un polinomio non costante, dunque

$$U = \mathbb{A}^1 - Z \simeq Z_a(x_{n+1}f - 1) = Z_a\left(y(x - a_1)\dots(x - a_n) - 1\right) \subseteq \mathbb{A}^2$$

. Inoltre $Z_a(x_{n+1}f - 1)$ è irriducibile. Allora U è isomorfa e una curva irriducibile di $\mathbb{A}^2$ di grado $deg(yf-1) = deg\, f + 1 = n+1$ allora $U \subseteq \mathbb{A}^1$ è un aperto non vuoto e isomorfo a una curva irriducibile di $\mathbb{A}^2$ di grado $n+1$. Si conclude che U è affine, perché tale curva è un chiuso irriducibile di $\mathbb{A}^2$, quindi è una varietà affine. Dimostriamo, ora che $U \not\simeq \mathbb{A}^1$. Se per assurdo $U \simeq \mathbb{A}^1$, questo implica che $\mathcal{O}(U) = A_f^{(1)} \simeq \mathbb{A}^{(1)}$, ma è una contraddizione perchè $\dfrac{1}{f}$ è trascendente su k e invertibile, ma la sua immagine in un eventuale isomorfismo non è invertibile in $A^{(n)}$ perché non è costante. Oppure è possibile seguire la seguente strada: posto $U = \mathbb{A}^1 - \{a_1, \ldots, a_n\}$, si ha

$$\mathcal{O}(U) \subseteq K(\mathbb{A}^1) = k(x_1) = A^{(1)} \Rightarrow \forall f \in \mathcal{O}(U), f = \frac{h(x_1)}{g(x_1)} \text{ con } Z_a(g) \cap U = \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_a(g) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n\, (x_1 - a_i) \in \mathcal{O}(V)$$

ma anche $(x_1 - a_1)^{-1} \in \mathcal{O}(U)$ perchè $Z_a(x_1 - a_1) \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow (x_1 - a_i)$ è invertibile ma non costante in $\mathcal{O}(U)$. Quindi

$$\mathcal{O}(V) \simeq A^{(1)} \Rightarrow U \simeq \mathbb{A}^1$$

U è omeomorfo ad $\mathbb{A}^1$. Infatti $|U| = \left|\mathbb{A}^1\right|$ allora esiste un'applicazione $\alpha\colon U \to \mathbb{A}^1$ biettiva tra curve irriducibili, quindi α è un omeomorfismo. □

Corollario 10.23. *Sia V una varietà affine e W una varietà proiettiva. Allora*

$$V \simeq W \Leftrightarrow V = \{P\}$$

Dim. $\Leftarrow$) Se $V = \{P\}$, V è una varietà affine isomorfa a $W = \{P\}$ varietà proiettiva, se lo consideriamo come punto di $\mathbb{P}^n$.
$\Rightarrow$) Se V è una varietà affine, allora $\mathcal{O}(V) = A(V), V$ come varietà proiettiva, quindi

$$\mathcal{O}(V) = k \Rightarrow A(V) = k \Rightarrow \mathcal{I}_a(V) \text{ massimale } \Rightarrow V \text{ minimale } \Rightarrow V = \{P\}$$

□

Osservazione 39. Se $\varphi\colon V \to W$ morfismo, con V varietà proiettiva, W varietà affine, allora $\varphi = cte$. Infatti, essendo φ un morfismo, significa che, per ogni $i = 1, \ldots, n\, x_i \circ \varphi$ è regolare, appartenente $\mathcal{O}(V) = k$, dunque $x_i \circ \varphi = cte$ per ogni i, cioè $\varphi = cte$.

Osservazione 40.

$$\varphi\colon V \to W \text{ isomorfismo} \Rightarrow \varphi \text{ omeomorfismo} \tag{3}$$

il viceversa e' falso, basta considerare il seguente controesempio:

Esempio 10.24.

$$\varphi\colon t \in \mathbb{A}^1 \to (t, t^3) \in \mathbb{A}^2$$

è un morfismo di $\mathbb{A}^1$ su $V = Z_a({x_1}^3 - x_2^2)$. φ è biettivo su V e φ è un omeomorfismo, ma non è un isomorfismo. Infatti φ corrisponde a $\varphi^*\colon A(V) \to A^{(1)}$, cioè

$$\varphi^*\colon f(x_1, x_2) \in A(V) \to f(x_1^2, x_1^3) \in A^{(1)}$$

perchè

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f(t^2, t^3)$$

φ^* è iniettiva, perchè φ è suriettiva, quindi φ^* è dominante, ma non suriettivo.

11 Applicazioni razionali

Le argomentazioni trattate fino ad adesso hanno evidenziato le caratteristiche dei morfismi, sottolineando le proprietà di isomorfismo tra varietà. Purtroppo la classificazione delle varietà a meno di isomorfismo si rivela troppo difficile e, per rendere il problema più semplificato, conviene introdurre un concetto più debole dell'isomorfismo: equivalenza birazionale.
Siano V e W varietà quasi proiettive e si denoti con

$$\mathcal{K}(V,W) = \left\{ (U,\varphi) : U = \mathring{U} \subseteq V \quad \varphi\colon U \to W \text{ morfismo} \right\}$$

Si definisca in $\mathcal{K}(V,W)$ una relazione $\mathcal{R}$ nel seguente modo:

$$\forall (U,\varphi),(U',\varphi') \in \mathcal{K}(V,W) \qquad (U,\varphi)\,\mathcal{R}\,(U',\varphi') \Leftrightarrow \varphi_{|U\cap U'} = \varphi'_{|U\cap U'}$$

Proposizione 11.1. *$\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.*

Definizione 11.2. La classe di equivalenza $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ della coppia (U,φ) rispetto la relazione $\mathcal{R}$ è chiamata applicazione razionale di V in W. L'elemento

$$\varphi \overset{def}{=} [(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$$

sarà indicato con $\varphi\colon V \dashrightarrow W$ e si dice che φ è definita in U.

Definizione 11.3. L'insieme quoziente

$$K(V,W) = \frac{\mathcal{K}(V,W)}{\mathcal{R}} = \left\{ [(U,\varphi)]_{\mathcal{R}} : U = \mathring{U} \subseteq V \quad \varphi\colon U \to W \text{ morfismo} \right\}$$

prende il nome di insieme delle applicazioni razionali di V in W.

Definizione 11.4. $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V,W)$ è dominante se $\varphi\colon U \to W$ è un morfismo dominante.

La definizione è ben posta; infatti se $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}} = [(U',\varphi')]_{\mathcal{R}}$, allora φ' è dominante, perché

$$\overline{\varphi'(U')} \supseteq \overline{\varphi'(U\cap U')} = \overline{\varphi(U\cap U')} \supseteq \varphi\left(\overline{(U'\cap U)} \cap U\right) = \varphi(U)$$

in quanto $\overline{(U'\cap U)} \cap U$ è la chiusura di $U'\cap U$ fatta in U. Ma $U'\cap U$ è un aperto denso in U allora

$$\overline{(U'\cap U)} \cap U = U \Rightarrow \overline{\varphi'(U')} \supseteq \overline{\varphi(U)} = W \Rightarrow \overline{\varphi'(U')} = W.$$

Proposizione 11.5. *Per ogni $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V,W)$, $\overline{\varphi(U)}$ è una sottovarietà chiusa di W indipendente da (U,φ), in quanto dipende solo da $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$.*

Dim. Abbiamo provato che $\overline{\varphi'(U')} \supseteq \overline{\varphi(U)}$, e analogamente vale l'altra inclusione, quindi $\overline{\varphi'(U')} = \overline{\varphi(U)}$, dunque è indipendente da (U, φ). Inoltre è una sottovarietà perché chiuso di W, ed è irriducibile perché V è irriducibile aperto. $\underline{\varphi(V)}$ è irriducibile, ma φ è suriettiva e continua su $\varphi(U)$, e questo implica $\overline{\varphi(U)}$ irriducibile. $\square$

Osservazione 41. $\overline{\varphi(U)} \stackrel{def}{=} \varphi(V) \stackrel{def}{=} Im\varphi$.

Corollario 11.6. *Ogni* $\varphi\colon V \dashrightarrow W$ *è dominante se e solo se* $\varphi(V) = W$, *cioè l'immagine di un qualunque aperto di* V *in cui* φ *è definita è densa in* W.

Definizione 11.7. Sia V' una sottovarietà di V, allora $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V, W)$ è definita in V' se e solo se esiste $(U', \varphi') \in [(U, \varphi)]_{\mathcal{R}}$ tale che $U' \cap V' \neq \varnothing$

Osservazione 42. Se $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}}$ è definito in V' allora $[(U \cap V', \varphi_{|U \cap V'})]_{\mathcal{R}} \in K(V', W)$ dove $[(U \cap V', \varphi_{|U \cap V'})]_{\mathcal{R}}$ è la restrizione di $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}}$ a V' .

Sia $r_{V'}\colon K(V', V, W) \to K(V', W)$ l'applicazione restrizione così definita:

$$[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}} \longrightarrow [(U \cap V', \varphi_{|U \cap V'})]_{\mathcal{R}}$$

dove $K(V', V, W) = \{[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V, W) : [(U, \varphi)]_{\mathcal{R}} \text{ definite in } V'\}$.

Proposizione 11.8. *Sia* Z *una varietà, e siano* $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V, W), [(U', \psi)]_{\mathcal{R}} \in K(Im\varphi, W, Z)$, *allora* $[(U'', \psi \circ \varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V, Z)$.

Dim. Siccome per ipotesi $[(U', \psi)]_{\mathcal{R}} \in K(Im\varphi, W, Z)$, allora

$$[(U', \psi)]_{\mathcal{R}} \in K(W, Z) \quad [(U', \psi)]_{\mathcal{R}} \text{ definito in } Im\varphi$$

ovvero $Im\varphi \cap U' \neq \varnothing$. Per l'osservazione (41) si ha

$$Im\varphi \cap U' = \overline{\varphi(U)} \cap U' \neq \varnothing$$

Allora $\varphi(U) \cap U' \neq \varnothing$, poiché se per assurdo fosse vuoto, si avrebbe:

$$\varphi(U) \subseteq W - U' \Rightarrow \overline{\varphi(U)} \subseteq W - U' \Rightarrow \overline{\varphi(U)} \cap U' = \varnothing$$

sapendo che $W - U'$ è un chiuso. Si consideri $U'' = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap U')$, risulta che $U'' \subseteq U$ è un aperto non vuoto, su cui ha senso considerare il morfismo $\psi \circ \varphi$. Infatti

$$\varphi\colon U \to \varphi(U) \quad \psi : \varphi(U) \cap U' \to Z$$

restringendo φ a $\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap U') \supseteq U \cap \varphi^{-1}(U')$, si ottiene

$$U'' \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \cap U' \xrightarrow{\psi} Z.$$

Dunque ha senso considerare $[(U'', \psi \circ \varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V, Z)$. $\square$

Definizione 11.9. $[(U'', \psi \circ \varphi)]_{\mathcal{R}}$ è chiamata applicazione razionale composta di $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}}$ e $[(U', \psi)]_{\mathcal{R}}$.

Proposizione 11.10. *La composizione di due applicazioni razionali dominanti è ancora un applicazione razionale dominante.*

Dim. Essendo $\varphi \colon U \to W$ un morfismo dominante, allora

$$Im\varphi = W \Rightarrow K(W, Z) = K(Im\varphi, W, Z)$$

Quindi ogni elemento $[(U', \psi)]_{\mathcal{R}} \in K(W, Z)$ si può comporre con ogni elemento $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V, W)$. $\square$

Definizione 11.11. Un'applicazione birazionale è un'applicazione razionale dominante $\varphi \colon V \twoheadrightarrow W$tale che esiste $\psi \colon W \twoheadrightarrow V$ dominante per cui

$$\varphi \circ \psi = id_W, \qquad \psi \circ \varphi = id_V.$$

Siano $V' \leq V$, $W' \leq W$ varietà quasi proiettive. Sia $\varphi^* \colon \mathcal{O}_{W,W'} \to \mathcal{O}_{V,V'}$ un'applicazione, così definita:

$$f \to f \circ \varphi.$$

Proposizione 11.12. *φ^* è un omomorfismo di K-algebre.*

Osservazione 43. Se $V = W$, $V' = W'$ e $\varphi = id_V$ allora $\varphi^* = id_{\mathcal{O}_{W,W'}}$. Infatti:

$$\varphi = id_V \colon V \to V, \qquad \varphi^* = id_{\mathcal{O}_{W,W'}} \colon \mathcal{O}_{W,W'} \to \mathcal{O}_{W,W'}$$

così definite:

$$f \to f \circ i\,d_W = f$$

Proposizione 11.13. *Siano V, W, Z varietà quasi proiettive, con $V' \leq V, W' \leq W, Z' \leq Z$ sottovarietà. Dato $\psi \colon W \dashrightarrow Z$, se esiste $\psi^* \colon \mathcal{O}_{Z,Z'} \to \mathcal{O}_{W,W'}$ allora $\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*$.*

Teorema 11.14. *Se $V = V', W = W'$ $\varphi \colon V \twoheadrightarrow W$ è dominante, allora $\varphi^* \colon K(W) \hookrightarrow K(V)$ è un'immersione.*

Dim. Se $V = V', W = W'$ allora

$$\varphi(V') \supseteq W' \Leftrightarrow \varphi(V) \supseteq W$$

e allora φ è dominante e dunque possiamo comporre e considerare:

$$\varphi^* \colon \mathcal{O}_{W,W'} \to \mathcal{O}_{V,V'}$$

che è un k-omomorfismo di campi. Non può essere nullo perché porta costanti in costanti essendo anche un omomorfismo di k- algebre, e, sapendo inoltre che $\mathcal{O}_{W,W'} = K(W)$ e $\mathcal{O}_{V,V'} = K(V)$, quindi $\varphi^* \colon K(W) \hookrightarrow K(V)$ è un immersione. $\square$

Corollario 11.15. *Se* $\varphi\colon V \to W$ *è un isomorfismo birazionale allora l'applicazione* $\varphi^*\colon K(W) \to K(V)$ *è un isomorfismo di campo.*

Teorema 11.16. *Siano* $V' \leq V$ *e* $W' \leq W$. *Sia* $\varphi : V \to W$ *un'applicazione birazionale e si consideri* $\varphi_{|V'} : V' \to W'$, *un'applicazione dominante. Allora*

$$\varphi^*(\underline{m}_{W,W'}) \subseteq \underline{m}_{V,V'}$$

Dim. Possiamo ridurci al caso in cui V e W sono varietà affini e poiché $V' \leq V, W' \leq W$ allora anche per V' e W' possiamo ricondurci a varietà affini. Poiché $\varphi : V \to W$ è un applicazione birazionale, individuata dalla classe $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ con $U \subseteq V$ aperto affine, in particolare $\varphi : U \to W$ è un morfismo. Possiamo sostituire V a U e ottenere $\varphi : V \to W$ un morfismo tra varietà affini. Ad esso è associata l'applicazione $\varphi^*\colon A(W) \to A(V)$. Anche $\varphi_{|V'} : V' \to W'$ è un morfismo a cui è possibile associare l'applicazione dominante $\varphi^*_{|V'} : A(W') \to A(V')$. Siano considerati i rispettivi epimorfismo canonici:

$$\pi_1 : A(W) \to A(W'), \qquad \pi_2 : A(V) \to A(V')$$

così definiti:

$$f + I_a(W) \to f + I_a(W'), \qquad f + I_a(V) \to f + I_a(V').$$

Si noti che:

$$ker\pi_1 = \{f + I_a(W) : f \in I_a(W')\} = \frac{I_a(W')}{I_a(W)} = I_W(W')$$

$$ker\pi_2 = \{f + I_a(V) : f \in I_a(V')\} = \frac{I_a(V')}{I_a(V)} = I_V(V').$$

Per il teorema di omomorfismo, ed essendo $\varphi^*_{|V'}$ dominante, si ha dunque:

$$A(W') = \frac{A(W)}{I_W(W')} \qquad A(V') = \frac{A(V)}{I_V(V')}.$$

Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A(W) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A(V) \arrow[d, "\pi_2"] \\ A(W') \arrow[r, "\varphi^*_{|V'}"'] & A(V') \end{tikzcd}$$

ovvero:

$$\begin{tikzcd} f + I_a(W) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\pi_1"'] & f' + I_a(V) \arrow[d, "\pi_2"] \\ f + I_a(W') \arrow[r, "\varphi^*_{|V'}"'] & f' + I_a(V') \end{tikzcd}$$

ciò significa che: $\pi_2(\varphi^*(f + I_a(W))) = \varphi^*_{|V'}(\pi_1(f + I_a(W)))$.
Se $f \in I_W(W')$, segue che:

$$0 = \pi_1(f + I_a(W)) \Rightarrow 0 = \varphi^*_{|V'}(\pi_1(f + I_a(W)) = \pi_2(\varphi^*(f + I_a(W))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^*(f + I_a(W)) \in I_V(V') \Rightarrow \varphi^*(I_W(W')) \subseteq I_V(V').$$

Trattandosi di varietà affini:

$$\mathcal{O}_{W,W'} = A(W)_{I_W(W')} \text{ e } \mathcal{O}_{V,V'} = A(V)_{I_V(V')}$$

Quindi $\varphi^* \colon \mathcal{O}_{W,W'} \to \mathcal{O}_{V,V'}$ diventa $\varphi^* \colon A(W)_{I_W(W')} \to A(V)_{I_V(V')}$ che è l'omomorfismo indotto da $\varphi^* \colon A(W) \to A(V)$. Allora, essendo

$$\mathfrak{m}_{W,W'} = I_W(W')A(W)_{I_W(W')} \text{ e } \mathfrak{m}_{V,V'} = I_V(V')A(V)_{I_V(V')} \qquad (1)$$

si ha $\varphi^*(\mathfrak{m}_{W,W'}) \subseteq \mathfrak{m}_{V,V'}$. $\square$

Teorema 11.17. *Siano V, W varietà, V', W' sottovarietà di V, W rispettivamente e sia dato un omomorfismo di k-algebre:*

$$\alpha \colon \mathcal{O}_{W,W'} \to \mathcal{O}_{V,V'}$$

tale che

$$\alpha(\mathfrak{m}_{W,W'}) \subseteq \mathfrak{m}_{V,V'}$$

Esiste allora un'unica applicazione razionale $\varphi \colon V \dashrightarrow W$ definita su V' per cui $\varphi_{|V'} : V' \to W$ è un applicazione razionale dominante, tale che $\alpha = \varphi^*$. Inoltre α è iniettiva se e solo se φ è dominante.

Dim. Sia U' un qualsiasi aperto affine di W tale che $U' \cap W' \neq \varnothing$. Allora

$$\mathcal{O}(U') \subseteq \mathcal{O}_{W,W'} \text{ e } \mathcal{O}(U') = A(U')$$

è finitamente generato su k come $k-$ algebra. Siano $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ alcuni suoi generatori, allora

$$\zeta_i \in \mathcal{O}_{W,W'}, i = 1, \dots, n \Rightarrow \alpha(\zeta_i) \in \mathcal{O}_{V,V'}, i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \alpha(\zeta_1) = [(U_i, \eta_i)]_{\mathcal{R}} = \eta_i, i = 1, \dots, n$$

con $U_i \subseteq V$ aperto e tale che $U_i \cap V' \neq \varnothing$ e $\eta_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Consideriamo $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \neq \varnothing$, perché gli U_i sono aperti densi in quanto V è irriducibile, per la stessa ragione $U \cap V' \neq \varnothing$, inoltre $U \cap V' \subseteq U_i \cap V'$ aperto e $U_i \cap V' \subseteq V'$ irriducibile, allora $U_i \cap V'$ è irriducibile. Possiamo supporre U affine, altrimenti lo sostituiamo con l'aperto affine che interseca V' ed è contenuto in U.
Possiamo definire α' mediante la sua azione sui generatori di $\mathcal{O}(U')$ tale che $\alpha'(\zeta_i) = \eta_i, \forall\, i = 1, \dots, n$.
Abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U') & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{O}(V) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathcal{O}_{W,W'} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_{V,V'} \end{array}$$

perciò α induce α', che è una restrizione di α a $\mathcal{O}(U')$.
α' è un omomorfismo di k-algebre, ma poiché c'è un'applicazione biettiva tra $M(V,W)$ e $\mathrm{Hom}(A(W),A(V))$, dare α equivale a dare un morfismo

$$\varphi\colon U \to U' \text{ tale che } \alpha' = \varphi^*$$

Consideriamo $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}} \in K(V,W)$ e dimostriamo che è l'unica $\varphi\colon V \dashrightarrow W$ cercata, cioè $U \cap V' \neq \varnothing$ allora $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ è definita in V', perché $\mathcal{O}_{V,V'} = \mathcal{O}_{V,\overline{V'}}$, e se il teorema vale per $\varphi\colon \overline{V'} \twoheadrightarrow \overline{W'}$ vale a maggior ragione per $V' \dashrightarrow W'$. Chiamiamo

$$V'_1 = U \cap V' \qquad W'_1 = U' \cap W'$$

possiamo supporre V', W' chiusi in V e W allora V'_1 e W'_1 sono chiusi in U e U' e dunque sono sottovarietà affini di U e U' rispettivamente e sono irriducibili perché aperti di V e W' irriducibili.
Si nota che α proviene per estensione da α' anche da questo fatto:

$$\mathcal{O}_{W,W'} \backsimeq \mathcal{O}_{U',\overline{W' \cap U'}} \backsimeq A(U')_{I_{U'}(\overline{W'\cap U'})};$$

$$\mathcal{O}_{V,V'} \backsimeq \mathcal{O}_{U,\overline{V'\cap U}} = A(U)_{I_U(\overline{V'\cap U})}$$

allora α proviene per estensione da

$$A(U') \overset{\alpha}{\to} A(U)$$

Dimostriamo che $\varphi_{|V'}, \colon V' \to W'$ è dominante su W', cioè che $I_m\varphi(V') = W'$.
Consideriamo

$$I_{U'}(W'_1) = \mathcal{O}(U') \cap \mathfrak{m}_{W,W'} = \{f \text{ regolari su } U \text{ e nulle su } W'_1\}$$

$I_U(V'_1) = \mathcal{O}(U) \cap \mathfrak{m}_{V,V'}$, ma per ipotesi $\alpha(\mathfrak{m}_{W,W'}) \subseteq \mathfrak{m}_{V,V'}$, dunque

$$\alpha(I_{U'}(W'_1)) \subseteq I_U(V'_1)$$

Inoltre $W_1^{'} = \bigcap Z_{U'}(f)$. Si prova che $\varphi(V_1^{'}) \subseteq W'_1$

$$P \in V_1^{'} \Rightarrow \forall\, f \in I_U(V'_1), f(P) = 0$$

ma $\alpha' = \varphi^*$ e per ogni $g \in I_{U'}(W'_1)$ e $\alpha'(g) \in I_U(V'_1)$, dunque

$$\alpha'(g) = \varphi^*(g) = g \circ \varphi \in I_V(V_1^{'}) \Rightarrow g\,(\varphi(P)) = 0$$

Inoltre

$$\varphi(P) \in W_1^{'} \Leftrightarrow \varphi(P) \in \bigcap Z_{U'}(g) \Leftrightarrow \forall g \in I_{U'}(W_1^{'}), g\,(\varphi(P)) = 0 \Leftrightarrow g \in I_{U'}(W_1^{'})$$

Dimostriamo che vale anche l'altra inclusione, cioè che $\varphi_{|V'} \colon V_1^{'} \to W_1^{'}$ è dominante e perché $W_1^{'}$ è chiuso, allora $\varphi(V_1^{'}) = W_1^{'}$.
$\varphi_{|V'} \colon V_1^{'} \to W_1^{'}$ morfismo in quanto restrizione di $\varphi \colon U \to U'$ morfismo, induce

$$\varphi^* \colon \mathcal{O}(W'_1) \to \mathcal{O}(V'_1)$$

omomorfismo di k-algebre.
D'altra parte l'applicazione α dell'ipotesi induce $\overline{\alpha}$ omomorfismo tra campi

$$\begin{array}{ccc} \overline{\alpha}\colon \frac{\mathcal{O}_{W,W'}}{\mathfrak{m}_{W,W'}} & \longrightarrow & \frac{\mathcal{O}_{V,V'}}{\mathfrak{m}_{V,V'}} \\ \wr\!\| & & \wr\!\| \\ K(W') & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & K(V') \end{array}$$

$\overline{\alpha}$ è un omomorfismo di campi non nullo, quindi $\overline{\alpha}$ è iniettivo. $\overline{\alpha}$ è il prolungamento di $\varphi^* \colon \mathcal{O}(W_1^{'}) \to \mathcal{O}(V_1^{'})$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathcal{O}_{W,W'}}{\mathfrak{m}_{W,W'}} & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \frac{\mathcal{O}_{V,V'}}{\mathfrak{m}_{V,V'}} \\ {\scriptstyle r}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r} \\ K(W') & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & K(V') \end{array}$$

che, considerando che $\overline{\alpha}$ è indotta da α sul quoziente, agiscono in questo modo:

$$\begin{array}{ccc} [(U',f)]_{\mathcal{R}} + \mathfrak{m}_{W,W'} & \longrightarrow & \alpha([(U',f)]_{\mathcal{R}}) + \mathfrak{m}_{V,V'} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ [(U' \cap W', f_{|U'\cap W'})]_{\mathcal{R}} & \longrightarrow & [(\varphi^{-1}_{|V_1'}(W_1^{'}), f \circ \varphi_{|V_1'})]_{\mathcal{R}} \\ \|(*) & & \| \\ [(W_1^{'}, f_{|W_1'})]_{\mathcal{R}} & & [(V_1^{'}, f_{|W_1} \circ \varphi_{|V_1'})]_{\mathcal{R}} = [(U_1^{'}, \varphi^*(f))]_{\mathcal{R}} \end{array}$$

vale l'uguaglianza (*) perché $\varphi(V'_1) \subseteq W_1^{'}$, allora basta considerare $f\,|_{W'_1}$
Perché abbiamo

$$\varphi^* \colon \mathcal{O}(W'_1) \to \mathcal{O}(V_1^{'}) \qquad f \to f \circ \varphi_{|V'} = f_{|W_1'} \circ \varphi_{|W_1'}$$

così definite, allora vale la seconda uguaglianza.

$$\forall\, f \in \mathcal{O}(W'_1) \Rightarrow \exists\, I' \subseteq W'_1 \text{ aperto passante per } P \text{ in cui } f = \frac{g}{h}$$

ma $W'_1 = W' \cap U'$ aperto in W' allora I' aperto in W' e dunque

$$f \in \mathcal{O}(W') \subseteq K(W')$$

Quindi $\overline{\alpha}(f) = \varphi^*(f)$ per quanto dimostrato, e $\overline{\alpha}_{|\mathcal{O}(W'_1)} = \varphi^*$. $\overline{\alpha}$ iniettivo e prolungamento di φ^∞, allora

$$\varphi^* \colon \mathcal{O}(W'_1) \to \mathcal{O}(V'_1) \text{ è iniettivo } \Rightarrow \varphi_{|V'_1} \colon V_1^{'} \to W_1^{'} \text{ è dominante.}$$

Poichè $\overline{V_1} = V'$ segue $\varphi(V') = \varphi(\overline{V_1'}) \subseteq \overline{\varphi(V_1')}$ perché f continua, allora

$$\overline{\varphi(V')} = \overline{W_1'} = W' \Rightarrow \varphi_{|V'} \text{ dominante.}$$

Dimostriamo che $\alpha = \varphi^*$. $\alpha' = \varphi^* \colon \mathcal{O}(U') \to \mathcal{O}(V)$ corrisponde a $\varphi \colon U \to U'$. D'altra parte α è l'unica applicazione che prolunga α', perché

$$\alpha \colon \mathcal{O}_{W,W'} \to \mathcal{O}_{V,V'}$$

anelli locali e dunque l'estensione è unica.
Inoltre $\varphi^* \colon\ (\mathcal{O}_{U'}) \to (\mathcal{O}_U)$ ha un unico prolungamento in

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* \colon \mathcal{O}_{U',W'_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{U,V'_1} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathcal{O}_{W,W'} & & \mathcal{O}_{V,V'} \end{array}$$

Quindi $\begin{array}{ccc} \alpha' & = & \varphi^* \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \alpha & & \varphi^* \end{array}$ per cui $\alpha = \varphi^*$

φ è unico, perché se esistesse $\varphi' \colon V \dashrightarrow W$ tale che $\alpha = (\varphi')^*$, ripetendo il ragionamento, avremmo

$$\varphi^* = \alpha' = (\varphi')^* \Rightarrow \varphi = \varphi' \text{ su } U \Rightarrow \varphi = \varphi'$$

Rimane da dimostrare che

$$\alpha \text{ è iniettivo } \Leftrightarrow \varphi \text{ è dominante.}$$

Sappiamo che φ è dominante come applicazione razionale se e solo se per definizione $\varphi \colon U \to U'$ è dominante come morfismo, perché $\varphi = [(U, \varphi)]_{\mathcal{R}}$, quindi

$$\alpha' \colon \mathcal{O}(U') \to \mathcal{O}(U) \text{ iniettivo } \Leftrightarrow \alpha \text{ iniettivo}$$

perché α' è definito univocamente a partire da α. $\square$

Corollario 11.18. *Siamo V, V', W, W' come nell'enunciato del teorema precedente. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:*

a) esiste un'applicazione birazionale $\varphi \colon V \dashrightarrow W$ definita su V', tale che $\varphi_{|V'}$ induce una trasformazione birazionale di V' su W' ;

b) $\mathcal{O}_{V,V'}$ *e* $\mathcal{O}_{W,W'}$ *sono* $k-$*isomorfi come* $k-$*algebre;*

c) esistono un aperto non vuoto U *di* V *tale che* $U \cap V' \neq \varnothing$*, un aperto non vuoto* U' *di* W *tale che* $U' \cap W' \neq \varnothing$*, un isomorfismo* $\varphi\colon U \to U'$ *tale che* $\varphi\left(U \cap \overline{V'}\right) = U' \cap \overline{W'}$*.*

Dim. a) $\Rightarrow$ b) Consideriamo il fatto che se $V \backsimeq W$ è un isomorfismo birazionale, allora localmente sono isomorfe cioè

$$U \backsimeq U' \not\Rightarrow V \backsimeq W'$$

isomorfi globalmente nel senso di morfismo. Invece se sono isomorfi allora sono birazionalmente isomorfi perché $M(V,W) \subseteq K(V,W)$. In questo caso $V \simeq W$ birazionalmente isomorfi, dunque $V \supseteq U \simeq U' \subseteq W$, sono isomorfe, quindi $\mathcal{O}_{U',U'} \cap W' \simeq \mathcal{O}_{U,U\cap V'}$ come k-algebre, cioè $\mathcal{O}_{W,W'} \simeq \mathcal{O}_{V,V'}$ come k-algebre.
b) $\Rightarrow$ a) $\mathcal{O}_{W,W'} \overset{\alpha}{\simeq} \mathcal{O}_{V,V'}$, per il teorema precedente applicato ad α e α' e segue la a)
c) $\Rightarrow$ a) U è un aperto di V isomorfo nel senso di morfismo a U' aperto di W, allora $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ e $U \overset{\varphi}{\to} U'$ è un'applicazione razionale dominante perché è suriettivo, definito in V', in quanto $U \cap V' \neq \varnothing$, tale che $[(U',\varphi^{-1})]_{\mathcal{R}}$ e $\varphi^{-1}\colon U' \to U$ è ancora un'applicazione razionale dominante , definito in W', in quanto $U \cap V' \neq \varnothing$, con $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_U$ e $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{U'}$. Quindi (U,φ) individua un'applicazione birazionale $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ di $V \overset{m}{\to} W$, che individua un'applicazione birazionale di $V' \overset{m}{\to} W'$.
L'applicazione è

$$[(U \cap V', \varphi_{|U\cap V'})]_{\mathcal{R}}$$

Infatti $Im\varphi = \overline{\varphi(U \cap V')}$ e φ è un omeomorfismo

$$\varphi(\overline{U \cap V'}) = \overline{U' \cap W'} = W'$$

Dunque è dominante, e l'inversa $[(U' \cap W', \varphi^{-1}_{|U'\cap W'})]_{\mathcal{R}}$ è a sua volta dominante, procedendo in maniera analoga.
a) $\Rightarrow$ c) Sia $V \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} W$ un'applicazione birazionale, $\varphi = [(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ con $U \cap V' \neq \varnothing$ perché definito in V'. Sia

$$\psi = [(U',\psi)]_{\mathcal{R}}$$

con $U' \cap W' \neq \varnothing$ perché ψ induce un'applicazione birazionale in $W' \to V'$.
Per ipotesi poi

$$\varphi \circ \psi = id_W \qquad \psi \circ \varphi = id_V$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & & \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}} \\ & & U' \xrightarrow{\psi} V \end{array}$$

L'applicazione composta $\psi \circ \varphi$ può essere considerata in $\varphi^{-1}(U') \cap U$ e l'applicazione $\varphi \circ \psi$ in $\psi^{-1}(U) \cap U'$, per l' entrambe sono le identità nei rispettivi insiemi di definizione

$$\big[(\varphi^{-1}(U')\cap U, \psi\,\circ\,\varphi)\big]_{\mathcal{R}} = \psi\circ\varphi = id_{\varphi^{-1}(U')\cap U}$$
$$\big[(\psi^{-1}(U)\cap U', \varphi\,\circ\,\psi)\big]_{\mathcal{R}} = \varphi\,\circ\,\psi = id_{\psi^{-1}(U)\cap U'}$$

Poniamo:
$$U_\circ = \varphi^{-1}\left(\psi^{-1}(U)\cap U'\right)$$
$$U'_\circ = \psi^{-1}\left(\varphi^{-1}(U')\cap U\right)$$

e dimostriamo che $U_\circ$ e $U'_\circ$ sono gli aperti cercati. Prima di tutto si ha $U_\circ \cap U' \neq \varnothing$ perché $U' \subseteq W'$ aperto;

$$\psi^{-1}(U) \subseteq W' \text{ aperto } \Rightarrow U'\cap\psi^{-1}(U)\neq\varnothing$$

perché intersezione di aperti densi, dunque $\varphi^{-1}\left(U'\cap\psi^{-1}(U)\right) = U_\circ$ è aperto denso di V'. Analogamente per $W'\cap U'_\circ \neq \varnothing$. Si ha che $\varphi\colon U_\circ \to U'_\circ$ è un isomorfismo, e per ciò, basta dimostrare che

$$\varphi(U_\circ)\subseteq U'_\circ \qquad \psi(U'_\circ)\subseteq U_\circ \qquad \varphi\circ\psi = id_{U'_\circ} \qquad \psi\circ\varphi = id_{U_\circ}$$

tenuto presente che:

$$\varphi(U_\circ) = \varphi\Big(\varphi^{-1}\big(\psi^{-1}(U)\cap U'\big)\Big)\subseteq \psi^{-1}(U)\cap U' \subseteq U'_\circ = \psi^{-1}\big(\varphi^{-1}(U')\cap U\big)$$

dimostrare l'inclusione è lo stesso che dimostrare che

$$\psi\big(\psi^{-1}(U)\cap U'\big)\subseteq\varphi^{-1}(U')\cap U$$

Ma $U\cap\psi(U')\supseteq\psi\big(\psi^{-1}(U)\cap U'\big)$, quindi basta dimostrare che $U\cap\psi(U')\subseteq \varphi^{-1}(U')\cap U$. Allora

$$\forall\, P\in U\cap\psi(U') \Rightarrow P\in U \text{ e } P\in\psi(U')\Rightarrow \exists\, Q\in U' \text{ tale che } \psi(Q)=P\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(P)=\varphi\big(\psi(Q)\big)=Q\in U'\Rightarrow\varphi(P)\in U'\Rightarrow P\in\varphi^{-1}(U'), P\in U\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\in\varphi^{-1}(U')\cap U\Rightarrow\varphi(U_\circ)\subseteq U'_\circ$$

Analogamente $\psi(U'_\circ)\subseteq U_\circ$. Quindi $U_\circ \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} U'_\circ$, segue

$$\varphi\circ\psi = id_{U'_\circ} \qquad \psi_\circ\varphi = id_{U_\circ}$$

dunque φ è un isomorfismo.
Concludiamo che $\varphi(U_\circ\cap\overline{V'}) = U'_\circ\cap\overline{W'}$. Infatti

$$P\in U_\circ\cap\overline{V'}\Rightarrow P\in U_\circ, P\in\overline{V'}\Rightarrow\varphi(P)\in\varphi(U_\circ)={U'}_\circ, \varphi(P)\in\varphi(\overline{V'})$$

ma
$$\varphi(\overline{V'}) \underset{\varphi\,\text{continua}}{\subseteq} \overline{\varphi(V')} = W' = \overline{W'}$$

perché W' è chiuso, in quanto φ è dominante tra V' e W' perché è birazionale. Quindi $\varphi(P)\in {U'}_\circ\cap\overline{W'}$ e vale la prima inclusione. Con gli stessi passaggi si prova l'altra inclusione. $\square$

Lemma 11.19. *Un campo K è campo delle funzioni razionali di una varietà V se e soltanto se $K \supseteq k$ è un'estensione finita di k.*

Dim. Sia $K = K(V)$. Possiamo assumere V affine, altrimenti sostituiamo con un aperto affine, perché $K(V) = K(U)$, quindi $K = \mathbb{Q}(\frac{A}{V})$. D'altra parte $A(V)$ è finitamente generata e allora

$$A(V) = k\left[\zeta_1, \ldots, \zeta_n\right] \Rightarrow K = k\left(\zeta_1, \ldots, \zeta_n\right)$$

è estensione finita di k.
Viceversa $K = k\left(\zeta_1, \ldots, \zeta_n\right)$. Poniamo $A = K\left[\zeta_1, \ldots, \zeta_n\right]$ allora $\mathbb{Q}(A) = k$. A è $k-$ algebra finitamente generata dunque esisterà V varietà affine tale che

$$A(V) = A \Rightarrow K(V) = \mathbb{Q}\big(A(V)\big) = \mathbb{Q}(A) = k \Rightarrow K = K(V)$$

Applicando l'altra proprietà a $V = V'$ e $W = W'$ si ha:

$$\mathcal{O}_{W,W} = K(W) \qquad \mathcal{O}_{V,V} = K(V)$$

dunque

$$\alpha\colon K(W) \to K(V)$$

omomorfismo di campi ed

$$\exists \varphi\colon V \twoheadrightarrow W \text{ dominante tale che } \varphi^* = \alpha$$

φ è dominante perché α è iniettiva. Quindi per ogni omomorfismo α di campi, estensione finite di k, esiste $\varphi\colon V \twoheadrightarrow W$ dominante tale che $\alpha = \varphi^*$. Quindi $\alpha\colon K(W) \hookrightarrow K(V)$ monomorfismo (immersione) allora esiste ed è unica $\varphi\colon V \twoheadrightarrow W$ dominante tale che $\alpha = \varphi^*$. $\square$

Teorema 11.20. *La legge che ad ogni varietà V associa il campo $K(V)$ e che ad ogni applicazione razionale dominante $\varphi \in K(V, W)$ associa l'omomorfismo di k-algebre $\varphi^*\colon K(W) \to K(V)$, è un funtore controvariante, che è un'equivalenza categorica tra la categoria delle varietà e quella dei campi che sono estensioni finitamente generate di k.*

Se si persegue la classificazione delle varietà a meno di applicazioni birazionali, basta classificare le ipersuperficie irriducibili. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 11.21. *Ogni varietà quasi proiettiva di dimensione n è birazionalmente equivalente ad un'ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{A}^{n+1}$ o di $\mathbb{P}^{n+1}$.*

Dim. Possiamo ridurci al caso affine perché ogni varietà è birazionale a un suo aperto non vuoto. Se considero, infatti, $U \subseteq V$ aperto non vuoto, esiste un immersione

$$U \overset{i}{\hookrightarrow} V$$

che è un morfismo dominante ed esiste l'applicazione identica

$$U \subseteq V \overset{id}{\to} U$$

che è un morfismo dominante il quale individua $[(U,\varphi)]_{\mathcal{R}}$ razionale dominante, inversa della precedente.
Dimostriamo che V è birazionale a una ipersuperficie affine. Sia $V \subseteq \mathbb{A}^r$dunque $A(V)$ è generato su k da

$$x_i = x_i + I_a(V),\ \text{per } i = 1,\dots,r$$

e dunque

$$K(V) = \mathbb{Q}\big(A(V)\big) = K\big(x_1,\dots,x_r\big)$$

finitamente generato su K.
Da $\big\{x_1,\cdots x_r\big\}$ sistema di generatori possiamo estrarre un sistema massimo di generatori algebricamente indipendenti su k. A meno di un cambiamento di variabili possiamo supporre che lo siano $x_1,\dots,x_n$ $(dimV = n)$ allora $k(x_1,\dots,x_n) \subseteq K(V)$ che ne è un'estensione algebrica.
Ogni $y \in K(V)$ dipende algebricamente da $x_1,\dots,x_n$ e allora

$$\exists\, f\big(t_{1,\dots},t_{n+1}\big) \in K\big[t_1,\dots,t_{n+1}\big]-\{\underline{0}\} \text{ irriducibile su } k \text{ tale che } f\big(x_1,\dots,x_n,y\big) = 0$$

Sia $y = x_{n+1}$ e dimostriamo che per il corrispondente polinomio f esista $i = 1,\dots,n+1$ tale che $\frac{\delta f}{\delta t_i} \neq 0$. Se per assurdo

$$\frac{\delta f}{\delta t_i} = 0, \forall\, i = 1,\dots,n+1$$

allora $f\big(t_1,\dots,t_{n+1}\big) = \sum a_{i_1\,\dots\,i_{n+1}} t_1^{p_{i_1}} \dots t_{n+1}^{p_{i_{n+1}}}$, con $p = chark$, perché $\frac{\delta f}{\delta t} = \sum a_{i_1,\dots,i_{n+1}} t_1^{p_{i_1}} \dots t_{J-1}^{p_{i\,J-1}}$ e perché $p = chark$.
Posto $a_{i_1\,\dots\,i_{n+1}} = b^p_{i_1\,\dots\,i_{n+1}}$ dunque $f = g^p$, che è una contraddizione perché f è irriducibile. Dovrà esistere i tale che $\frac{\delta f}{\delta t_i} \neq 0$ e allora $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1}$ sono algebricamente indipendenti su K.
Infatti se per assurdo non lo fossero , poiché x_i dipende algebricamente da $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1}$, perché $\frac{\delta f}{\delta t_i} \neq 0$, il grado di trascendenza di $K(V)$ su k sarebbe minore di n perché $dimV = n$.
Possiamo supporre perciò $\frac{\delta f}{\delta t_{n+1}} \neq 0$ cioè $i = n+1$. Poichè f è irriducibile, ed è il polinomio minimo di x_{n+1} allora x_{n+1} è separabile su $k\big(x_1,\cdots,x_n\big)$. Ma x_{n+2} è algebrico su $k\big(x_1,\cdots,x_n\big)$ e per il teorema dell'elemento primitivo: esisterà

$$y \in k\big(x_1,\dots x_{n+2}\big) \subseteq K(V)$$

Reiterando: x_{n+3} è separabile e y è algebrico e allora $z \in K\big(x_1,\dots,x_{n+3}\big)$ tale che

$$K(x_1,\dots,x_{n+2}) = K(x_1,\dots,y) \qquad K\big(x_1,\dots,x_{n+3}\big) = K\big(x_1,\dots,x_n,z\big)$$

e così via si ha:

$$K(V) \simeq K\big(z_1, \cdots z_n, z_{n+1}\big)$$

con $z_1, \cdots z_n$ algebricamente indipendenti su k

$$\exists\, f \in K\big[t_1, \dots, t_{n+1}\big] \text{ polinomio irriducibile con } \frac{\delta f}{\delta t_{n+1}} \neq 0$$

tale che $f\big(z_1, \dots, z_{n+1}\big) = 0$ perché z_{n+1} algebrico su $k\big(z_1, \dots, z_n\big)$.
Consideriamo l'ipersuperficie irriducibile $W = Z_a(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ affine allora

$$K(W) = \mathbb{Q}\big(A(W)\big) = Q\big([z_1, \dots, z_{n+1}] \mid (f)\big) = k\big(z_1, \dots, z_{n+1}\big)$$

$$\Rightarrow K(W) = k\big(z_1, \dots, z_{n+1}\big) \simeq K(V) \Rightarrow K(W) \simeq K(V)$$

da $b) \Rightarrow a)$ segue che V e W sono birazionalmente equivalenti.
Costruiamo esplicitamente l'isomorfismo.

$$z_J = \sum_{i=1}^{r} c_{i_J} x_i \text{ con } c_{i_J} \in k$$

$$A^{n+1} = k\big[z_1, \dots z_{n+1}\big] \to k\big[x_1, \dots, x_r\big] = A^{(r)}$$

φ^* omomorfismo di k-algebre che induce un isomorfismo tra $K(W)$ e $K(V)$.

$$\begin{tikzcd}
z_J \arrow[r] \arrow[d] & \sum_{i=1}^{r} c_{i_J} x_i \arrow[d] \\
A(W) \arrow[r, "\varphi^*"] & A(V)
\end{tikzcd}$$

$$z_J \longrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{r} c_{i_J} x_i$$

L'isomorfismo birazionale è quello indotto da φ^*, cioè $\varphi\colon V \to W\varphi^*$ corrisponde, inoltre, a una trasformazione lineare:

$$\mathbb{A}^r \to Z_a\big(x_{n+2}, \dots x_r\big) \underset{\text{sottospazio}}{\leq} A^{(r)}$$

che è, a meno di cambiamento di coordinate, una proiezione. L'isomorfismo birazionale $V \to W$ è la restrizione a V di una proiezione. $\square$

12 Omografie generalizzate

Sia A una matrice non nulla di tipo $(n+1) \times (m+1)$ su K tale che il suo rango risulta $\rho(A) = r$ con $0 < r \leq n+1$. Si definisca il seguente insieme:

$$\mathbb{P}_A \overset{def}{=} \{[\underline{x}] \in \mathbb{P}^n_k : \underline{x}A = \underline{0}\}.$$

Proposizione 12.1. *$\mathbb{P}_A$ è un sottospazio di dimensione $n-r$.*

Dim. $\mathbb{P}_A$ è definito da un sistema di equazioni lineari omogeneo:

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0m}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_n = 0 \end{cases}$$

nelle $\underline{x}$ incognite. La matrice A associata al sistema lineare omogeneo ha rango $\rho(A) = r$, quindi vi sono r equazioni linearmente indipendenti. Si ha

$$dim\mathbb{P}_A = dim\mathbb{P}^n_k - \rho(A) = n - r$$

e segue l'asserto. $\square$

Sia definisca $U = \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A \subseteq \mathbb{P}^k_n$, che è un aperto di $\mathbb{P}^n_k$. Si definisca la seguente applicazione:

$$\tau\colon [\underline{x}] \in U \subseteq \mathbb{P}^n_k \to [\underline{x}A] \in \mathbb{P}^m_k.$$

L'applicazione τ è ben posta.

Proposizione 12.2. *τ è un morfismo.*

Definizione 12.3. L'applicazione sopracitata definisce un'applicazione razionale $\tau = [(U,\tau)]_{\mathcal{R}}$ cioè:

$$\tau\colon \mathbb{P}^n_k \dashrightarrow \mathbb{P}^m_k$$

che è chiamata trasformazione lineare generalizzata o omografia generalizzata.

Definizione 12.4. Se $r < n+1$ allora τ si dice essere un omografia degenere di centro $\mathbb{P}_A$.

Osservazione 44. Se $r = n+1$ e $P_A = \varnothing$ allora τ è un omografia.

Teorema 12.5. *Per $r = 2, \dots, n$ allora l'insieme di definizione di τ è $U = \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A$. In particolare per $r = 1$ l'insieme di definizione per τ è $\mathbb{P}^n_k$.*

Dim. Sia $Q \in \mathbb{P}_A$, e dimostriamo che la funzione non si può prolungare in nessun intorno di Q. Se per assurdo Q appartiene all'insieme di definizione, cioè al massimo aperto in cui τ è definita allora

$$\exists\, U' \text{ intorno, con } Q \in U'$$

e

$$\exists\, f_0, \cdots, f_m \in S^{(n)}_d \text{ non tutti nulli in } U$$

tale che

$$\forall\, P \in U' \cap U, \tau(P) = \big[f_0(P), \cdots, f_m(P)\big].$$

Siano $\underline{a}^0, \dots, \underline{a}^m$ le colonne di A:

$$\forall \underline{x} \in U \quad \tau\big([\underline{x}]\big) = [\underline{x}A] = [\underline{x} \cdot \underline{a}^0, \cdots, \underline{x} \cdot \underline{a}^m] = [g_0(\underline{x}), \cdots, g_m(\underline{x})]$$

allora

$$\tau(P) = [g_0(P), \cdots, g_m(P)]$$

Poichè $[f_0(P), \cdots, f_m(P)] = [g_0(P), \cdots, g_m(P)]$ rappresentano lo stesso punto , deve succedere che:

$$\forall\, P \in U \cap U' \qquad \rho \begin{pmatrix} f_0(P), \cdots, f_m(P) \\ g_0(P), \cdots, g_m(P) \end{pmatrix} = 1$$

cioè in $U \cap U'$ si devono annullare tutti i minori del II ordine. Si avrà

$$f_i g_j - f_j g_i = 0 \Leftarrow f_i g_j = f_j g_i \quad \forall i, j$$

in $U \cap U'$, aperto non vuoto di $\mathbb{P}^n_k$ e dunque risulta $f_i g_j = f_j g_i\, \forall i, j$ in tutto $\mathbb{P}^n_k$. Poichè $r > 1$, per ogni i i g_i non sono tutti proporzionali allo stesso polinomio, perché essendo $r > 1$ allora $\rho\,(\underline{x}A) > 1$ in quanto le colonne $\underline{a}^0, \cdots, \underline{a}^m$ non sono proporzionali alla stessa colonna. Dunque

$$\forall i = 0, \cdots, m\, \exists\, j = 0, \cdots, m \text{ tale che } \lambda g_i \neq g_j, \forall\, \lambda \in K$$

Abbiamo trovato che per questi i e j $f_i g_j = f_j g_i$ in $\mathbb{P}^n_k$ si distinguono due casi:

1. se $g_i \not\equiv 0$ allora g_i divide $f_i g_j$ ma essendo che g_i non possa dividere g_j, allora
$$g_i / f_i, \forall i = 0, \cdots, n$$
ovvero
$$g_i(Q) = 0 \Rightarrow f_i(Q) = 0, \forall i = 0, \cdots, n$$
2. se $g_i \equiv 0$ segue $g_j \not\equiv 0$ e $f_i \equiv 0$. In ogni caso, qualsiasi sia $i = 0, \cdots, n$ se $g_i(Q) = 0$ allora $f_i(Q) = 0$.

Ma le g_i sono nulle su $\mathbb{P}_A$ così risulta

$$g_i(Q) = 0 \Rightarrow f_i(Q) = 0\, \forall i = 0, \cdots, n$$

allora $\tau(Q)$ non ha senso e segue la contraddizione e l'insieme di definizione dovrà essere $U = \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A$. Ora sia considerato il seguente insieme:

$$\mathbb{P}'_A = \tau\left(\mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A\right) = \{[\underline{x}A] : \underline{x} \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A\} = \{[x_0\underline{a}_0 + \ldots + x_n\underline{a}_n] : \underline{x} \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A\}\,.$$

Se $r = 1$ si ha:

$$dim\mathbb{P}'_A = 0 \Rightarrow \mathbb{P}'_A = \{P\} \Rightarrow [(\mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_A, \tau)]_{\mathcal{R}} = [(\mathbb{P}^n_k, cte)]_{\mathcal{R}}. \qquad \square$$

Osservazione 45. Per $r = 1$, $\mathbb{P}_A$ è un iperpiano perché $dim\,\mathbb{P}_A = n - r = n - 1$. Questo è l'unico esempio di omografia degenere ovunque definita.

Esempio 12.6. Il cambiamento di coordinate in $\mathbb{P}^n_k$ è un omografia.

Esempio 12.7. La proiezione di $\mathbb{P}^n$ su $\mathbb{P}_2$ da $\mathbb{P}_1$, di centro $\mathbb{P}_1$ è un esempio di omografia degenere di $\mathbb{P}^n$ in sé.

Siano $\mathbb{P}_1 \leq \mathbb{P}^n_k$ e $\mathbb{P}_2 \leq \mathbb{P}^n_k$ sottospazi tali che valgono le seguenti proprietà:

1. $dim\mathbb{P}_1 = n - r$ e $dim\mathbb{P}_2 = r - 1\,, r > 1$;
2. $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 = \varnothing$;
3. $\mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^n_k$, per la formula di Grassmann.

Osservazione 46. Per ogni $P \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_1$ si ha che $P \vee \mathbb{P}_1$ è un sottospazio di dimensione $n - r + 1$ e $\mathbb{P}_2 \cap (\underline{P} \vee \mathbb{P}_1)$ sarà un punto P' per la formula di Grassmann.

Per l'osservazione fatta ha senso considerare l'applicazione:

$$\tau : \underline{P} \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_1 \longrightarrow P' = (\underline{P} \vee \mathbb{P}_1) \cap \mathbb{P}_2 \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^{r-1} \subseteq \mathbb{P}^n_k.$$

Proposizione 12.8. *L'applicazione*

$$\tau : \underline{P} \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_1 \longrightarrow P' = (\underline{P} \vee \mathbb{P}_1) \cap \mathbb{P}_2 \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^{r-1} \subseteq \mathbb{P}^n_k$$

è tale che

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] \longrightarrow [a_0, \dots, a_{r-1}].$$

Dim. È possibile cambiare coordinate in modo che $\mathbb{P}_1$ abbia equazioni

$$x_0 = \ldots = x_{r-1} = 0$$

e in modo che $\mathbb{P}_2$ abbia equazioni

$$x_r = \ldots = x_n = 0.$$

Allora $\mathbb{P}_2$ si può identificare con $\mathbb{P}^{r-1}$ in cui le coordinate sono $[x_0, \cdots, x_{r-1}]$. Quindi τ è dato da:

$$[x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_1 \to [x_0, \cdots, x_{r-1}, 0, \ldots, 0] = [x_0, \ldots, x_{r-1}] \in \mathbb{P}_2.$$

Se $P = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_1$ allora esiste un $i = 0, \cdots, r-1$ tale che $a_i \neq 0$. Supponiamo $i = 0$. Si consideri il fascio di sottospazi passanti per $\mathbb{P}_1$ di equazione:

$$\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_{r-1} x_{r-1} = 0.$$

Si imponga il passaggio per il punto $P = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$:

$$\lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_{r-1} a_{r-1} = 0.$$

Poichè $a_0 \neq 0$ e fissati $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1}$ si ha

$$\lambda_0 = \frac{-\lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_{r-1} a_{r-1}}{a_0}$$

Fissati $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{r-1} = 1$, si ha:

$$\lambda_0 = \frac{-a_1 \ldots - a_{r-1}}{a_0}$$

e dunque $P \vee \mathbb{P}_1$ sarà un sottospazio di equazione:

$$-\frac{a_1 + \ldots + a_{r-1}}{a_0} x_0 + x_1 + \ldots + x_{r-1} = 0 \tag{1}$$

. Allora $(P \vee \mathbb{P}_1) \cap \mathbb{P}_2$ è un punto le cui coordinate sono le soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -\frac{a_1+\ldots+a_{r-1}}{a_0} x_0 + x_1 + \ldots + x_{r-1} = 0 \\ x_r = \ldots = x_n = 0 \end{cases}$$

Dato che le prime $r-$coordinate di P soddisfano la (1), si ha

$$\tau(P) = [a_0, \ldots, a_{r-1}, 0, \ldots, 0] = [a_0, \ldots, a_{r-1}]$$

come punto di $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}^{r-1}$. $\square$

Corollario 12.9. *τ è suriettiva.*

Dim. Siano $P = [a_0, a_1, \ldots, a_n], Q = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$, si ha

$$\tau(P) = \tau(Q) \Leftrightarrow [a_0, \ldots, a_{r-1}, 0 \ldots 0] = [b_0, \ldots, b_{r-1}, 0 \ldots 0]$$

ma gli zeri provengono dall'intersezione con $\mathbb{P}_2$ e quindi è vera l'uguaglianza se e solo se $P \vee \mathbb{P}_1 = Q \vee \mathbb{P}^1$ cioè stanno con $\mathbb{P}_1$ in uno stesso sottospazio di dimensione $n - r + 1$. $\square$

Più in generale $\tau \colon \mathbb{P}^n_k \dashrightarrow \mathbb{P}^m_k$ è una omografia degenere. È sempre possibile cambiare coordinate in $\mathbb{P}^n_k$ e in $\mathbb{P}^m_k$ in modo che τ risulti:

$$\tau \colon [x_0, \ldots, x_n] \to [x_1, \cdots, x_{r-1}, 0, \cdots, 0]$$

per cui τ è composta di una proiezione e di un'omografia (cambiamento di coordinate)

Consideriamo ora $\mathring{A}^n_k$ immerso in $\mathbb{P}^n_k$ e siano $\mathbb{A}_1 = \mathring{A}^n_k \cap \mathbb{P}_1$ e $\mathbb{A}_2 = \mathring{A}^n_k \cap \mathbb{P}_2 \neq \varnothing$ sottospazi affini di $\mathring{A}^n_k$. Possiamo considerare

$$\tau \colon \mathring{A}^n_k - \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2.$$

Se $\mathbb{A}_1 = \mathring{A}^n_k \cap \mathbb{P}_1 = \varnothing$ allora $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P}^n_k - \mathring{A}^n_k = H_0$ cioè $\mathbb{P}_1$ è contenuto nell'iperpiano all'infinito di $\mathring{A}^n_k$. Inoltre τ è un morfismo e si definisce proiezione di $\mathring{A}^n_k$ su $\mathbb{A}_2$ parallelo alla direzione di $\mathbb{P}_1$.
Se invece $\mathbb{A}_1 = \mathring{A}^n_k \cap \mathbb{P}_1 \neq \varnothing$ allora $dim \mathbb{A}_1 = n - r$. τ non è un morfismo, perché non è definita su $\mathbb{A}^1$ e non si può estendere perché altrimenti si potrebbe estendere anche $\tau \colon \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}_2$. In questo caso si parla di proiezione di $\mathring{A}^n_k$ su $\mathbb{A}_2$ di centro $\mathbb{A}_1$.

Teorema 12.10. *Ogni trasformazione lineare è composta di proiezioni ed immersioni.*

Dim. Si effettui un cambiamento di variabili in $\mathbb{P}^n_k$, tale che $\mathbb{P}_1$ è di equazione

$$x_0 = \ldots = x_{r-1} = 0$$

e $\mathbb{P}_2$, di equazione

$$x_r = \ldots = x_n = 0.$$

Possiamo identificare $\mathring{A}^n_k$ con U_0. Quindi $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}^n \cap \mathbb{P}_2$ avrà equazioni

$$x_r = \ldots = x_n = 0.$$

Siccome

$$\tau \colon [x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}^n_k - \mathbb{P}_1 \longrightarrow [x_0, \cdots, x_{r-1}] \in \mathbb{P}_2$$

la restrizione sarà:

$$\tau \colon [1, x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{A}^n$$

cioè risulta

$$\tau \colon (x_1, \ldots, x_n) \in \mathring{A}^n_k \longrightarrow (x_1, \ldots, x_{r-1}) \in \mathbb{A}_2$$

che è la proiezione $\pi_{1,\ldots,r-1}$ di $\mathbb{A}^n$ su $\mathbb{A}^{r-1} = \mathbb{A}_2$ da $\left(\mathbb{A}^n_r, \ldots, n\right)_\infty$.
Viceversa, sia

$$\tau \colon \underline{x} \in \mathring{A}^n_k \longrightarrow \underline{a} + \underline{x}A \in \mathring{A}^m_k$$

con A matrice di tipo $n \times m$ e $\rho(A) = l$, una trasformazione lineare. Cambiando coordinate in $\mathring{A}^n_k$ e $\mathring{A}^m_k$ ci si può ridurre al caso $\underline{a} = 0$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora τ diventa:

$$\tau \colon (x_1, \cdots, x_n) \in \mathring{A}^n_k \longrightarrow (x_1, \cdots, x_l, 0, \ldots, 0) \in \mathring{A}^m_k \qquad \square$$

Lemma 12.11. *Esiste un unico iperpiano $H_r \supseteq \mathbb{A}_1$ e tale che $H_r \cap \mathbb{A}_2 = \varnothing$ cioè parallelo ad $\mathbb{A}_2$, e di dimensione $dim H_r = n - 1$.*

Dim. Sia $H_r = (\mathbb{P}_1 \vee (\mathbb{A}_2)_\infty) \cap \mathbb{A}^n$. Esso deve contenere $\mathbb{A}_1$, dunque $\overline{H}_r \supseteq \overline{\mathbb{A}_1} = \mathbb{P}_1$. $\overline{H}_r$ intersecherà $\mathbb{P}_2$, ma non deve intersecare in punti di $\mathbb{A}_2$. Deve essere $\overline{H}_r \cap \mathbb{P}_2 = (\mathbb{A}_2)_\infty$. Quindi H_r è determinato dalla regola di Grassmann. Infatti $dim(\mathbb{A}_2)_\infty = r - 2$, perché

$$(\mathbb{A}_2)_\infty = \overline{\mathbb{A}_2} \cap H_\circ = \mathbb{P}_2 \cap H_\circ \Rightarrow (r-1) + (n-1) = i + n \Rightarrow i = r - 2$$

ed essendo

$$(\mathbb{A}^2)_\infty = \overline{\mathbb{A}_2} \cap H_\circ = \mathbb{P}_2 \cap H_\circ;$$

$$\mathbb{P}_1 \cap (\mathring{A}_2)\infty = \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 \cap H_\circ = \varnothing \cap H_\circ = \varnothing$$

allora risulta

$$(n-r)+(r-2) = -1+c \Rightarrow c = n-1 \Rightarrow dim\,(\mathbb{P}_1 \vee (\mathbb{A}_2)_\infty) = n-1$$

Per definizione H_r è un iperpiano che è unico perché lo spazio congiungente è univocamente determinato e così per l'intersezione. □

Teorema 12.12. *Le proiezioni effettuate da sottospazi propri sono date da rapporti di polinomi di primo grado*

Dim. Si effettui un cambiamento di coordinate tale che $\mathbb{P}_2$ abbia equazione

$$x_r = \ldots = x_n = 0$$

e così anche $\mathbb{A}^r$. Per il lemma (12.11), esiste un unico iperpiano $H_r \subseteq \mathbb{A}_1$ soddisfacente le proprietà $H_r \cap \mathbb{A}_2 = \varnothing$ e di dimensione $dim H_r = n-1$. Sia $f_r(x_1, \cdots, x_n) = 0$ l'equazione di H_r. Esso è un polinomio di primo grado non omogeneo perché $\mathbb{A}_2$ passa per l'origine, ma, essendo $\mathbb{A}_2 \cap H_r = \varnothing$, H_r non passa per l'origine, perché $\mathbb{A}_2$ ha equazioni

$$x_\tau = \ldots = x_n = 0$$

e l'origine proviene tramite τ da $(0, \ldots, 0) \in \mathring{A}^n_k$. Possiamo supporre che il termine noto che compare in f_r sia 1 così f_r è univocamente determinato. f_r sarà del tipo

$$f_r(x_1, \cdots, x_n) = g_r(x_1, \cdots, x_n) - 1.$$

Poichè $\mathbb{A}_2 \cap H_r = \varnothing$, il sistema

$$\begin{cases} f_r(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ x_r = \ldots = x_n = 0 \end{cases}$$

deve essere incompatibile, cioè l'equazione

$$g_r(x_1, \cdots, x_{r-1}, 0, \ldots, 0) - 1 = 0$$

risulta impossibile nel momento in cui g_r non dipende da $x_1, \cdots, x_{r-1}$. Allora

$$f_r = g_r(x_r, \cdots, x_n) - 1$$

Per ogni $i = 1, \ldots, r-1$, sia H_i l'unico iperpiano che contiene $\mathbb{A}_1$ e tale che contiene

$$\mathbb{A}^i_r = \mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_2$$

con $\mathbb{A}^i_r$ sottospazio cioè, essendo $H_i \supseteq \mathbb{A}_1$ e $H_i \supseteq \mathbb{A}^i_2$,

$$H_i = \mathbb{A}_1 \vee \mathbb{A}^i_2 = \left(\mathbb{A}^n \cap \mathbb{P}_1\right) \vee \left(\mathbb{A}^n \cap \mathbb{P}_2 \cap H_i\right) = \mathbb{A}^n \cap \left(\mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}^i_2\right)$$

Infatti $dim\mathbb{P}_1 = n - r\,, dim\mathbb{P}_2^i = r - 2$ e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 &= \mathbb{P}_1 \cap \big(\mathbb{P}_2 \cap Z_p(x_i)\big) = \varnothing \cap Z_p(x_i) = \varnothing \Rightarrow \\ &\Rightarrow (n-r) + (r-2) = -1 + c \Rightarrow c = dimH_i = n - 1\end{aligned}$$

Allora A_i è l'iperpiano, perché il sottospazio congiungente è unico. Sia

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

un'equazione di primo grado di H_i; H_i contiene $\mathbb{A}_2^i$ che passa per l'origine, quindi anche H_i passa per l'origine e risulta che f_i è omogeneo in $x_1, \ldots, x_n$. Inoltre $H_i \cap \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2^i$ quindi

$$\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ x_r = \ldots = x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_r = \ldots = x_n = 0 \\ x_i = 0 \end{cases}$$

ovvero devono avere le stesse soluzioni, per cui

$$f_i(x_1, \cdots, x_{r-1}, 0, \ldots, 0) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0.$$

Quindi in f_i possono comparire $x_r, \ldots, x_n$, ma non compaiono $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{r-1}$, allora $f_i = x_i - g_i(x_r, \cdots, x_n)$ è univocamente determinato a meno di costanti non nulle, con g_i omogeneo di primo grado in $x_r, \cdots, x_n$.
Sia $P = (a_1, \ldots, a_n)$ un punto non appartenente a H_r, allora $f_r(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.
Consideriamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} f_i(x_1, \cdots, x_n) - \dfrac{f_i(a_1, \cdots, a_n)}{f_r(a_1, \cdots, a_n)} f_r(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ i = 1, \cdots, r-1 \end{cases}$$

Questo sistema è in effetti il seguente

$$\begin{cases} x_i - g_i(x_r, \cdots, x_n) - \dfrac{a_i - g_i(a_r, \ldots, a_n)}{f_r(a_r, \ldots, a_n)} f_r(x_r, \cdots, x_n) = 0 \\ i = 1, \cdots, r-1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{pmatrix} 10 \cdots 0 c_{1r} \cdots c_{1n} \; t_1 \\ \vdots \\ 00 \cdots 1 c_{rr} \cdots c_{rn} \; t_r \end{pmatrix}$$

con c_{ij} coefficienti e t_i termini noti.
Quindi il rango è massimo e dunque l'equazioni sono linearmente indipendenti e si annullano in P e in $\mathbb{A}_1$. Infatti i punti di $\mathbb{A}_1$ annullano le f_i e le f_r, in quanto equazioni di H_i e di H_r, iperpiani passanti per $\mathbb{A}_1$.
Ma un sistema di equazioni lineari compatibili in $\mathbb{A}_k^n$ definisce un sottospazio

di $\mathbb{A}_k^n$ la cui dimensione è $n-r+1$, dove n è la dimensione di $\mathbb{A}_k^n$, mentre $r-1$ è il numero di equazioni lineari indipendenti. Questo sottospazio contiene $\mathbb{A}_1$ e P e ha dimensione pari a $dim\mathbb{A}_1+1$ e poichè il sottospazio congiungente $\mathbb{A}_1$ e P ha dimensione $dim\,\mathbb{A}_1+1$ risulta che esso è il sottospazio congiungente $\mathbb{A}_1$ e P.
$(\mathbb{A}_1 \vee P) \cap \mathbb{A}_2 = \tau(P)$ si ottiene da $\begin{cases} x_i - g_i(x_r, \cdots, x_n) - \dfrac{f_i(\underline{a})}{f_2(\underline{a})} \end{cases}$
Quindi

$$\begin{cases} x_i - g_i(x_r, \cdots, x_n) - \dfrac{f_i(\underline{a})}{f_r(\underline{a})}\big(g_r(x_r, \cdots, x_n) - 1\big) = 0 \\ x_r = \ldots = x_n = 0 \quad i = 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x_i - g_i(\underline{0}) - \dfrac{f_i(\underline{a})}{f_r(\underline{a})}\big(g_r(\underline{0}) - 1\big) = 0 \\ i = 1, \cdots, r-1 \end{cases}$$

Essendo $g_i(\underline{0}) = 0 = g_r(\underline{0})$ omogenei, dunque si ottiene

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{f_i(\underline{a})}{f_r(\underline{a})} \\ i = 1, \cdots, r-1 \\ x_r = \ldots = x_n = 0 \end{cases}$$

Inoltre in H_r τ non è definita perché in H_r risulta $f_r = 0$ e allora τ perde di significato. Quindi l'applicazione è:

$$\tau\colon (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}_n - H_r \to \left(\frac{f_1(\underline{x})}{f_r(\underline{x})}, \cdots, \frac{f_{r-1}(\underline{x})}{f_r(\underline{x})}, 0, \cdots, 0\right) \in \mathbb{A}_r. \qquad \square$$

Osservazione 47. Sia V una varietà affine o proiettiva e sia $\tau\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}_r$ di centro $\mathbb{P}_1$ una proiezione. $\tau_{|V}\colon V \dashrightarrow \mathbb{P}_r$ è ancora un'applicazione razionale che si dice proiezione di V su $\mathbb{P}_r$ da $\mathbb{P}_1$. $\tau_{|V}$ ha senso se $V \nsubseteq \mathbb{P}_1$, ma l'insieme di definizione di $\tau_{|V}$ non è necessariamente solo $V - (V \cap \mathbb{P}_1)$.

Esempio 12.13. Sia $\tau\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ la proiezione di $\mathbb{P}^2$ su una retta l, da un punto $P \notin l$ e che non è definita in P. Sia Γ una conica irriducibile di $\mathbb{P}^2$ passante per P. Allora $\tau_{|\Gamma}\colon \Gamma \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ è una funzione razionale ovunque definita perché Γ è isomorfo a $\mathbb{P}^1$ e le applicazioni razionali $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ sono ovunque definite, dunque $\tau_{|\Gamma}$ è definita anche in P.

Proposizione 12.14. *Sia $V \subseteq \mathbb{P}_k^r$ una varietà proiettiva di dimensione $n \leq r$. Esistono i punti $P \in \mathbb{P}_k^r - V$ tali che la proiezione di V da P su un iperpiano non passante per V sia un morfismo birazionale di V sulla sua immagine.*

Dim. Sappiamo che

$$K(V) = k(x_1, \cdots, x_r) \text{ con } x_i\, mod.\, \mathcal{I}a(V)$$

Possiamo supporre

$$k(x_1, \cdots, x_r) \simeq k(x_1, \cdots, r_{r-2}, y) \text{ con } y = \lambda x_{r-1} + \mu\, x_r$$

con $[\lambda, \mu] \in U$ aperto di Zariski di $\mathbb{P}^1$. Siano $P = [0, \cdots, 0, 1]$ e $Q = [0, \cdots, 1, 0]$ e consideriamo

$$r = P \vee Q = \big\{[0, \cdots, 0, h, k]\big\}$$

Cambiando coordinate, possiamo avere $r \cap V$ essere finito oppure vuoto. Inoltre

$$\varphi\colon [\lambda, \mu] \in U \subseteq \mathbb{P}^1 \to \lambda P + \mu\, Q \in r$$

è un isomorfismo e dunque U è in corrispondenza biunivoca con un aperto di Zariski di r. Dunque esiste un aperto $U \neq \varnothing$ di Zariski di r tale che qualunque sia $R \in U$, posto $\varphi^{-1}(R) = [\lambda, \mu]$ e $y = \lambda x_{r-1} + \mu\, x_r$, sia

$$K(V) \simeq k(x_1, \cdots, x_{r-2}, y)$$

Tale isomorfismo corrisponde alla proiezione di V da r su $x_r = 0$. Di solito è solo un'applicazione razionale perché R può appartenere a V. Qualora $R \notin V$ allora esso è un morfismo e si può sempre scegliere opportunamente U in modo che $r \cap V$ è finito e, a meno di restringere U, si può considerare $R \notin V$. Quindi vale l'asserto con i punti $P \in U \subseteq r$, se $r \nsubseteq V$. $\square$

Definizione 12.15. Una varietà V di dimensione n si dirà essere unirazionale se e solo se esiste $\varphi\colon \mathbb{P}^n \twoheadrightarrow V$ applicazione razionale dominante, cioè se e solo se $K(V) \subseteq k(x_1, \cdots, x_n)$ è estensione algebrica e separabile.

Definizione 12.16. Una varietà V di dimensione n è razionale se e solo se esiste $\varphi\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow V$ applicazione birazionale , cioè se e solo se $K(V) \simeq k(x_1, \ldots, x_n)$.

Osservazione 48. La definizione di varietà unirazionale e di varietà razionale vale anche nel momento in cui si possa considerare l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow V$ perchè $\mathbb{A}^n$ è aperto di $\mathbb{P}^n$.

Esempio 12.17. $V_{n,d}$, le coniche, le cubiche gobbe sono varietà razionali.

Si ha che se V è una varietà di dimensione n razionale, essa è anche unirazionale. Il viceversa generalmente vale solo sotto alcune condizioni.

Teorema 12.18 (Teorema di Lüroth). *Sia V una varietà di dimensione 1, ogni curva unirazionale è razionale.*

Teorema 12.19 (Teorema di Castelnuovo). *Ogni superficie unirazionale è razionale sui campi algebricamente chiusi.*

Teorema 12.20 (Teorema di Griffith e Clemens). *Esiste $U \subseteq \mathbb{P}^{N(n,3)}$ aperto non vuoto tale che qualunque sia $P \in U$, P corrisponde a una cubica unirazionale e non razionale di $\mathbb{P}^n_k$.*

Siano Z un monoide di vertice $0 = [1, 0, \dots, 0]$, $\overline{Z}$ un monoide di vertice $0 = [1, 0, \dots, 0]$, $\tau(Z)$ un monoide di vertice $0 = [1, 0, \dots, 0]$, con τ trasformazione lineare. Si dimostra il seguente lemma:

Lemma 12.21. *Ogni monoide è razionale.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che $\overline{Z}$ è birazionale a $\mathbb{P}^{n-1}$. Consideriamo la proiezione p di $\overline{Z}$ sull'iperpiano all'infinito di $\mathbb{A}^n$ e H_0, da $0 = [1, 0, \dots, 0]$. Sia

$$\varphi \colon [x_0, \dots, x_n] \in \overline{Z} - \{0\} \to [x_1, \dots, x_n] \in H_0$$

e proviamo che φ è un isomorfismo birazionale. Geometricamente abbiamo che $H_0 = Z_p(x_0)$ è un iperpiano e abbiamo il punto 0 e

$$\forall\, P \in \overline{Z} - \{0\}, \varphi(P) = (P \vee 0) \cap H_0 = P'$$

I punti che hanno la stessa immagine tramite la φ sono i punti allineati con 0. Studiamo le intersezioni delle rette per 0 con V.
Sia $A = [0, a_1, \dots, a_n] \in H_0$. La retta $A \vee 0$ è descritta, al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ dal sistema

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_i = \mu a_i \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Dunque $(A \vee 0) \cap \overline{Z}$ è dato da:

$$f_d(\mu a_1, \dots, \mu a_n) - \lambda f_{d-1}(\mu a_1, \dots, \mu a_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu^d f_d(a_1, \dots, a_n) - \lambda \mu^{d-1} f_{d-1}(a_1, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu^{d-1}[\mu f_d(\underline{a}) - \lambda f_{d-1}(\underline{a})] = 0$$

La soluzione $\mu = 0$ corrisponde al punto $\underline{0}$. Cerchiamo le soluzioni per $\mu \neq 0$, distinguendo i casi:

1° caso) $f_d(\underline{a}) = f_{d-1}(\underline{a}) = 0$, polinomio identico. Quindi l'equazione è verificata per qualsiasi coppia (λ, μ), ovvero tutti i punti di $r = A \vee 0$ appartengono a $\overline{Z}$ e allora $r \subseteq \overline{Z}$;

2° caso) $f_d(\overline{a}) \neq 0, f_{d-1}(\underline{a}) = \underline{0}$. L'unica soluzione è $\mu = 0$ e si ottiene di nuovo $\underline{0}$ e dunque $r \cap \overline{Z} = \{0\}$.

3° caso) $f_{d-1}(\underline{a}) \neq 0$. Poiché è un'equazione di primo grado in λ e μ, esiste un'unica soluzione (λ, μ) con $\lambda = f_d(\underline{a}), \mu = f_{d-1}(\underline{a}) \neq 0$ e allora P ha coordinate $P = [f_d(\underline{a}), a_1 f_{d-1}(\underline{a}), \dots, a_n f_{d-1}(\underline{a})] \neq 0$ in quanto $f_{d-1}(\underline{a}) \neq 0$. Segue $r \cap \overline{Z} = \{0, P\}$.

Le conseguenze sono quanto segue:

1° caso) $\begin{cases} f_d(\underline{x}) = 0 \\ f_{d-1}(\underline{x}) = 0 \end{cases}$ chiuso. $Z_p(f_d, f_{d-1})$ è il luogo dei punti $A \in H_0$ tale che le rette $r = A \vee 0$ sono contenute in$\overline{Z}$, quindi nello spazio $\mathbb{P}^n$ è il cono di vertice 0 sui punti di H_0 (direttrice) che verificano il sistema, cioè è il cono di vertice 0 e direttrice:

$$H_0 \cap Z_p(f_{d-1}, f_d) = H_0 \cap Z_p(f_{d-1}) \cap Z_p(f_d) = Z_1 \cap Z_2$$

Indicando $Z_1 = Z_p(f_{d-1}), Z_2 = Z_p(f_d) \subseteq H_0$, perché f_d e f_{d-1} dipendono solo da $x_1, \dots, x_n$ allora $x_0 = 0$. Per esempio il cono è formato dalle 2 rette r, r'.

2° caso) $r \cap \overline{Z} = \{0\}$, $\begin{cases} f_{d-1}(\underline{x}) = 0 \\ f_d(\underline{x}) \neq 0 \end{cases}$ non è chiuso. $Z_p(f_d, f_{d-1})$è il luogo dei punti $A \in H_0$ che, congiunti con 0, danno rette r aventi in comune con $\overline{Z}$ solo 0. $Z_p(f_{d-1}) = Z_1$ è per definizione il cono tangente a $\overline{Z}$ in 0 cioè l'insieme delle rette che intersecano $\overline{Z}$ solo in 0 o sono contenute in $\overline{Z}$.
$Z_1 \cap Z_2$ è un insieme algebrico di Z_1; per le rette del cono di direttrice $Z_1 \cap Z_2$ cade l'iniettività, perché tutti i punti della stessa retta hanno per immagine un punto di $Z_1 \cap Z_2$. Sulle rette del cono di direttrice $Z_1 - (Z_1 \cap Z_2)$, cioè sulle altre rette del cono tangente, invece, φ non è definita perché le rette del cono di direttrice $Z_1 - (Z_1 \cap Z_2)$, hanno in comune con $\overline{Z}$ solo 0 ovvero $\varphi(0) = Z_1$, ma non è univocamente determinata l'immagine (funzione a più valori). Interpretiamo Z_1 come immagine delle direzioni tangenti a V uscenti da 0.

3° caso) Se $r \cap V = \{0, P\}$, con $r = 0 \vee A$, φ è iniettiva. Poniamo $\varphi(P) = A$ e costruiamo l'inversa di φ

$$\psi\colon H_0 - (Z_1 \cap Z_2) \to \overline{Z}, [x_n, \dots, x_n] \to [f_d(\underline{x}), x_1 f_{d-1}(\underline{x}), \dots, x_n f_{d-1}(\underline{x})]$$

si ottiene così la seguente funzione

$$A \to (A \vee 0) \cap \overline{Z}$$

ψ è un morfismo perché descritta da polinomi omogenei dello stesso grado mai nulli contemporaneamente. Infatti

$$\forall\, [\underline{x}] \in H_0 - (Z_1 \cap Z_2) \text{ si ha } [\underline{x}] \notin Z_1 \cap Z_2 \Rightarrow f_d(\underline{x}) \neq 0 \text{ o } f_{d-1}(\underline{x}) \neq 0$$

e gli x_i non sono mai tutti nulli. Allora ponendo $U = H_0 - (Z_1 \cap Z_2)$ aperto di $H_0 = Z_p(x_0) = \mathbb{P}^{n-1}$, $[(U, \psi)]_{\mathcal{R}}$ è un'applicazione razionale. Posto $U' = \overline{Z} - \{0\}$, anche $[(U', \varphi)]_{\mathcal{R}}$ è un'applicazione razionale. Anche φ è un morfismo perché

$$\forall i, x_i \circ \varphi \text{ è regolare}$$

φ e ψ sono dominanti, perché $\varphi\left(\overline{Z} - \{0\}\right) = H_0 - Z_1$ è un aperto di H_0 irriducibile, allora è denso in H_0 e $\overline{\varphi\left(Z - \{0\}\right)} = H_0$

$\psi\big(H_0 - (Z_1 \cap Z_2)\big) = \overline{Z} - Z_1$ aperto di $\overline{Z}$ irriducibile, perché ψ associa ad ogni punto A di $H_0 - (Z_1 \cap Z_2)$ l'unico punto P per il terzo caso, da cui A proviene e inoltre dobbiamo togliere i punti di Z_1 che provengono da $Z_1 \cap Z_2$. Infatti Z_1 ha equazione $f_{d-1} = 0$, allora intersecando con $\overline{Z}$ si ha $f_d = 0 = f_{d-1}$ cioè $\psi(\underline{x}) = [0, \dots, 0]$ che non rappresenta nessun punto, dunque

$$\overline{\psi\big(H_0 - (Z_1 \cap Z_2)\big)} = Z$$

Inoltre dove sono entrambe definite: $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = id$.

□

Osservazione 49. ψ è definita anche in Z_1 perché sostituendo $f_{d-1} = 0$ si ha il punto $\underline{0}$ e allora $\psi(Z_1) = \{0\}$. È definito anche in $Z_1 \cap Z_2 \subseteq Z_1$. Esistono punti di H_0 che vanno in 0, mentre tramite φ, 0 non ha immagine, però possiamo interpretare $\varphi(0) = Z_1$.

Proposizione 12.22. *φ è un morfismo definito anche in $\underline{0}$ se e solo se $\overline{Z}$ è una conica non degenere. φ è un morfismo nel senso di applicazione razionale ovunque definita.*

Dim. $\Leftarrow$) Se $\overline{Z}$ è una conica non degenere allora $\overline{Z}$, omografica alla conica di equazione $x_0x_1 - x_2^2 = 0$, è un monoide di vertice $[1, 0, 0]$ ($d = 2$). Dunque $\overline{Z} \simeq \mathbb{P}^1$,e infatti φ è proprio l'isomorfismo $\overline{Z} \simeq \mathbb{P}^1$, cioè

$$\varphi\colon [x_0, x_1, x_2] \in \overline{Z} \to \begin{cases} [x_0, x_1] \text{ se } x_0 \neq 0 \\ [x_1, x_2] \text{ se } x_2 \neq 0 \end{cases} \in \mathbb{P}^1$$

Quale applicazione razionale è determinata da $[(\overline{Z} - \{0\}, \varphi)]_{\mathcal{R}}$, ma ogni applicazione razionale $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, è prolungabile e φ si prolunga in $\underline{0}$, dunque φ è un morfismo.

$\Rightarrow$) Dimostriamo che $n = 2$ e $d = 2$. Per ogni $P = [\underline{a}] \in X = Z_1 - (Z_1 \cap Z_2)$ si ha

$$f_{d-1}(\underline{a}) = 0 \text{ e } f_d(\underline{a}) \neq 0$$

in quanto $P \notin Z_1 \cap Z_2$. Dunque

$$\psi(P) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = X$$

$$\forall\, Q \in Z_1 \cap Z_2 \Rightarrow \psi(Q) = Q \vee 0 = r$$

$$\varphi(r) = Q \qquad r \subseteq \overline{Z} \text{ perché } Q \in Z_1 \cap Z_2$$

φ definita in 0 e allora $\varphi(0) = X$ deve essere un unico punto e dunque $n = 2$. Infatti, per esempio, se $n = 3$

$$Z_i = Z_p(f_{d-1})$$

è infinito, mentre, essendo Z_i irriducibile, si ha che f_d, f_{d-1} sono primi e, di conseguenza, Z_1 e Z_2 sono ipersuperfici che non hanno componenti comuni e risulterebbe $Z_1 \cap Z_2$ finito e ciò implicherebbe X infinito. Più in generale, Z_1, Z_2 sono ipersuperfici di $\mathbb{P}^n, n \geq z$ si ha

$$X = Z_1 - (Z_1 \cap Z_2) \neq \varnothing \Rightarrow X \text{ infinito.}$$

Se $n = 2$, invece, $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ perché $Z_1 \cap Z_2 = Z_P(f_d, f_{d-1})$. Sono equazioni in due incognite, con i polinomi primi tra loro, dunque non esistono soluzioni comuni. Se $n = 2$ si ha $X = Z_1$. $\square$

Allora condizione necessaria e sufficiente affinché φ sia definita in 0 è che $n = 2$ e $\mid Z_1 \mid = 1$ cioè Z_1 corrisponde ad un punto, ovvero f_{d-1} ha un'unica soluzione, in particolare f_{d-1} è del tipo:

$$f_{d-1}(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{d-1}$$

perché deve essere omogeneo di grado $d - 1$.
Cambiando coordinate in $\mathbb{P}^2$, se $a \neq 0$ consideriamo

$$\begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \qquad \left(\text{Se}\, b \neq 0\colon \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = x_1 \\ x_2' = ax_1 + bx_2 \end{cases} \right)$$

Quindi f_{d-1} diventa x_1^{d-1} e l'equazione di $\overline{Z}$ diventa

$$x_0 x_1^{d-1} - f_d(x_1, x_2) = 0$$

Essendo φ un morfismo,e ψ, come applicazione razionale, è un morfismo perché $n = 2$, dunque $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ e ψ è ovunque definito in $H_0 = \mathbb{P}^1$ e φ è un isomorfismo:

$$\varphi(0) = [0, 1] = Q$$

Infatti:

$$\varphi^{-1}\big([0,1]\big) = \psi\big([0,1]\big) = \big[f_d(0,1), a_1 f_{d-1}(0,1), a_2 f_{d-1}(0,1)\big]$$

poichè $f_{d-1} = x_1^{d-1}$, si ha

$$\big[f_d(0,1), 0, 0\big] = [1, 0, 0] = 0 \Rightarrow \varphi(0) = [0, 1] = Z_1 = Q$$

Il corrispondente φ^* è un isomorfismo

$$\varphi^*\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1, Q} \to \mathcal{O}_{Z,0}$$

ma

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1, Q} = \mathcal{O}_{\mathring{A}^1, Q} = A(\mathring{A}^1)_{\mathfrak{m}_Q} = A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$$

e

$$\mathcal{O}_{Z,0} \simeq A(Z)_{\mathfrak{m}_\circ} = A(Z)_{(x_1,x_2)}$$

perché

$$\mathfrak{m}_\circ = \{f \in A(Z) \mid f(0) = f(1,0,0) = 0\} = (x_1, x_2)$$

Si ha $\mathcal{O}_{Z,0}$ invece di $\mathcal{O}_{\overline{Z},0}$ perché sono isomorfi per la stessa ragione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,Q}$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,Q}$.

Teorema 12.23. $A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$ *è integralmente chiuso.*

Dim. In effetti si prova che

$$f \in \mathbb{Q}\left(A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}\right) \text{ è integrale su } A^{(1)}_{\left((x_1)\right)} \Rightarrow f \in A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$$

Sia $f \in \mathbb{Q}\left(A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}\right)$ integro su $A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$, osserviamo che $f = \frac{h}{g}$ e possiamo supporre h, g primi. Se $f \notin A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$ allora al denominatore compare x_1 che non compare a numeratore perché h, g primi e allora $f^{-1} \in A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$. Dire che f è integro su $A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$ vuol dire che

$$\exists a_1, \ldots, a_n \in A^{(1)}_{\left((x_1)\right)} : f^n + a_1 f^{1-n} + \cdots + a_n = 0$$

$$\Rightarrow f^{n-1}\big(f + a_1 + \cdots + a_n f^{n-1}\big) = 0 \Rightarrow f = -a_1 - a_2 f^{-1} - \cdots - a_n f^{1-n}$$

Se per assurdo $f \notin A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$, allora

$$f^{-1} \in A^{(1)}_{\left((x_1)\right)} \text{ e } f^{-i} \in A^{(1)}_{\left((x_1)\right)} \Rightarrow f \in A^{(1)}_{\left((x_1)\right)}$$

che è una contraddizione. Quindi è integralmente chiuso. □

Corollario 12.24. $\mathcal{O}_{Z,0} = A(Z)_{(x_1,x_2)}$ *non è integralmente chiuso, se* $d > 2$.

Dim. Cambiando le variabili, l'equazione di $\overline{Z}$ è

$$x_0 x_1^{d-1} - fd(x_1 x_2) = 0$$

cioè

$$x_0 {x_1}^{d-1} - \big(a_0 x_1^d + a_1 x_1^{d-1} x_2 + a_2 x_1^{d-2} x_2^2 + \cdots + a_d x_2^d\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1^{d-1}(x_0 - a_0 x_1 - a_1 x_2) - (a_2 x_1^{d-2} x_2^2 + \cdots + a_d x_2^d) = 0$$

dove $a_2 x_1^{d-2} x_2^2 + \cdots + a_d x_2^d = \varphi_d(x_1, x_2)$. Cambiando le variabili

$$\begin{cases} x_0' = x_0 - a_0 x_1 - a_1 x_2 \\ x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

La scomparsa di x_1^d equivale a prendere il punto $[0, 1, 0]$ su $\overline{Z}$ mentre la scomparsa di $x_1^{d-1} x_2$ equivale a prendere come nuova retta all'infinito la retta $x_0 - a_1 x_2 = 0$. L'equazione diventa

$$x_0 x_1^{d-1} - \varphi_d(x_1 x_2) = 0$$

Possiamo perciò supporre che

$$f_d(x_1, x_2) = \varphi_d(x_1, x_2)$$

ovvero che $a_0 = a_1 = 0$ e f_d è di grado $d-2$. Dimostriamo che $y = \frac{x_1}{x_2}$ dipende integralmente dagli elementi di $A(Z)_{(x_1,x_2)}$ cioè $\varphi_d \in \mathbb{Q}\big(A(Z)_{(x_1,x_2)}$, ma non appartenente a $A(Z)_{(x_1,x_2)}$. Nel caso affine, l'equazione di Z è

$$x_1^{d-1} - f_d(x_1, x_2) = 0 \text{ in } A(Z) = \frac{A^{(2)}}{\big(x_1^{d-1} - f_d(x_1, x_2)\big)}$$

Si divida per x_2^{d-1}

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{d-1} - \frac{1}{x_2^{d-1}} f_d(x_1, x_2) = 0 \text{ in } \mathbb{Q}\big(A(Z)\big) = K(Z)$$

Dunque

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{d-1} \frac{x_2}{x_2^d} f_d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{d-1} - x_2 f_d\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = 0 \text{ in } K(Z)$$

$x_2 \neq 0$ in $A(Z)$, altrimenti Z conterrebbe la retta $x_2 = 0$, ma $x_2 = 0$ non verifica l'equazione di Z perché questo implicherebbe $x_0 = x_1 = 0$, che è una contraddizione.
$y = \frac{x_1}{x_2} \in K(Z)$ verifica l'equazione $y^{d-1} - x_2 f_d(y, 1) = 0$. In f_d compaiono potenze di y di grado minore o uguale a 2. Questa è una relazione di dipendenza integrale in $A(Z)$, quindi y è integro su $A(Z)$. A maggior ragione è integro sul suo sopranello $A(Z)_{(x_1,x_2)}$. Se per assurdo $y \in A(Z)_{(x_1,x_2)}$ si avrebbe $y = \frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in A(Z), b \notin (x_1, x_2)$ cioè

$$bx_1 - ax_2 = 0 \text{ in } A(Z) \Rightarrow bx_1 - ax_2 = \alpha\big(x_1^{d-1} - f_d(x_1, x_2)\big), \alpha \in A^{(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(b - \alpha x_1^{d-2}) = ax_2 - \alpha f_d(x_1, x_2)$$

Se x_2 divide il secondo membro, allora x_2 divide il primo membro, ma x_2 non divide x_1, perché sono primi. Allora x_2 divide $b - \alpha x_1^{d-2}$

$$b - \alpha x_1^{d-2} = \beta_{x_2}, \beta \in A^{(2)} \Rightarrow b = \alpha x_1^{d-2} + \beta x_2, (d \geq 3 \text{ per ipotesi }) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \in (x_1, x_2) \text{ in } A^{(2)} \Rightarrow b \in (x_1, x_2) \text{ in } A(Z)$$

ma è una contraddizione, quindi $y \notin A(Z)_{x_1,x_2}$. Questo discorso è stato fatto solo per $d > 2$ perché per $d = 2$ è stato affrontato precedentemente Quindi non è integralmente chiuso per $d > 2$. $\square$

Osservazione 50. Poichè φ^* è un isomorfismo, entrambi devono essere integralmente chiusi. È possibile definire φ^* solo se $d = 2$ e questo implica che $\overline{Z}$ è una conica non degenere.

Proposizione 12.25.

$$P, Q \in U' = \overline{Z} - \{0\} \colon \varphi(P) = \varphi(Q) \Rightarrow \begin{array}{l} P \vee Q \subseteq \overline{Z} \\ \forall\, P' \in P \vee Q - \{0\} \quad \varphi(P') = \varphi(P) = \varphi(Q) \end{array}$$

Dim. Se $\varphi(P) = \varphi(Q)$ si ha che P e a sono allineati con 0 per come è fatta la proiezione:

$$\varphi(P) = \varphi(Q) = (0 \vee P) \cap H_0 = (0 \vee Q) \cap H_0$$

Se $P = [x_0, \ldots, x_n]$ e $Q = [y_o, \ldots, y_n]$ possiamo perciò assumere

$$x_i = y_i, i = 1, \ldots, n$$

e perché $0 \vee P$ ha equazioni

$$\begin{cases} y_o = \lambda x_0 + \mu \\ y_i = \lambda x_i \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

allora

$$[y_0, \ldots, y_n] = [\lambda x_0 + \mu, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n] = [x_0 + \frac{\mu}{\lambda}, x_1, \ldots, x_n]$$

Consideriamo

$$x_0 f_{d-1}(x_1, \ldots, x_n) - f_d(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ e } y_0 f_{d-1}(y_1, \ldots, y_n) - f_d(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

perché $P, Q \in \overline{Z}$. Si moltiplichi la prima equazione per λ e la seconda equazione per μ e sommando si ha:

$$(\lambda x_0 + \mu y_0) f_{d-1}(x_1, \ldots, x_n) - f_d(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

e dunque $P \vee Q \subseteq \overline{Z}$.
Inoltre per ogni $P' \in P \vee Q - \{0\}, \varphi(P') = \varphi(P) = \varphi(a)$ per come è fatta la proiezione. Dalla proprietà si ricava che se $n = 2$ segue φ iniettiva su $U' = \overline{Z} - \{0\}$, perché $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, in quanto luogo di zeri di due equazioni

in due incognite, con polinomi primi tra loro e sono i punti $A \in Z_1 \cap Z_2$ che provengono da ogni punto della retta $A \vee 0$.
Se invece $n > 2$ segue che φ non risulta iniettiva sull'insieme delle rette di $\overline{Z}$ passanti per $0 = Z_p(f_d, f_{d-1})$. Infatti se $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ tale che $0 \vee P \subseteq \overline{Z}$, e poichè $0 \vee P$ ha equazioni $\begin{cases} y_i = tx_i \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$ allora

$$f_{d-1}(tx_1, \ldots, tx_n) - f_d(tx_1, \ldots, tx_n) = 0$$

quindi

$$t^{d-1} f_{d-1}(x_1, \ldots, x_n) - t^d f_d(x_1, \ldots, x_n) \text{ è identica}$$

Risulta $f_d = f_{d-1} = 0$ e dunque $0 \vee P \subseteq Z_p(f_d, f_{d-1})$. Vale anche il viceversa: $\{0 \vee P\} = Z_p(f_d, f_{d-1})$.
In conclusione, se $n = 2$, l'applicazione ψ è un morfismo, perché $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ e ψ è ovunque definita per cui è un morfismo come applicazione razionale ovunque definita. Invece se $n > 2$ allora $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ e ψ non è definito in $Z_1 \cap Z_2$, perché i punti di $Z_1 \cap Z_2$ sono immagini delle rette $0 \vee P \subseteq \overline{Z}$. $\square$

Dato l'insieme di definizione $U = H_0 - (Z_1 \cap Z_2)$ di ψ:

Proposizione 12.26.

$$P, Q \in U, \psi(P) = \psi(Q) \Leftrightarrow \begin{cases} P, Q \in Z_1 \ \textit{e} \ \psi(P) = \psi(Q) = 0 \\ \ \textit{oppure} \\ P = Q \end{cases}$$

Dim. Se $P, Q \in H_0 - (Z_1 \cap Z_2)$ e $\psi(P) = \psi(Q)$ allora $0 \vee P, 0 \vee Q$ appartengono al cono tangente in 0 a $\overline{Z}$ e non sono inclusi in $\overline{Z}$. Segue

$$\psi(P) = \psi(Q) = 0$$

e

$$\psi(P) = [f_d(P), x_1 f_{d-1}(P), \ldots, x_n f_{d-1}(P)] = [1, 0, \ldots, 0] = 0$$

cioè

$$\begin{cases} f_d(P) = 1 \\ x_i f_{d-i}(P) = 0 \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Poichè non tutti gli x_i sono nulli, $f_{d-1}(P) = 0$ e allora $P \in Z_1$. Analogamente $Q \in Z_1$. Ora dire che $P, Q \in Z_1$, significa che

$$f_{d-1}(P) = f_{d-1}(Q) = 0$$

e dunque

$$\psi(P) = \psi(Q) = \big[f_d(P), x_1 f_{d-1}(P), \ldots, x_n f_{d-1}(P)\big] = [1, 0, \ldots, 0] = 0$$

$$\psi(P) = \psi(Q) \neq 0 \Rightarrow \varphi\big(\psi(P)\big) = \varphi\big(\psi(Q)\big) \Rightarrow \varphi(P) = \varphi(Q) \Rightarrow P = Q$$

$\Leftarrow$) È ovvio. $\square$

Definizione 12.27. $\varphi\colon \overline{Z} \dashrightarrow H_0$ è detta proiezione stereografica del monoide Z (o $\mathbf{Z}$) su H_0 dal suo vertice 0.

Esempio 12.28. Le cubiche piane di equazioni $x_0x_1^2 = x_2^3; x_2^2x_0 = x_1^2(x_1+x_0)$ sono monoidi, allora sono varietà razionali e non sono isomorfi a $\mathbb{P}^1$.

Osservazione 51. Le quadriche irriducibili sono monoidi. Infatti sia Γ una quadrica irriducibile, dunque esistono dei punti $P \in \Gamma$ e $Q \in \Gamma$ tale che $P \vee Q \nsubseteq \Gamma$, cioè esistono punti semplici, altrimenti Γ conterrebbe tutte le rette che congiungono i suoi punti e di conseguenza sarebbe contenuto in un iperpiano, ma ciò è una contraddizione perché irriducibile.
Cambiando coordinate in modo che $P = [1, 0, \dots, 0]$, l'equazione di Γ in $\mathbb{P}^n (n \geq 2)$ allora, essendo di secondo grado, si può ordinare in x_0 e diventa

$$x_0^2 f_0 + x_0 f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

con f_i di grado i. Se $P \in \Gamma$ allora $f_0 = 0$, altrimenti, sostituendo P si ha

$$x_0 = 0 \Rightarrow P \notin \Gamma$$

e l'equazione di Γ è

$$x_0 f_1(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$f_1 \not\equiv 0$, altrimenti Γ è il cono di vertice P e P diventerebbe un punto doppio, che è una contraddizione. Si conclude che Γ è un monoide.

Analizziamo il caso delle **quadriche di $\mathbb{P}^3$**. Dunque $n = 3$ e si ha che f_1 è di primo grado in tre variabili e quindi è una retta; f_2 è di secondo grado in 3 variabili, per cui è una conica del piano. Ci sono due casi, perché Z_1 e Z_2 non hanno componenti comuni:

1° caso) $Z_1 \cap Z_2$ è costituita da due punti distinti. In P passano 2 rette contenute nella quadrica e Q è non degenere.

2° caso) $Z_1 \cap Z_2$ costituito da un unico punto. Esiste un'unica retta per P per cui Q è un cono.

Si possono cambiare le variabili in modo che l'equazione di Q diventi del tipo: $x_0x_1 = f_2(x_1, x_2, x_3)$. Risulta

$$\begin{cases} x_0x_1 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow f_2(0, x_2, x_3) = 0 \text{ ha due radici distinte}$$

Può anche $f_2(0, x_2, x_3) = 0$ avere un'unica radice di molteplicità due a meno di proporzionalità. Ordinando rispetto a x_1 si ha:

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + b(x_2, x_3)x_1 + c(x_2, x_3)$$

con b polinomio di primo grado, c polinomio di secondo grado, e a una costante. Allora $f_2(0, x_2, x_3) = c(x_2, x_3)$. Cambiamo le coordinate su $\overrightarrow{x_1}$, facendo in modo che le radici di f_2 siano i punti fondamentali di $\overrightarrow{x_1}$, cioè $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$.

1° caso) $\Rightarrow c(x_2, x_3) = ax_2^2 + bx_2x_3 + cx_3^2$ deve avere queste come radici $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = 0 \leftarrow \text{per}[0,1,0] \\ c = 0 \leftarrow \text{per}[0,0,1] \end{cases} \Rightarrow c(x_2, x_3) = bx_2x_3$ e possiamo assumere $b = 1$ (oppure dividere)

2° caso) Il punto $[0, 0, 0, 1]$ deve essere radice doppia $\Rightarrow c = 0$ (per essere radice) e $b = 0$ (per essere radice doppia) $\Rightarrow c(x_2, x_3) = x_2^2$ (dividiamo per a).

Quindi $c(x_2, x_3) = \begin{cases} x_2x_3 & 1°caso \\ x_2^2 & 2°caso \end{cases} \Rightarrow$ l'equazione di Q diventa

$x_0x_1 = x_2x_3$ 1°)caso
$x_0x_1 = x_2^2$ 2°)caso

Infatti l'equazione è $x_0x_1 = f_2(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow x_0x_1 = ax_1^2 + b(x_2, x_3)x_1 + c(x_2, x_3) \Leftrightarrow x_0x_1 = x_1(ax_1 + a'x_2 + a''x_3) + c(x_2, x_3) \Leftrightarrow c(x_2, x_3) = x_1(x_0 - ax_1 - a'x_2 - a''x_3)$. Cambiando coordinate perché il coefficiente di x_0 è diverso da zero, $\begin{cases} x'_0 = x_0 - ax_1 - a'x_2 - a''x_3 \\ x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$

e otteniamo 1°) e 2°). La 2°) è un cono, nella conica piana di equazione 2°) di vertice $[0, 0, 0, 1]$, punto all'∞ di $\overrightarrow{x_3}$.

1° caso) l'equazione assume la forma $\begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 0$. Consideriamo $\varphi_1\colon [x_0, x_1, x_2, x_3] \in Q \to \begin{cases} [x_0, x_2] \text{se}\, x_0 \neq 0 \,\text{opp.}\, x_2 \neq 0 \\ [x_3, x_1] \text{se}\, x_3 \neq 0 \,\text{opp.}\, x_1 \neq 0 \end{cases}$ $\in \mathbb{R}^1$

$\varphi_2\colon [x_0, x_1, x_2, x_3] \in Q \to \begin{cases} [x_0, x_3] \,\text{se}\, x_0 \neq 0 \,\text{opp.}\, x_3 \neq 0 \\ [x_2, x_1] \,\text{se}\, x_2 \neq 0 \,\text{opp.}\, x_1 \neq 0 \end{cases} \in \mathbb{R}^1$

φ_1, φ_2 sono morfismi perché localmente definiti da polinomi di primo grado. Q varietà proiettiva $\Rightarrow K(Q) = S(a)_{\big((0)\big)}$.

$\forall\, [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, consideriamo $\varphi_1^{-1}\big([\lambda, \mu]\big) = \big\{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in Q \mid (x_0, x_2) \sim (\lambda, \mu) \,\text{oppure}\, (x_3, x_1) \sim (\lambda, \mu)\big\} = \big\{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in Q \mid rg \begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = 1 \,\text{oppure}\, rg \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = 1\big\} = Q \cap Z_p(\mu x_0 - \lambda x_2) = Q \cap Z_P(\mu x_3 - \lambda x_1) = Q \cap Z_p(\mu x_0 - \lambda x_2) \cap Z_P(\mu x_3 - \lambda x_1)$ (infatti $rg \begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = 1$ perché $(x_0, x_2) \sim (x_3, x_1)\big)$.

Consideriamo $\begin{cases} \mu x_0 - \lambda x_2 = 0 \\ \mu x_3 - \lambda x_1 = 0 \end{cases}$ sono piani linearmente indipendenti. Allora si intersecano in una retta $r_{[\lambda,\mu]}$. α' interseca la Q in

$\varphi_1^{-1}[\lambda,\mu]$. Quindi si ha $Q \cap^r [\lambda,\mu] =^r [\lambda,\mu] = \varphi_1^{-1}\big([\lambda,\mu]\big)$]. Analogamente $\varphi_r^{-1}\big([\lambda,\mu]\big)$ è una retta ${}^s[\lambda,\mu]$, contenute in Q, di equazione
$$\begin{cases}\mu x_0 - \lambda x_3 = 0\\ \mu x_2 - \lambda x_1 = 0\end{cases}$$
Al variare di $[\lambda,\mu]$ abbiamo le due schiere di rette Q. Infatti:

a) Tutte e sole le rette di Q sono queste.
b) Due rette dello stesso sistema non si intersecano.
c) Due rette di sistemi distinti si intersecano.
d) Nessuna retta di un sistema è uguale a quella di un altro.

Per provare a) Sia $r \subset Q$. Consideriamo ${\varphi_1}_{|r} = \psi_1$ e ${\varphi_r}_{|r} = \psi_2 \colon r \to \mathbb{P}^1$. Si ha $r \simeq \mathbb{P}^1$, ma un morfismo di $\mathbb{P}^1$ in sé o è costante o suriettivo. Infatti se non è suriettivo, si ha $\varphi(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^1 - \{\text{punto}\} \cong \mathring{A}^1$, ma non esiste un morfismo non costante da una varietà proiettiva a una varietà affine. Quindi ψ_1 e ψ_2 suriettive oppure costanti. Se esiste $i = 1,2$ tale che $\psi_i = \text{cost}$, allora r è la controimmagine di un punto $[\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1$, dimostrato. Se per ogni $i = 1,2, \psi$ è suriettiva, poiché la controimmagine dei punti tramite le φ_i sono rette, per ogni $P \in \mathbb{P}^1, \psi_i^{-1}(P) = r \cap \varphi_i^{-1}(P) = \{\text{punto}\}$. Quindi ψ_i è biettiva. Ma $\varphi_i^{-1}(P)$ è una retta, quindi per ogni $P \in \mathbb{P}^1$, si ha che r interseca in un unico punto tutte le rette delle due schiere. Fissiamo una retta $r_{[\lambda,\mu]}$ di una schiera. Le rette $s_{[\lambda,\mu]}$ dell'altra schiera si ottengono intersecando piani passanti per $r_{[\lambda,\mu]}$ con Q. Per quanto visto r dovrebbe intersecare tutte le $r_{[\lambda,\mu]}$ e le $s_{[\lambda,\mu]}$ al variare di $[\lambda,\mu]$. Allora r dovrebbe intersecare tutti questi piani passanti per $r_{[\lambda,\mu]}$

Per provare la b). Due rette dello stesso sistema sono controimmagini di punti distinti nella stessa applicazione, quindi non si intersecano. Per provare la c). La mutua posizione di rette di sistemi distinti è descritta dal sistema $\begin{cases}\mu x_0 - \lambda x_2 = 0\\ \mu x_3 - \lambda x_1 = 0\\ \overline{\mu} x_0 - \overline{\lambda} x_3 = 0\\ \overline{\mu} x_2 - \overline{\lambda} x_1 = 0\end{cases}$ Per provare la d). Segue dal fatto che l'intersezione è un punto.

$$\longleftrightarrow$$

Questa quadrica non è isomorfa a $\mathbb{P}^2$ perché esistono curve che non si intersecano , mentre le curve piane proiettive hanno sempre intersezione diversa dal.
Invece Q è birazionale a $\mathbb{P}^2$. Infatti c'è l'aperto $Q - \{a,b\}$ che è birazionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2 - \{A \vee B\}$ tramite la proiezione stereografica

Sia V una varietà, l'insieme delle trasformazioni birazionali di V in sé, indicato con $B(V)$, è un **gruppo** rispetto alla composizione di trasformazioni birazionali; l'insieme dei isomorfismi di V in sé $Q(V)$ è un sottogruppo di $B(V)$.

Definizione 12.29. Se $V = \mathbb{P}^n, B(\mathbb{P}^n)$ è chiamato **gruppo di Cremona di** $\mathbb{P}^{\mathbf{n}}$, o trasformazioni cremoniane di $\mathbb{P}^n$.

Esempio 12.30. Consideriamo il triangolo fondamentale del piano $\mathbb{P}^2$, dove

$$\begin{array}{l} a = B \vee C \\ b = A \vee C \\ c = A \vee B \end{array}$$

Sia $U = \mathbb{P}^2 - \{A, B, C\}$ aperto e consideriamo

$$\varphi\colon [x_0, x_1, x_2] \in U \to [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1] \in \mathbb{P}^2$$

che è un morfismo. Sia $[(U, \varphi)]_{\mathcal{R}}$, l'applicazione razionale $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^r$ risulta essere birazionale. Infatti φ è definita in U, perché $P \in U$, se e solo se P non è nessuno dei tre punti A, B, C, cioè P ha al più una coordinata nulla, per esempio. $x_0 \neq 0, x_1 \neq 0$, allora almeno la terza coordinata di $\varphi(P)$ è diversa da zero e dunque ha senso $\varphi\big((P)\big)$
U è l'insieme di definizione di φ. Sia $U' = \mathbb{P}^2 - \{a \cup c \cup c\}$.

$$P = [x_0, x_1, x_2] \in U' \Leftrightarrow x_0x_1x_2 \neq 0$$

ogni coordinata è diversa da 0. Segue $\varphi(P) = [a_1a_2, a_0a_2, a_0a_1]$ ha tutte le coordinate diverse da 0 , quindi

$$\varphi(P) \in U' \Rightarrow \varphi\big(U'\big) \subseteq U'$$

Se $[a_0, a_1, a_2] \in U'$ allora $[a_0, a_1, a_2] = \varphi\big([a_1a_2, a_0a_2, a_0a_1]\big)$.
Infatti, esplicitando il secondo membro, si ottiene

$$[a_0^2a_1a_2, a_0a_1^2a_2, a_0a_1a_2^2] = [a_0, a_1, a_2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(U') \supseteq U' \Rightarrow \varphi(U') = U' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{\varphi(U')} = \mathbb{P}^2 \Rightarrow \varphi \text{ è dominante.}$$

Si ha anche che $\varphi^2 = id_{U'}$, allora φ coincide con la sua inversa e quindi φ **è involontaria**.
Poi φ è una trasformazione cremoniana che induce un isomorfismo di $U' \to U'$.
Inoltre a ha equazione $x_0 = 0$, dunque i punti di a sono del tipo $[0, x_1, x_2]$ e

$$\varphi\big([0, x_1, x_2]\big) = [1, 0, 0] = A$$

b ha equazione $x_1 = 0$, allora i punti di b sono del tipo $[x_0, 0, x_2]$ e

$$\varphi\big([x_0, 0, x_2]\big) = [0, 1, 0] = B$$

c ha equazione $x_2 = 0$ allora i punti di c sono del tipo $[x_0, x_1, 0]$ e

$$\varphi\big([x_0, x_1, 0]\big) = [0, 0, 1] = C$$

Possiamo perciò applicare φ se e solo se $x_1 x_2 \neq 0$. Quindi la retta a va in A. Analogamente per le altre:

$$\varphi\big(a - \{B, C\}\big) = A, \varphi\big(b - \{A, C\}\big) = B, \varphi\big(c - \{A, B\}\big) = C$$

Si dice che la retta a viene contratta nel punto A o che il punto A viene dilatato nella retta a.
$\varphi\colon U = \mathbb{P}^2 - \{A, B, C\} \to \mathbb{P}^2$ non è definito in A, B, C perché $a \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi^{-1} = \varphi} a$. Allora A va in tutti i punti di a e quindi φ non è univoca in A. Vediamo il significato della dilatazione. Sia r una retta passante per A dunque r ha equazioni $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$, perché appartiene al fascio di centro A. $\varphi(r)$ si ottiene ponendo $x_0 x_2$ in x_1 e $x_0 x_1$ in x_2, avremo

$$\lambda x_0 x_2 + \mu x_0 x_1 = 0 \Leftrightarrow x_0(\lambda x_2 + \mu x_1) = 0$$

È una conica spezzata nelle rette di equazioni $x_0 = 0$ e $\lambda x_2 + \mu x_1 = 0$. La prima è la retta a, invece $\lambda x_2 + \mu x_1 = 0$ è una retta r'. $A \in r'$ ed è l'immagine (o la controimmagine perché $\varphi = \varphi^{-1}$) di $r - \{A\}$.
Il punto A viene mandato da φ in R (o meglio nella retta a), il punto Q viene mandato da φ in A (perché $Q \in a$)
Quindi $\varphi\colon \begin{matrix} A \to a \\ a \to A \end{matrix} \big(R = [0, -\lambda, \mu]\big), r \to r'$
φ induce una trasformazione cremoniana tra r e r', lineare perché su $\mathbb{P}^1$ le trasformazioni sono lineari.
Questa trasformazione $r \to r'$ è una proiettività del fascio di rette perché r ha equazione $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$, r' ha equazione $\lambda x_2 + \mu x_1 = 0$. La proiettività è:

$$[\lambda, \mu] \to [\mu, \lambda]$$

applicazione che scambia le coordinate. Questa proiettività del fascio quindi mette in corrispondenza lineare rette del fascio escluse b, c perché b ha equazione $x_2 = 0$ e viene trasformata in $x_0 x_1 = 0$ allora $x_1 = 0$ ed è trasformata in C, ma tra b e c non c'è proiettività perché i punti di $b - \{A, C\}$ vanno in B, poi C è dilatato in c ed A è dilatato in a. La proiettività è degenere perché a $b - \{A, C\}$ corrisponde un unico punto.
Analogamente per i fasci di centri B e C. La corrispondenza che alla retta r passante per A, associa il punto $Q \in a$ è una omografia (proiettività) tra il fascio di rette di centro A (visto come rette in $\mathbb{P}^2$) e la retta a

$$r \to R\big((R = r' \cap a) = [0, -\lambda, \mu]\big), \forall\, R \in a$$

Quindi si può interpretare come punto corrispondente a una "direzione uscente" da A e individuata da r. Analogamente per b, c, B, C. Cioè le rette a, b, c

(dilatazione di A, B, C) sono costituite da punti corrispondenti a "direzioni uscenti" da A, B, C rispettivamente.
Se $Q \in a$, poichè a è contratto in A, possiamo riguardare Q come punto appartenente alla retta r passante per A

$$Q \to A \in r'$$

C'è un'applicazione ben definita tra i punti di a e i **punti infinitamente vicini ad A**. La trasformazione quadratica induce una biezione tra a e $(A) = \{\text{punti infinitamente vicini ad } A\} \simeq \mathbb{P}^1$ ed è una retta proiettiva perché parametrizzata dal fascio di rette di centro a.
Vediamo che succede per rette del piano non passanti per A, B e C. Sia s una retta non passante per A, B, C. Essa ha equazione

$$\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$$

con $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. $\varphi(s)$ ha equazione:

$$\alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 + \gamma x_0 x_1 = 0$$

che è una conica Γ passante per A, B, C. Al variare di s tra le rette del piano, $\varphi(s)$ è sempre una conica passante per A, B e C, perché mancano i termini di secondo grado rispettivamente in x_0, x_1, x_2.
Se s intersecasse a, b, c rispettivamente nei punti L, M, N.
si avrà nella proiettività φ

$$L \to C, M \to B, N \to A$$

per cui c'era da aspettarsi che Γ passasse per A, B, C.

$$\Sigma = \Sigma(2, A, B, C) = \{\text{coniche passanti per } A, B, C\}$$

è proprio l'insieme delle coniche di equazione $\varphi(s)$. $\Sigma(2, A, B, C) \subseteq \mathbb{P}^{N(2,2)}$ è lo spazio proiettivo che parametrizza le coniche del piano. Σ è un piano proiettivo di $\mathbb{P}^{N(2,2)}$. In $\mathbb{P}^{N(2,2)}$ le coordinate sono i coefficienti dell'equazione, in questo caso $[\alpha, \beta, \gamma]$. φ induce perciò una biezione:

$$\overset{\vee}{\mathbb{P}}{}^2 \xrightarrow{\overset{\vee}{\varphi}} \sum(2, A, B, C)$$

$$[\alpha, \beta, \gamma] \longrightarrow [\alpha, \beta, \gamma]$$

Sapendo che le coordinate in $\overset{\vee}{\mathbb{P}}{}^2$ sono i coefficienti di equazioni di rette (s), $\overset{\vee}{\varphi}$ muta rette in coniche passanti per i 3 punti ed è una trasformazione lineare che si chiama **trasformazione quadratica**. Nel caso precedente le rette tangenti a Γ in A, B, C corrispondono nella φ a $s \cap a, s \cap b, s \cap c$ rispettivamente.

Teorema 12.31. *Fissati i tre punti $A = [1,0,0], B = [0,1,0], C = [0,0,1]$ del piano e consideriamo $\Sigma(2, A, B, C)$ e fissata la proiettività*

$$\overset{\vee}{\varphi}\colon \overset{\vee}{\mathbb{P}^2} \to \Sigma(2, A, B, C)$$

esiste una trasformazione quadratica $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $\overset{\vee}{\varphi}$ provenga da f (cioè che le trasformazioni quadratiche sono determinate dalle $\overset{\vee}{\varphi}$).

Dim. Si possono considerare A, B, C come i vertici della piramide fondamentale. Siano $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$, perché tutto è invariante per trasformazioni lineari nel piano. Γ ha allora equazione

$$\alpha x_1 x_2 + \beta x_0 x_2 + \gamma x_0 x_1 = 0$$

trasformando mediante la

$$\varphi\colon [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 - \{A, B, C\} \to [x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_1] \in \mathbb{P}^2$$

diventa

$$\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$$

Quindi per quanto visto prima si rientra nel caso precedente: $\overset{\vee}{\varphi}$ deriva da φ e allora $\overset{\vee}{\varphi}$ induce una trasformazione quadratica φ. $\square$

Definizione 12.32. La trasformazione $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ o un'applicazione che si ottiene da essa componendola con omografie di $\mathbb{P}^2$ in sè si dice trasformazione quadratica generale di $\mathbb{P}^2$.

Osservazione 52. Ogni retta s non passante per A, B, C è trasformata in una conica Γ per A, B, C e la corrispondenza $s \to \Gamma$ è una proiettività. Allora

$$P \in s, P = \bigcap_{P \in r} r \Rightarrow \varphi(P) = \bigcap_{\varphi(P) \in r} r'$$

dove le r' sono coniche. Dunque per trovare $\varphi(P)$, basta considerare il fascio di rette che è mutato in un fascio di coniche; questo ha 4 punti fondamentali: $A, B, C, \varphi(P)$ e dunque si trova $\varphi(P)$.

Definizione 12.33. Una trasformazione quadratica di $\mathbb{P}^2$ è una trasformazione cremoniana di $\mathbb{P}^2$ se ottenuta componendo proiezioni stereografiche, loro inverse e omografie.

Teorema 12.34. *(di Noëther) Il gruppo di Cremona di $\mathbb{P}^2$ è generato dalle trasformazioni quadratiche.*

$$B(\mathbb{P}^1) = Q(\mathbb{P}^1) = PGL(1, K)$$

Nulla si può dire per $\mathbb{P}^n, n > 2$.

Dim. L' uguaglianza $B(\mathbb{P}^1) = Q(\mathbb{P}^1)$ vale perché $Q(\mathbb{P}^1) \subseteq B(\mathbb{P}^1)$, e d'altra parte ogni applicazione razionale $\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ è un prolungamento e allora un morfismo. Inoltre la sua inversa è ancora $\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ che è un morfismo, quindi segue che è un isomorfismo. Per quanto riguarda $Q(\mathbb{P}^1) = PGL(1, K)$ si ha che: ogni omografia di $\mathbb{P}^1$ in sé è ovunque definita, perché $r = rgA = 1$, ed è un morfismo analogamente con la sua inversa, dunque segue che è un isomorfismo. Ciò garantisce $Q(\mathbb{P}^1) \supseteq PGL(1, K)$ Si può dimostrare fino a $PGL(1, K)$. Si può dimostrare che φ si può ottenere così. Infatti sia $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ una quadrica non degenere,

$$P, P' \in Q \colon P \vee P' \nsubseteq Q, \pi = \mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^3 \text{ tale che } P, P' \notin \pi$$

Siano

$$\psi \colon Q \dashrightarrow \pi \qquad \psi' \colon Q \dashrightarrow \pi$$

le proiezioni stereografiche di Q dai punti P e P' rispettivamente, allora ψ' o ψ^{-1} è una trasformazione quadratica generale di π. Sia $\varphi \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ un automorfismo dunque φ, φ^{-1} sono morfismi , quindi

$$\exists\, f_0, f_1 \in S_n^{(2)} \text{ tale che } \varphi \colon [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \to \big[f_0(x_1, x_2), f_1(x_0, x_1)\big] \in \mathbb{P}^1$$

$$\text{ed } \exists g_0, g_1 \in S_m^{(2)} \colon \varphi^{-1} \text{ tale che } [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \to \big[g_0(x_0, x_1), g_1(x_0, x_1)\big] \in \mathbb{P}^1$$

La composta $\varphi \circ \varphi^{-1}$ è ancora un morfismo, ponendo

$$\varphi \circ \varphi^{-1}\big([x_0, x_1]\big) = \Big[f_i\big(g_0(x_0, x_1), g_1(x_0, x_1)\big)\Big]_{i=0,1}$$

Inoltre poniamo $P_i(x_0, x_1) = f_i\big(g_0(x_0, x_1), g_1(x_0, x_1)\big)_{i=0,1}$ si ha $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{P}^1}$, e segue che esiste una funzione

$$\alpha \colon [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \to \alpha\big([x_0, x_1]\big) \in k^*$$

tale che

$$P_i(x_0, x_1) = \alpha\big([x_0, x_1]\big)x_i, i = 0, 1$$

perché $\varphi \circ \varphi^{-1} \neq [P_0, P_1] = [x_0, x_1]$

$$\frac{x_i}{P_i}, i = 0, 1 \Rightarrow \alpha \text{ è costante } \Rightarrow degP_i = 1$$

ma

$$degP_i = nm \Rightarrow n = m = 1 \Rightarrow \varphi \text{ è lineare .}$$

D'altra parte φ è un'omografia generalizzata e invertibile di $\mathbb{P}^1$ in sé e quindi $\varphi \in PGL(1, k)$. Dalla precedente osservazione si ha che:

$$B(\mathbb{P}^1) = \{\varphi \colon [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \to [ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1] \in \mathbb{P}^1, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Big\}$$

Rimane da dimostrare che tutti e soli gli automorfismi di $K(x_1)$ come k algebra, sono del tipo

$$\varphi\colon x_1 \in K(x_1) \dashrightarrow \frac{a+bx_1}{c+dx_1} \in K(x_1)\colon \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Infatti si osserva che se $\varphi\colon [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \to [ax_0 + bx_1, cx_0 + dx_1] \in \mathbb{P}^1$ con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ è un automorfismo di $\mathbb{P}^1$, ad esso corrisponde la trasformazione birazionale di $\mathbb{A}^1$ in sé. Dunque $\varphi\colon x_1 \in \mathbb{A}^1 \dashrightarrow \frac{a+bx_1}{c+dx_1} \in \mathbb{A}^1$ e quindi l'automorfismo φ^* di $K(x_1) \simeq K(\mathbb{P}^1)$ che si ottiene estendendo per k-linearità l'applicazione che a x_1 associa

$$\frac{a+bx_1}{c+dx_1} \in K(x_1)$$

Ciò prova che gli automorfismi di $K(x_1)$ come k-algebra, sono tutti e soli del tipo suddetto. $\square$

13 Scoppiamento in un punto

L'introduzione della nozione di prodotto tra varietà ci dà l'occasione di parlare di un importante esempio di applicazione birazionale tra varietà.
Sia $\mathbb{P}^n_k$ con coordinate omogenee $[x_0, \ldots, x_n]$ e $\mathbb{P}^{n-1}_k$ con coordinate omogenee $[y_1, \ldots, y_n]$. In $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ si consideri il sottoinsieme chiuso

$$\widetilde{\mathbb{P}^n} = \{([x_0, \cdots, x_n], [y_1, \cdots, y_n]) \in \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k : x_i y_j = y_i x_j \text{ con } i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Sia $P = [1, 0, \ldots, 0]$ il punto $\mathbb{P}^n_k$ e si consideri la proiezione:

$$p_1 : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k \to \mathbb{P}^n_k$$

$$([x_0, \cdots, x_n], [y_1, \cdots, y_n]) \to [x_0, \cdots, x_n]$$

Definizione 13.1. L'applicazione

$$\sigma \colon \widetilde{\mathbb{P}^n} \to \mathbb{P}^n_k$$

dove $\sigma = p_1|_{\widetilde{\mathbb{P}^n}}$ si chiama scoppiamento di $\mathbb{P}^n$ in P.

Proposizione 13.2. *$\widetilde{\mathbb{P}^n} - \sigma^{-1}(P)$ è una varietà quasi–proiettiva e $\widetilde{\mathbb{P}^n} - \sigma^{-1}(P) \overset{\sigma}{\simeq} \mathbb{P}^n_k - \{P\}$.*

Dim. Sia $Q = [a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n_k$, con $Q \neq P$, sicchè esiste un $i = 1, \ldots, n$ tale che $a_i \neq 0$. Allora

$$[y_1, \ldots, y_n] \in \sigma^{-1}(Q) \Rightarrow y_j = y_i \frac{a_j}{a_i} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Dal che si deduce $y_i \neq 0$. Se si prende $a_i = y_i$ si ha allora $y_j = a_j$. Pertanto

$$\sigma^{-1}(Q) = \{([a_0, \ldots, a_n], [a_1, \ldots, a_n])\}$$

Si consideri l'applicazione

$$\tau \colon Q \in \mathbb{P}^n - \{P\} \to \sigma^{-1}(Q) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

τ é un morfismo e poiché

$$\tau\left(\mathbb{P}^n - \{P\}\right) = \widetilde{\mathbb{P}^n} - \sigma^{-1}(P)$$

quest'ultimo insieme, che è localmente chiuso in $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$, è pure irriducibile, ed è dunque una varietà. Infine $\tau = \left(\sigma|_{\widetilde{\mathbb{P}^n} - \sigma^{-1}(P)}\right)^{-1}$ e ciò prova l'asserto. $\square$

Osservazione 53. Si ha che $\sigma^{-1}(P) = p_1^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$.

Si voglia dare un significato geometrico. A tale scopo sia $P \in \mathbb{P}^n_k$ e si prenda l'insieme

$$(P) = \{r \text{ retta } : P \in r\}.$$

(P) può, in maniera naturale, riprendersi come uno spazio proiettivo $(n-1)-$dimensionale. Se H è un qualunque iperpiano di $\mathbb{P}^n_k$ non contenente P, l'applicazione

$$\psi_H \colon Q \in H \to P \vee Q \in (P)$$

è un'omografia non degenere. Per H l'iperpiano d'equazione $x_0 = 0$ e scrivendo esplicitamente la ψ_H in coordinate omogenee. Sia ora $r \in (P)$ una retta luogo dei punti di $\mathbb{P}^n$ di coordinate

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_i = \mu a_i, \qquad i = 1, \dots, n \qquad \lambda, \mu \in k \end{cases}$$

L'applicazione τ ristretta a $r - \{P\}$ agisce nel modo seguente

$$\tau_{|r}([\lambda, \mu a_1, \dots, \mu a_n]) = ([\lambda, \mu a_1, \dots, \mu a_n], [a_1, \cdots, a_n]), \ \mu \in k^*$$

sicchè se si prolunga τ in P su r ponendo

$$\tau_{|r}(P) = ([1, 0, \dots, 0], [a_1, \dots, a_n])$$

si ha un morfismo $\tau_{|r} \colon r = \mathbb{P}^1_k \to \widetilde{\mathbb{P}^n}$. Denotiamo con $\tau_{|r} = \widetilde{r} \cap \sigma^{-1}(P)$. In definitiva otteniamo così una applicazione:

$$\omega \colon r \in (P) \to \tau_{|r}(P) \in \sigma^{-1}(P)$$

Proposizione 13.3. *ω è un'omografia.*

Dim. É ovvio che ogni punto di $\sigma^{-1}(P)$ è nella chiusura di qualche sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{P}^n} - \sigma^{-1}(P)$. Si noti infatti che per ogni retta $r \in (P)$, $\tau(r - \{P\})$ è una sottovarietà di $\widetilde{\mathbb{P}^n} - \sigma^{-1}(P)$, la cui chiusura in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ è $\widetilde{r}$: ciò segue dal fatto che, $\tau(r - \{P\})$ sta in $P_1^{-1}(\omega(r)) = \mathbb{P}^n$ ed è ivi isomorfa alla retta $\widetilde{r}$ meno il punto $\omega(r)$. $\square$

Identificato $\mathbb{P}^{n-1}_k$ con (P), $\widetilde{\mathbb{P}^n}$ si presenta come l'insieme delle coppie

$$(P', r) \in \mathbb{P}^n_k \times (P) = \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$$

tali che $P' \in r$. Se Q è ancora un punto di $\mathbb{P}^n_k$, possiamo allora definire l'insieme

$$\widetilde{\mathbb{P}^n}_Q = \left\{(P', r) \in \mathbb{P}^n \times (Q) = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \colon P' \in r\right\}$$

Se α è un'omografia di $\mathbb{P}^n_k$ in sè tale che $\alpha(P) > Q$, è chiaro che α induce una biezione

$$\overline{\alpha} \colon r \in (P) \to \alpha(r) \in (Q)$$

che è, come facilmente si constata, un'omografia. Resta allora determinato un isomorfismo

$$\alpha \times \overline{\alpha} \colon \mathbb{P}^n \times (P) = \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k \to \mathbb{P}^n_k \times (Q) = \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$$

ed è ovvio che

$$(\alpha \times \overline{\alpha})(\widetilde{\mathbb{P}^n}) = \widetilde{\mathbb{P}^n}_r$$

Dunque $\widetilde{\mathbb{P}^n}_Q$ è una varietà proiettiva, al pari di $\widetilde{\mathbb{P}^n}$ e $\alpha \times \alpha'$ induce un isomorfismo

$$\alpha' \colon \widetilde{\mathbb{P}^n} \to \widetilde{\mathbb{P}^n}_Q$$

Se $\sigma_Q \colon \widetilde{\mathbb{P}^n}_Q \to \mathbb{P}^n_k$ è la restrizione a $\widetilde{\mathbb{P}^n}_Q$ della prima proiezione canonica si ha che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{P}}^n & \xrightarrow{\alpha'} & \widetilde{\mathbb{P}}^n_Q \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma_Q} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

é commutativo.
Da quanto visto, tutti gli scoppiamenti di $\mathbb{P}^n_k$ nei suoi punti sono isomorfi a $\mathbb{P}^n_k$.

Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietá quasi–proiettiva, e sia $Q \in V$, e consideriamo

$$W_Q = \widetilde{\mathbb{P}}^n_Q \cap \sigma^{-1}(V - \{Q\})$$

Quest'ultimo insieme è una sottovarietà di $\widetilde{\mathbb{P}}^n$, e

$$W_Q \overset{\sigma_Q}{\simeq} V - \{Q\}$$

Allora W_Q é una sottovarietá chiusa di $\widetilde{\mathbb{P}}^n_Q$. Poniamo

$$\widetilde{V}_Q = W_Q \cap \sigma_Q^{-1}(V).$$

Proposizione 13.4. *Sia $\widetilde{V}_Q$ la trasformata propria di V nello scoppiamento di $\mathbb{P}^n_k$. Allora $\widetilde{V}_Q$ è irriducibile ed è localmente chiusa.*

Dim.

$$\sigma_Q^{-1}(V) = \sigma_Q^{-1}((V - \{Q\}) \cup \{Q\}) = \sigma_Q^{-1}(V - \{Q\}) \cup \sigma^{-1}(Q)$$

$$\Rightarrow \widetilde{V}_Q = W_Q \cap \sigma_Q^{-1}(V) = \left(W_Q \cap \sigma^{-1}(V - \{Q\})\right) \cup \left(W_Q \cap \sigma^{-1}(Q)\right)$$

Se $\widetilde{V}_Q$ fosse riducibile, poiché $\left(W_Q \cap \sigma^{-1}(V - \{Q\})\right)$ è un aperto di una componente, l'altra componente dovrebbe essere contenuta in V. Ma

$$\forall P \in \left(W_Q \cap \sigma^{-1}(Q)\right), P \in \overline{W_Q \cap \sigma^{-1}(V - \{Q\})} = W_Q$$

Quindi non é possibile che l'altra componente sia contenuta in V. Inoltre:

V localmente chiuso in $\mathbb{P}^n_k \Rightarrow W_Q$ chiusa in $\widetilde{\mathbb{P}}^n \Rightarrow \widetilde{V}_Q$ localmente chiuso in $\widetilde{\mathbb{P}}^n$.

Quindi l'applicazione $\sigma_{V,Q} = \sigma_{Q|V} \colon \widetilde{V}_Q \to V$ é un morfismo birazionale, perché è un isomorfismo di $\widetilde{V}_Q - \sigma_{V,Q}^{-1}(Q)$ su $V - \{Q\}$, che sono aperti, Allora $\sigma_{V,Q}$ è lo scoppiamento di V in Q. $\square$

Esempio 13.5. Lo scoppiamento di $\mathbb{P}^1_k$ in ogni suo punto è $\mathbb{P}^1_k$. Infatti

$$\widetilde{\mathbb{P}^1} \subseteq \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^0_k = \mathbb{P}^1_k \times P - \widetilde{\mathbb{P}^1} = \{(P', r) \in \mathbb{P}^1_k \times (P) \mid P' \in r\}$$

ma l'unica retta di (P) é $\mathbb{P}^1_k$, quindi $\widetilde{\mathbb{P}}^1 = \mathbb{P}^1$.

Proposizione 13.6. *Sia $V \subsetneqq \mathbb{P}^m$ un sottospazio di dimensione $n < m$. Se $Q \in V$, lo scoppiamento $\sigma_Q \colon \widetilde{V}_Q \to V$ coincide con lo scoppiamento di $V = \mathbb{P}^n_k$ in Q.*

Dim. Possiamo supporre che sia $Q = [1, 0, \ldots, 0]$ e che $V = \mathbb{P}^m_{0,\ldots,m}$, ossia che V abbia equazioni $x_{n+1} = \cdots x_m = 0$ in $\mathbb{P}^m$. In $\widetilde{\mathbb{P}^m}$, $\widetilde{V}_Q \cup r^{-1}(Q)$ ha equazioni

$$\begin{aligned} x_i y_j = x_j y_i \qquad & i, j = 1, \ldots, n \\ x_{n+1} = \cdots = x_m = 0 \end{aligned}$$

Si noti ora che $\widetilde{V}_Q$ è tutta contenuta nel luogo di equazioni

$$y_{n+1} = \cdots = y_m = 0$$

Infatti se $P \in \widetilde{V}_Q$ e $\sigma(P) \neq Q$, allora $\sigma(P) = [a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0]$, con un $i = 0, \ldots, n$ tale che $a_i \neq 0$. poiché

$$a_i y_j = a_j y_i \qquad j = 1, \ldots, n$$

prendendo $j = n+1, \ldots, m$, si trova $y_j = 0$, $j = n+1, \ldots, 1$. Allora $\widetilde{V}_Q$ è contenuto nel luogo di equazioni

$$x_i y_j = x_j y_i \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{1}$$
$$x_{n+1} = \cdots = x_m = 0 \tag{2}$$
$$y_{n+1} = \cdots = y_m = 0 \tag{3}$$

poiché ovviamente quest'ultimo è isomorfo allo scoppiamento di $\mathbb{P}^m_k$ in Q, se ne deduce che tali equazioni sono proprio equazioni di $\widetilde{V}_Q$ e da ciò l'asserto. $\square$

14 Morfismi finiti.

Siano V, W varietà affini e sia $f\colon V \to W$ un morfismo dominante, sicché $f^*\colon A(W) \to A(V)$ è un omomorfismo di $k-$algebre. Mediante f^*, $A(W)$ puó identificarsi con il sottoanello $f^*(A(W))$ di $A(V)$.

Definizione 14.1. Il morfismo f è finito se $A(V)$ è integrale su $A(W)$.

Esempio 14.2. Sia V una quadrica irriducibile di $\mathbb{A}_k$, allora V ha equazione del tipo:

$$f = x_n^2 + x_n f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) + f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \tag{1}$$

con $f_1, f_2 \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ di grado 1 e 2 rispettivamente. Consideriamo la proiezione p di V nell'iperpiano di equazione $x_n = 0$ dal punto all'infinito dell'asse x_n e si noti che $p^* : k[x_1, \cdots, x_{n-1}] \to \dfrac{k[x_1, \ldots, x_n]}{(f)}$ é un'immersione. E' ben chiaro che $A(V)$ si ottiene aggiungendo a $A^{(n-1)}$ l'elemento x_n che é integrale, sicché p é finita.

Esempio 14.3. Sia V una quadrica irriducibile di $\mathbb{A}_k$ di equazione

$$f = x_n f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) - f_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \tag{2}$$

con $f_1, f_2 \in k[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ di grado 1 e 2 rispettivamente. Ragionando allo stesso modo come nell'esempio precedente, si perviene alla medesima conclusione se f_1 é costante non nulla. Se invece f_1 é affettivamente di primo grado, p non é finita in quanto $\dfrac{f_2}{f_1}$ non é piú integrale su $A^{(n-1)}$. Se infatti lo fosse si avrebbe una relazione del tipo:

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^n + a_1\left(\frac{f_2}{f_1}^{n-1}\right) + \cdots + a_n = 0$$

con $a_1, \ldots, a_n \in a^{(n-1)}$, da cui

$$f_2^n + a_1 f_2^{n-1} f_1 + \cdots + a_n f_1^n = 0$$

Di qui si trarrebbe che $Z_a(f_1) \subseteq Z_a(f_2)$ sicché f_1 diventerebbe f_2, contro l'irriducibilitá di V

Esempio 14.4. Si consideri la cubica piana affine V di equazione $x_1x_2^2 + x_1 - x_2 = 0$. Se ne consideri la proiezione p sull'asse delle x_1. Alla p, che é un morfismo suriettivo, corrisponde il monomorfismo $p^*\colon A^{(1)} \to A(V)$, che manda x_1 in x_1. Il morfismo p pur essendo suriettivo, con controimmagini di punti di $\mathring{A}^1$ finiti in k, non é finito. Infatti $x_2 \in A(V)$ non é integrale su $A^{(1)}$.

Esempio 14.5. Si consideri un'ipersuperificie irriducible V di $\mathbb{A}_k^n$ di grado d e di equazione ridotta

$$f = x_n^d + x_n^{d-1} f_1 (x_1, \dots, x_{n-1}) + \cdots + f_d (x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$$

sicché la chiusura proiettiva non contiene il punto all'infinito dell'asse x_n. Si consideri la proiezione p di V sull'iperpiano di equazione $x_n = 0$ del punto all'infinito dell'asse x_n. Essa é chiaramente suriettiva e la controimmagine di ogni punto di $\mathbb{A}^{n-1}$ ha al piú ordine d. A p corrisponde il monomorfismo

$$p^* \colon A^{n-1} \to A(V)$$

dove $A(V) = \dfrac{k[x_1, \dots, x_n]}{(f)}$ e $p^*(x_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Poiché ovviamente x_n é integrale su $A^{(n-1)}$, p é un morfismo finito.

Proposizione 14.6. *La composizione di morfismi finiti é ancora un morfismo finito.*

Osservazione 54. Se V, W sono varietá affini e $f \colon V \to W$ é un morfismo finito con $dim\, V = dim\, W$. Infatti ogni elemento di $A(V)$ é algebrico su $A(W)$ e quindi ogni elemento di $K(V)$ é algebrico su $K(W)$, sicché $K(V)$ e $K(W)$ hanno lo stesso grado di trascendenza su k.

Allo scopo di dimostare alcune rilevanti proprietá dei morfismi finiti, iniziamo a dimostrare il seguente lemma:

Lemma 14.7. ?? *Se un anello B é un modulo di tipo finito su un suo sottoanello A, e se $\mathcal{I}$ é un ideale proprio di A, allora $\mathcal{I}B \neq B$.*

Dim. Sia $b_1, \dots, b_n$ un sistema di generatori di B su A. Se $\mathcal{I}B = B$, si avrebbero soluzioni del tipo

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \qquad a_{ij} \in \mathcal{I}$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij})\, b_j = 0 \tag{3}$$

da d il determinante della matrice $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|$. Dalla (3) si ricava agevolmente che $db_j = 0$, $i = 1, \dots, n$ sicché $dB = 0$ e quindi $d = 0$. Ma allora $1 \in \mathcal{I} = A$, il che é assurdo. $\square$

Teorema 14.8. *Per un morfismo finito valgono le seguenti proprietá:*

(a) ha fibre finite, ossia la controimmagine di ogni punto é un insieme finito;
(b) é suriettivo;

(c) é un'applicazione chiusa.

Dim. (a) Sia $f\colon V \to W$ un morfismo finito e sia $Q \in W$ e supponiamo $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$. Basta dimostrare che ogni coordinata x_i, $i = 1, \ldots, n$ assume nell'insieme $f^{-1}(Q)$ un numero finito di valori. Per le ipotesi si ha, per ogni $i = 1, \ldots, n$ una soluzione del tipo

$$x_i^{m_1} + b_{i_1} x_i^{m_i - 1} + \cdots + b_{im_i} = 0$$

con $b_{ij} \in A(W)$. Allora se $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ si ha

$$a_j^{m_i} + b_{i_1}(Q) a_i^{m_i - 1} + \cdots + b_{im_i}(Q) = 0$$

$i = 1, \ldots, n$, e ció prova che a_i puó assumere solo un numero finito di valori per ogni $i = 1 \ldots n$.
(b) Sia $Q \in W \subseteq \mathring{A}^m$ e supponiamo Q abbia coordinate $(b_1, \ldots, b_m)$. Siano poi $y_1, \ldots, y_m$ le coordinate in $A(W)$. Se $f^*(y_i) = f_i\,(x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$\forall P = (a_1, \ldots, a_n) \in V, P \in f^{-1}(Q) \Leftrightarrow f_i\,(a_1, \ldots, a_r) = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

Se

$$\mathfrak{M}_Q = (y_1 - b_1, \ldots, y_m - b_m)$$

é l'ideale di $A(W)$ corrispondente al punto Q, quanto sopra implica che

$$P \in f^{-1}(Q) \Leftrightarrow g(P) = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{I} = \mathfrak{M}_Q A(V)$$

Se fosse $f^{-1}(Q) = \varnothing$, allora sarebbe $\mathcal{I} = A(V)$, non essendovi massimali di $A(V)$ contenenti $\mathcal{I}$, e, in virtú del lemma, si avrebbe una contraddizione.
(c) Basta mostrare che se $Z \subseteq V$ é un chiuso irriducibile, anche $f(Z)$ é chiusa. Si noti allora che

$$\overline{f} = f_{|Z}\colon Z \to \overline{f(Z)}$$

é chiusa. Si ha infatti il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} A(V) & \xrightarrow{\alpha} & A(Z) \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow\ \overline{f}^* \\ A(W) & \xrightarrow{\beta} & A\left(\overline{f(Z)}\right) \end{array}$$

dove α, β sono ovviamente degli epimorfismi. Se $g \in A(Z)$ e $G \in A(V)$ é tale che $\alpha(G) = g$, si ha che G é integrale su $A(W)$ ossia si ha una relazione del tipo

$$G^n + f^*\,(a_1)\, G^{n-1} + \cdots + f^*\,(a_n) = 0$$

ossia

$$g^n + \alpha\,(f^*(a_1))\, g^{n-1} + \cdots + \alpha\,(f^*(a_n)) = 0.$$

Per la commutativitá del diagramma si ha allora

$$q^n + \overline{f}^*(\beta(a_1))g^{n-1} + \cdots + \overline{f}^*(\beta(a_n)) = 0$$

il che prova che g é integrale su $A\left((\overline{f(Z)})\right)$. Ma per la (b) $\overline{f}$ é suriettivo, ossia $f(Z) = \overline{f(Z)}$. $\square$

E' opportuno osservare esplicitamente che dalla dimostrazione della (c) del teorema (14.8) segue che la restrizione ad una sottovarietá di un morfismo finito é un morfismo finito sulla sua immagine. Il seguente teorema prova che la proprietá di finitezza per un morfismo é di carattere locale:

Teorema 14.9. *Siano V, W varietá affini e $f : V \to W$ un morfismo. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:*

(a) f é un morfismo finito;
(b) per ogni punto $p \in W$ vi é un intorno affine U di P in W tale che $f^{-1}(U) = U'$ é affine e $f : U' \to U$ é finita.

Dim. $a \Rightarrow b$) Ovvio.
$b \Rightarrow a$). Cominciamo con l'osservare che se $g \in A^{(n)}$ e se $U_W(g)$ é l'aperto principale associato a g si ha

$$f^{-1}(U_W(g)) = U_V(f^*(g))$$

Inoltre tanto $U_W(g)$ quanto $U_V(f^*(g))$ sono aperti affini. Poiché gli aperti prinicipali di W costituiscono una base per le topologie di W che é compatta, esistono un numero finito di elementi di $A(W)$, $g_1, \ldots, g_n$ tali che i morfismi indotti da f

$$f_i : U_i' = U_V(f^* g_i) \to U_i = U_W(g_i)$$

siano finiti.
Si osservi ora che

$$\mathcal{O}(U_i) = A\left(U_W(g_i)\right) = A(V)\left[\frac{1}{g_i}\right] \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$\mathcal{O}(U_i') = A\left(U_V(f^*(g_i))\right) = A(V)\left[\frac{1}{g_i}\right]$$

dove, come d'uso, pensiamo f^* come identificazione, sicché

$$f_i^* : A(W)\left[\frac{1}{g_i}\right] \to A(V)\left[\frac{1}{g_i}\right]$$

é l'applicazione naturalmente indotta da f^*. Per le ipotesi $A(V)\left[\frac{1}{g_i}\right]$ ha una base finita ω_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n_i$ sono una base di $A(V)$ su $A(W)$, mostrando con ció l'asserto, in virtú di una facile applicazione del lemma. Sia ora $b \in A(V)$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha per b una rappresentazione del tipo

$$b = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{g_i^{m_i}} \omega_{ij}$$

con m_i opportuni interi positivi e $a_{ij} \in A(W)$. Poiché $\bigcap_{i=1}^{n} Z_v\left(g_i^{m_i}\right) = \varnothing$, non esistono massimali di $A(W)$ che contengono $Y = (g_1^{m_1}, \ldots, g_n^{m_n})$ sicché $Y = A(W)$ ed esistono pertanto $h_1, \ldots, h_n \in A(W)$ tali che

$$1 = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i^{m_i}.$$

Si ha allora

$$b = b \sum_{i=1}^{n} h_i g_i^{m_i} = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i^{m_i} b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} h_i \omega_{ij}.$$

Ció prova l'asserto. □

Il teorema (14.9) offre lo spunto per una naturale generalizzazione del concetto di morfismo finito. Infatti si forniscono le seguenti definizioni.

Definizione 14.10. Siano V, W varietá quasi–proiettive, si dirá $f \colon V \to W$ un morfismo affine se

$$\forall P \in W \exists U \subset W \text{ intorno aperto affine di } P : U' = f^{-1}(U) \text{ affine}$$

Se in piú $f_{|U'} \colon U' \to U$ é finito, si dice che f é un morfismo finito.

Naturalmente il teorema (14.8) continua ad essere valido per i morfismi finiti cosí definiti.

Definizione 14.11. Se $Y \colon V \dashrightarrow W$ é una applicazione razionale (in particolare un morfismo), si dice che Y é genericamente finita se esiste un aperto U di W e un aperto U' di V entrambe non vuoti tra cui Y induce un morfismo finito.

Osservazione 55. Un morfismo tra varietá affini é affine. Infatti gli aperti principali sono affini e costituiscono una base per la topologia di Zariski. Inoltre la controimmagine di un aperto principale per un morfismo é ancora un aperto prinicpale.

Proposizione 14.12. *Se $f \colon V \to W$ é affine allora per ogni aperto affine U di W, $f^{-1}(U) = U'$ é un aperto affine di V*

Dim. Per l'osservazione fatta prima possiamo trovare un numero finito di $f_1, \ldots, f_m$ di elementi di $B = \mathcal{O}(U)$ tali che i relativi aperti principali in $U, U_1, \ldots, U_m$, che sono affini, siano tali che gli aperti $U_i' = f^{-1}(U_i)$ di U' siano affini. Poniamo

$$A = \mathcal{O}(U') \qquad A^i = \mathcal{O}(U'_i) \qquad A^{i,j} = \mathcal{O}\left(U'_i \cap U'_j\right) \qquad g_i = f_i \circ f \in A$$

Per ogni coppia $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, si hanno le catene di morfismi

$$B \xrightarrow{f^*} A \to A \to A^i \to A^{i,j}$$

essendo

$$K(U') = K(U'_i) = K\left(U'_i \cap U'_j\right) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(A^i) = \mathbb{Q}(A^{i,j})$$

Per ogni coppia $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, si ha

$$A^{i,j} = A^i_{g_j} = A^j_{g_i}$$

Dunque

$$h \in A^i \Rightarrow h \in A^{i,j}$$

sicché esiste una potenza $g_i^{n_i}$ di g_i tale che $g_i^{n_i} h \in A^j$ per ogni $j \neq i$, con $j = 1, \ldots, m$. Poiché $A = \bigcap_{j=1}^{m} A^j$, essendo $U'_1, \ldots, U'_m$ un ricoprimento aperto di U', si ha in definitiva $A^i \subseteq A_{g_i}$. L'inclusione opposta é del tutto evidente sicché $A^i = A_{g_i}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Pertanto A_{g_i} é, al pari di A^i, una $k-$algebra finitamente generata. Ne sia ω_{ij} un sistema di generatori di A su k. A tale scopo si procede come nelle prove del teorema (14.9), dopo aver osservato che un ideale del tipo $(g_1^a, \ldots, g_m^{a_m})$ in A é tutto A, perché, tramite f^* proviamo che $(f_1^a, \ldots, f_m^{a_m})$, che gode delle stesse proprietá. Poiché A é finitamente generato, U' é affine.

Esempio 14.13. Si consideri la proiezione $p_1 \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. L'aperto affine $\mathring{A}^1 \subseteq \mathbb{P}^1$ ha per controimmagine $\mathring{A}^1 \times \mathbb{P}^1$che non é affine; se lo fosse infatti, poiché $\mathring{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ contiene $\mathbb{P}^1$ come chiuso, $\mathbb{P}^1$ sarebbe affine, il che é assurdo.Questo é un esempio di di morfismo non affine.

Esempio 14.14. Si consideri in $\mathbb{P}^n$ un'ipersuperficie irriducibile V di grado d e se ne consideri la proiezione P da un punto $P \notin V$ su un iperpiano non contenente P. Potremo assumere, a meno di cambiamenti di variabili, che $P = [0, \ldots, 0, 1]$ e l'iperpiano sia quello di equazione $x_n = 0$. Allora, tenuto conto del fatto che $P \notin V$, l'equazione ridotta di V si scrive come

$$f = x_n^d + x_n^{d-1} f_1\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) + \cdots + f_d\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) = 0$$

con $f_i \in S^{(n-1)}$ polinomi omogenei di grado pari all'indice. Considerando l'iperpiano di equazione $x_i = 0$ come iperpiano all'infinito di $\mathbb{P}^n$, la parte affine V_i di V ha equazione

$$x_n^d + x_n^{d-1} f_1\left(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}\right) + \cdots + f_d\left(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}\right) = 0$$

e la p, ristretta a V_i, é la proiezione di essa sull'iperpiano affine di equazione $x_n = 0$ dal punto all'infinito dell'asse x_n. Tale proiezione é un morfismo finito (14.2,(ii)). Di qui subito si deduce che p é un morfismo finito.

Proposizione 14.15. *Ogni morfismo composto di morfismi finiti é suriettivo. Inoltre ogni morfismo finito é suriettivo.*

Proposizione 14.16. *Se $f\colon V \to W$ é un morfismo finito, $\dim V = \dim W$, K(V) risultando un'estensione algebrica di $K(W)$. Similmente se $y\colon V \dashrightarrow W$ é un'applicazione razionale genericamente finita, essa é dominante e $K(V)$ risulta un'estensione algebrica di $K(W)$, avendosi $\dim V = \dim W$.*

Lemma 14.17. *Sia $y\colon V \dashrightarrow W$ un'applicazione razionale dominante. Allora Y é genericamente finita se e solo se $y^*\colon K(W) \to K(V)$ é un'estensione algebrica, ovvero se e solo se $\dim V = \dim W$.*

Dim. Basta evidentemente ridursi al caso in cui V, W siano affini[7]. Per ogni $g \in K(V)$, g é algebrico su $K(W)$, quindi su $A(W)$. In particolare ogni $g \in A(V)$ é algebrico su $A(W)$, sicché si ha una relazione del tipo

$$a_0 g^n + a_1 g^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

con $a_i \in A(W)$, $i = 0, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$. Allora

$$a_0^n g^n + a_1 g^{n-1} + \cdots + a_0^{n-1} a_n = 0$$

sicché $a_0 g$ é intero in $A(W)$. Sia $b_1, \ldots, b_m$ un sistema di generatori di $A(V)$ su k e scegliamo $a_1, \ldots, a_m \in A(W)$ tali che $a_i b_i$ sia integrale su $A(W)$, $i = 1, \ldots, m$. Poniamo poi $F = a_1 \ldots a_m$ e sia

$$U = U_W(F) \qquad U' = U_V\left(y^*(F)\right)$$

Relativamente al morfismo $y\colon U' \to U$ si ha l'inclusione che estende y^* a:

$$y^*\colon A(W)\left[\frac{1}{F}\right] \to A(V)\left[\frac{1}{F}\right].$$

Ora un elemento di $A(V)\left[\frac{1}{F}\right]$ é del tipo

$$c = \frac{b}{F^h} \text{ con } b \in A(V)$$

Poiché $b_1, \ldots, b_m$ sono integrali su $A(W)\left[\frac{1}{F}\right]$, essendo $a_1, \ldots, a_n$ irriducibili in $A(W)\left[\frac{1}{F}\right]$, e poiché k é una espressione razionale intera di $b_1, \ldots, b_m$ a coefficienti in k, ne segue che $A(V)\left[\frac{1}{F}\right]$ é integrale su $A(W)\left[\frac{1}{F}\right]$. $\square$

---
[7] e y é un morfismo

Esempio 14.18. Dalle proposizioni (248) e (249), si deduce che un'ipersuperficie irriducibile V di $\mathbb{P}^n$ ha dimensione $n-1$. Consideriamo ora una qualunque proiezione p di V da un punto P su un iperpiano che non passi per P: p non é un morfismo ma é solo un'applicazione razionale. Come di commento potremo supporre $P = [0, \ldots, 0, 1]$, l'iperpiano sia quello di equazione $x_n = 0$. Se d é il grado di V, l'equazione ridotta é del tipo

$$f = x_n^a f_{d-a}\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) + \cdots + f_d\left(x_0, \ldots, x_{n-1}\right) = 0.$$

Si noti ora che l'aperto

$$U = \mathbb{P}^{n-1} - Z_p(f_{d-a})$$

é senz'altro contenuto in $p(V-\{P\})$, sicché p é dominante su $\mathbb{P}^{n-1}$ se $f_{d-a} \neq 0$, ossia se in f compare effettivamente x_n. Se ció non accade, d'altra parte, $p\left(V - \{P\}\right) = Z_p(f_d)$, l'ipersuperficie risultando un cono di vertice P. In tal caso p non é certo dominante. Tenendo presente il lemma (14.17), si conclude che la proiezione di un'ipersuperficie su di un iperpiano é sempre genericamente finita, a meno che non si tratti di un cono che proietta dal suo vertice.

Teorema 14.19. *Sia $f\colon V \to W$ un morfismo dominante della varietá quasi–proiettiva. Allora $f(V)$ contiene un aperto non vuoto di W.*

Dim. Basta evidentemente ridursi al caso in cui V, W siano entrambe affini. Allora $K(V)$ é un'estensione di $K(W)$. Sia $u_1, \ldots, u_r$ una base di trascendenza di $K(V)$ su $K(W)$: naturalmente é lecito assumere $u_1, \ldots, u_r \in A(V)$. Allora si ha la catena di inclusioni

$$A(W) \overset{\alpha}{\to} A(W)\left[u_1, \ldots, u_r\right] \overset{\beta}{\to} A(V)$$

tale che $\beta \circ \alpha = f^*$. Si noti che

$$A(W)\left[u_1, \ldots, u_r\right] \simeq A(W) \otimes_k A^{(r)}$$

sicché $A(W)\left[u_1, \ldots, u_r\right] = A(W \times \mathring{A}^r)$. α corrisponde alla proiezione di $W \times \mathring{A}^r$ sul primo fattore. Ora a β corrisponde un morfismo dominante $g\colon V \to W \times \mathring{A}^r$ cui puó applicarsi il lemma (14.17). Allora $g(V) \supseteq U$, con U aperto non vuoto di $W \times \mathring{A}^r$, che potrá supporsi principale, ossia

$$U = U_{W \times \mathring{A}^r}(F) \text{ con } F = \sum g_{i,\ldots i_r} u_1^{i_1} \ldots u_r^{i_r}$$

$g_{i_1}, \ldots, g_{i_r} \in A(W)$ e dove non tutti i $g_{i,\ldots i_r}$ sono nulli. Sia ora $P \in W$ non appartenente a $U\, Z_W(g_{i_1 \ldots i_r})$. E' allora che esiste qualche $Q \in W \times \mathring{A}^r$ tale che $F(Q) \neq 0$, ossia tale che $Q \in U$, sicché $P \in p_1(U)$. Dunque $p_1(U) \supseteq W - U\, Z_W(g_{i_1 \ldots i_r})$ sicché in definitiva

$$f(V) = p_1\left(g(V)\right) \supseteq p_1(U) \supseteq W - U Z_W(g_{i_1 \ldots i_r})$$

e $W - U\, Z_W(g_{i_1 \ldots i_r})$ é un aperto non vuoto di W perché almeno un $(g_{i_1 \ldots i_r})$ é diverso da 0. $\square$

Un esempio generale di morfismo finito tra varietá proiettive é fornito dai morfismi proiezione. sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietá proiettiva e siano $\mathbb{P}_1$ un sottospazio di $\mathbb{P}^n$ di dimensione r, $\mathbb{P}_2$ un sottospazio di $\mathbb{P}^n$ di dimensione $n-r-1$, sghenito con $\mathbb{P}_1$, e supponiamo che $\mathbb{P}_1 \cap V = \varnothing$. Ma allora serve considerare la proiezione

$$p\colon V \to \mathbb{P}_2$$

di V su $\mathbb{P}_2$ da $\mathbb{P}_1$, la cui immagine $V' = p(V)$ é una varietá di $\mathbb{P}_2$. Vale il seguente teorema

Teorema 14.20. *La proiezione $p\colon V \to p(V)$ é un morfismo finito.*

Dim. Poiché ogni proiezione puó pensarsi come composta di proiezioni di centro un punto, basta ridursi a questo caso. Poiché inoltre la restrizione di un morfismo finito ad un chiuso é finito, basta evidentemente ridursi al caso della ipersuperficie, giá esaminati in precedenza. □

Vedremo in seguito come estendere anche alle varietá le condizioni di (14.18). Il Lettore noti solo, per ora, come e perché la stessa dimostrazione del teorema (14.20) non valga a dimostrare un'omologa osservazione per proiezioni da centri che intersichino V.
Il teorema (14.19) ha alcune notevoli conseguenze:

Corollario 14.21. *Siano $f_0, \dots, f_1 \in S_d^{(n)}$ forme linearmente* [8] *indipendenti tali che $Z_p(f_0, \dots, f_r) \cap V = \varnothing$, essendo V una varietá di $\mathbb{P}^n$. Allora il morfismo*

$$y\colon P \in V \to [f_o(P), \dots, f_s(P)] \in \mathbb{P}^s$$

é finito sulla sua immagine.

Dim. Consideriamo l'applicazione di Veronese duale:

$$\widetilde{v}^*_{n,d}\colon \mathbb{P}^n \to \check{\mathbb{P}}^{N(n,d)}$$

che é un isomorfismo di $\mathbb{P}^n$ sulla sua immagine e poniamo $V' = \widetilde{v}^*_{n,d}(V)$. É chiaro che $f_0, \dots, f_s$ provengono, tramite $\vartheta_{n,d}$, da forme lineari $F_0, \dots, F_s$ linearmente indipendenti in $S_1^{N(n,d)}$. Si é quindi ricondotti al caso in cui $d = 1$. Allora y é la restrizione d a V di un'omografia degenere τ di centro $\mathbb{P}_1$ che non interseca V. D'altra parte τ si puó interpretare come composta di una proiezione e di un'omografia non degenere. L'asserto segue allora dal teorema (14.20). □

Corollario 14.22. *Per ogni varietá proiettiva V esiste un morfismo finito di V su qualche spazio proiettivo.*

Dim. Basta comporre proiezioni di punti esterni. □

[8] Il Lettore rimuova l'ipotesi di indipendenza lineare.

Osservazione 56. La dimensione dello spazio proiettivo immagine del morfismo finito di V é ben individuata essendo pari alla dimensione d di V. In altri termini il corollario (14.22) afferma l'esistenza di un sottospazio $\mathbb{P}_1$ di $\mathbb{P}^n$, essendo $V \subseteq \mathbb{P}^n$ di dimensione $k = n - d - 1$, tale che $\mathbb{P}_1 \cap V = \varnothing$, tale che la proiezione di V su un sottospazio $\mathbb{P}_2$ di dimensione d da $\mathbb{P}_1$ sia un morfismo finito.

Corollario 14.23. *Sia $V \subsetneq \mathbb{P}^n$ una varietá proiettiva e sia r il massimo intero tale che esistano sottospazi di $\mathbb{P}^n$ di dimensione r a intersezione vuota con V. Allora $r = n - dim\, V - 1$.*

Dim. Resta solo da provare che se $r > n - dim\, V - 1$, un sottospazio $\mathbb{P}_1$ di dimensione r interseca V. Se infatti ció non fosse, in virtú del teorema (14.20) si avrebbe un morfismo finito $y\colon V \to \mathbb{P}^{d'}$, e un $d' < dim\, V$, il che é assurdo. □

Il corollario (14.22) ha una versione affine classicamente nota come **teorema di normalizzazione di E. Noether**.

Corollario 14.24. *Per ogni varietá affine V esiste un morfismo affine di V su $\mathring{A}^d$, con $d = dim\, V$. Ovvero, per ogni $k-$algebra finitamente generata* [9] *A, con $tr\, deg_k \mathbb{Q}(A) {=} d$, esiste un monomorfismo $A^{(d)} \to A$ tale che A sia integrale su $A^{(d)}$.*

Dim. Si procede come nel caso proiettivo, proiettando successivamente da punti all'infinito che non appartengono alla chiusura proiettiva di V. □

15 Normalizzazione

Daremo ora un altro importante esempio di morfismo finito. A tale scopo cominciamo col dare qualche definizione. Prima di tutto si inizi a ricordare il concetto di anello integralmente chiuso.

Definizione 15.1. Sia A un dominio di integritá, allora si dice essere integralmente chiuso ogni elemento integrale del campo delle frazioni $K(A)$ appartiene a A.

Premesso ció possiamo fornire la definizione di varietá affine normale.

Definizione 15.2. Una varietá affine irriducibile X é normale se l'anello $K[X]$ é integralmente chiuso.

Sia considerata X una varietá affine irriducibile.

Lemma 15.3. *$K[X]$ é integralmente chiuso in $K(X)$.*

[9] priva di divisori dello 0.

Lemma 15.4. *Sia X una varietá affine , allora:*

$$X \text{ normale } \Leftrightarrow \mathcal{O}_P \text{ integralmente chiuso } \quad \forall P \in X.$$

Dim. $\Rightarrow$) Sia X unavarietá normale e sia $P \in X$. Si prenda $\alpha \in K(X)$ un elemento integrale su $\mathcal{O}_P$, cioé:

$$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathcal{O}_P : \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Per definizione, poiché l'insieme $\mathcal{O}_P$ é cosí costituito:

$$\mathcal{O}_P = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in A(X) \text{ con } g(P) \neq 0 \right\}.$$

Si ha in particolare

$$\alpha^n + \frac{f_1}{g_1}\alpha^{n-1} + \cdots + \frac{f_n}{g_n} = 0$$

e ponendo $h_0 = g_1 g_2 \cdots g_n$, e moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza, si ottiene:

$$h_0\alpha^n + h_1\alpha^{n-1} + \cdots + h_n = 0$$

dove $h_i \in K[X]$ e inoltre $h_i(P) \neq 0$, per ogni i. Si moltiplichi per h_0^{n-1}, si ha:

$$h_0^n\alpha^n + h_1\alpha^{n-1} + \cdots + h_n = (h_0\alpha)^n + (h_1\alpha)^{n-1} + \cdots + h_n = 0.$$

Ponendo $\beta = h_0\alpha$, risulta che β é integrale su $K[X]$. Essendo $K[X]$, ipotesi, integralmente chiuso, allora si ha $\beta \in K[X]$. Se $\alpha = \dfrac{\beta}{h_0}$ con $h_0(P) \neq 0$, quindi $\alpha \in \mathcal{O}_P$.

$\Leftarrow$) Se $\alpha \in K(X)$ é integrale su $K[X]$, allora

$$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in K[X] : \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Ma

$$a_i \in \mathcal{O}_P \quad \forall P \in X \Rightarrow \alpha \in \mathcal{O}_P \Rightarrow \alpha \in \bigcap_{P \in X} \mathcal{O}_P = K[X].$$

□

Definizione 15.5. Sia V una varietá quasi–proiettiva, e sia P un punto di V. Si dice che V é normale in P se l'anello $\mathcal{O}_{V,P}$ é integralmente chiuso.

Definizione 15.6. Si dice poi che V é normale, se lo é in ogni suo punto.

Proposizione 15.7. *Sia V una varietá quasi–proiettiva:*

(a) se V é affine, V é normale se e solo se $A(V)$ é integralmente chiuso;
(b) V é normale se e solo se esiste un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ di aperti affini normali.

Dim. La (b) é ovvia. Quanto alla (a) essa segue immediatamente dalla (b) e dal lemma (**??**). $\square$

Nelle applicazioni é utile avere qualche "criterio di normalitá". Uno dei piú semplici é il seguente:

Teorema 15.8 (Criterio di normalizzazione). *Ogni dominio a fattorizzazione unica é integralmente chiuso.*

Dim. Sia A un tal dominio e sia $\frac{f}{g} \in Q(A)$ integrale, con f, g primi tra loro. Se si ha:

$$\left(\frac{f}{g}\right)^n + a_1\left(\frac{f}{g}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

con $a_i \in A$, allora g divide f^n e dunque f sicché g é incompatibile. $\square$

Esempio 15.9. In applicazione del precedente criterio si ha che $\mathbb{A}$ é normale per ogni n, e quindi tale é $\mathbb{P}^n$, essendo ricoperto da aperti isomorfi ad $\mathbb{A}$. Allora la varietá di Veronese sono anch'esse normali, essendo isomorfe a $\mathbb{P}^n$. Anche le varietá di Segre sono normali perché ricoperti da aperti isomorfi a spazi affini. Quindi ogni quadrica non degenere in $\mathbb{P}^3$ é normale.

Esempio 15.10. Il cono quadrico $V \subset \mathbb{P}^3$, di equazione $x_1^2+x_2^2 = x_3^2$ é normale. Infatti $S(V) = \dfrac{S^{(3)}}{(x_1^2+x_2^2-x_3^2)}$ é integralmente chiuso, sicché l'asserto segue dal teorema. e dal lemma (**??**). Per provare che $S(V)$ é integralmente chiuso, si osservi che $\mathbb{Q}(S(V))$ si ottiene aggiungendo a $k\,(x_0, x_1, x_2)$ le radici del polinomio $X^2-(x_1^2+x_2^2)$, che é irriducibile su $k\,(x_0, x_1, x_2)$.Allora ogni elemento di $\mathbb{Q}(S(V))$ si scrive in unico modo come $u + vx_3$, con $u, v \in k\,[x_0, x_1, x_2]$. similmente ogni elemento di $S(V)$ si scrive in unico modo come $u + vx_3$, con $u, v \in k\,[x_0, x_1, x_2]$ sicché $S(V)$ é un $k\,[x_0, x_1, x_2]$ −modulo finitamente generato e dunque $S(V)$ é integrale su $k\,[x_0, x_1, x_2]$. Ora sia $\alpha = u+vx_3 \in \mathbb{Q}(S(V))$ integrale su $S(V)$. Per ovvie transitivitá di dipendenza integrale (cfr. lemma 14.17), α é integrale su $k\,[x_0, x_1, x_2]$, e il suo polinomio minimo é

$$(X-u-vx_3)\,(X-u+vx_3) = X^2-2uX+\left(u^2-v^2(x_1^2+x_2^2)\right).$$

Pertanto $u \in k\,[x_0, x_1, x_2]$, $v^2(x_1^2+x_2^2) \in k\,[x_0, x_1, x_2]$. Poiché $x_1^2+x_2^2 = \left(x_1+\sqrt{-1}x_2\right)\left(x_1-\sqrt{-1}x_2\right)$, ne segue $v \in k\,[x_0, x_1, x_2]$, sicché $\alpha \in S(V)$.

Ecco esempi di varietá non normali:

Esempio 15.11. Le cubiche piane proiettive di equazioni $x_0x_1^2+x_2^3$ e $x_2^2x_0 = x_1^2(x_1)$. Infatti per entrambe, se ne consideri la proprietá affine in $\mathbb{P}^2 - Z_p(x_0)$. Si tratta delle due curve di $\mathring{A}^2$ V_1, V_2 di equazioni $x_1^2+x_2^3$, $x_2^2 = x_1^2(x_1+1)$. Ora $A(V_1)$ non é integralmente chiuso, poiché $\dfrac{x_1}{x_2}$ é soluzione dell'equazione

$$X^2 - x_2 = 0$$

ma non sta in $A(V_1)$. similmente per $A(V_2)$, $\dfrac{x_2}{x_1}$ verifica l'equazione

$$X^2 - (x_1 + 1) = 0$$

ma non sta in $A(V_2)$.

Definizione 15.12. Una varietá proiettiva V é proiettivamente normale se $S(V)$ é normale.

Esempio 15.13. $\mathbb{P}^n$ é proiettivamente normale.

Esempio 15.14. Anche le varietá di Veronese $V_{n,d}$ sono proiettivamente normali: infatti $S(V_{n,d}) \cong \bigoplus_{a=0}^{\infty} S_{ad}^{(n)}$ e quest'ultimo anello é integralmente chiuso come il Lettore verificherá facilmente, tenendo conto che $S^{(n)}$ é integralmente chiuso. Similmente si verifica che le varietá di Segre sono proiettivamente normali. come si é visto in (iii) anche i cono quadrici in $\mathbb{P}^3$ sono proiettivamente normali.

Ogni varietá proiettivamente normale é anche normale; vi sono varietá proiettive isomorfe di cui una proiettivamente normale, l'altra no, sicché la proiettiva normalitá non é un carattere intrinseco, ma dipende dall'immersione. Si consideri infatti la curva razionale normale $V_{1.4}$ di $\mathbb{P}^4$ immagine del morfismo

$$v_{1.4} \colon\ [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \to \left[x_0^4, x_0^3 x_1, x_0^2 x_1^2, x_0 x_1^3, x_1^2\right] \mathbb{P}^d$$

e se ne consideri la proiezione V dal punto $[0,0,1,0,0]$ nell'iperpiano $x_2 = 0$. Tale proiezione é un isomorfismo. Infatti il morfismo inverso é dato da

$$P = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{P}^3 = \begin{cases} v_{4,1}(a_0, a_1) \in V_{4,1} & \text{se}\, a_0 \neq 0 \\ v_{4,1}(a_2, a_3) \in V_{4,1} & \text{se}\, a_3 \neq 0 \end{cases}$$

Tuttavia V, a differenza di $V_{4,1}$, non é proiettivamente normale. Infatti in $S(V)$ si ha la relazione

$$(x_1 x_3)^2 = x_1 x_2^2 x_4$$

il che comporta che $\dfrac{x_1 x_3}{x_2}$ sia integrale in $S(V)$. se stesse in $S(V)$, poiché $S(V)$ é quadrato, si avrebbe $x_1 x_3 = x_2 f$, con f lineare, e cioé del tipo $f = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$. Esisterebbe allora una quadrica con equazione del tipo

$$x_1 x_3 = x_2(a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

contenente V. Ma ció é assurdo. Si avrebbe infatti, per ogni $[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1$,

$$x_0^2 x_1^2 = a_0 x_0^4 + a_1 x_0^3 x_1 + a_2 x_0 x_1^3 + a_3 x_0^4$$

Definizione 15.15. Sia V una varieta quasi–proiettiva. (V', y) é una normalizzazione di V se V' é una varietá normale e $y \colon V' \to V$ é un morfismo finito e birazionale.

Allo scopo di provare l'esistenza della normalizzazione per le varietá affini, enunceremo il seguente teorema.

Teorema 15.16. ***(di finitezza della chiusura integrale)****. Sia $b = k[t_1, \ldots, t_s]$ una $k-$algebra finitamente generata, priva di divisori dello zero, $L = \mathbb{Q}(B) = k(t_1, \ldots, t_s)$ e K una estensione finita di L. La chiusura integrale A di B in K é un $B-$modulo di tipo finito.*

Da questo teorema segue:

Teorema 15.17. *Sia V una varietá affine. Allora:*

(a) esiste una normalizzazione (V', y) di V che gode delle seguenti proprietá:

(a_1) se W é una varietá affine e $g\colon W \to V$ é un morfismo finito e birazionale, esiste un unico morfismo $h\colon V \to W$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & V' \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ W \arrow[rr, "g"'] & & V \end{tikzcd} \tag{1}$$

commuti.

(a_2) se W e una varietá affine normale, $g\colon W \to V$ é un morfismo dominante, esiste un unico morfismo $h\colon W \to V'$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ V' \arrow[rr, "\varphi"'] & & V \end{tikzcd} \tag{2}$$

commuti.

(b) Se $\psi\colon V'' \to V$ é ancora una normalizzazione, allora esiste un isomorfismo $g\colon V' \to V''$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V'' \arrow[dl, "\psi"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

commuti.

Dim. Dal teorema (15.16) segue che la chiusura integrale B di $A(V)$ é una $k-$algebra finitamente generata e va di divisori dello zero. Esiste allora una varietá affine V' tale che $B = A(V')$ e, corrispondentemente, si ha un morfismo birazionale, ovviamente finito $y\colon V' \to V$. (V', y) é una normalizzazione di V. Se W verifica la tesi di (a_1), si ha un'inclusione $A(V) \subseteq A(W) \subseteq K(V)$. Poiché $A(W)$ é integrale su $A(V)$, si ha allora una induzione $A(W) \subseteq 1B =$

$A(V')$ e corrispondentemente si ha il morfismo $h\colon V' \to W$ che commuta il diagramma (1). Se poi W é una varietá che verifica le ipotesi di (a_2), si ha $K(V) \subseteq K(W)$ e $A(V) \subseteq A(W)$. Se $f \in B = A(V')$, $f \in K(W)$ ed é integrale su $A(V)$, quindi é integrale su $A(W)$, e pertanto $f \in A(W)$. Si ha allora $A(V') \subseteq A(W)$ e corrispondentemente si ha un morfismo $h\colon W \to V'$ che commuta il diagramma (2). La (b) segue subito da (a_1) e (a_2). $\square$

Esempio 15.18. Le cubiche affini di $\mathring{A}^2$, V_1, V_2 di equazioni rispettive

$$x_1^2 = x_2^3 \qquad x_2^2 = x_1^2 = x_1^3$$

non sono normali, come visto nel (15.9), (iv). Consideriamo i morfismi dominanti

$$y_1\colon t \in \mathring{A}^1 \to \left(t^3, t^2\right) \in V_1$$

$$y_2\colon t \in \mathring{A}^1 \to \left(t^2 - 1, t^3 - t\right) \in V^2$$

che corrispondono a monomorfismi

$$y_1^*\colon f(x_1, x_2) \in A(V_1) \to f\left(t^3, t^2\right) \in k[t]$$

$$y_2^*\colon f(x_1, x_2) \in A(V_2) \to f\left(t - 1, t^2 - t\right) \in k[t].$$

Poiché V_1 V_2 sono razionali si hanno le relazioni:

$$A(V_i) \subseteq k[t] = K(V_i) = \mathbb{Q}(A(V_i))$$

per $i = 1, 2$. Inoltre $k[t]$ é integrale su $A(V_i)$: infatti t é integrale su $A(V_i)$ (cfr.15.9, (iv)). Infine $k[t]$ é integralmente chiuso, in quanto dominio a fattorizzazione unica. Ossia $k[t]$ é la chiusura integrale su $A(V_i)$ e le due coppie $\left(\mathring{A}^1, y_1\right)$, $\left(\mathring{A}^2, y_2\right)$ sono normalizzazioni di V_1, V_2 rispettivamente. Il Lettore osservi che altre normalizzazioni (essenzialmente uguali a queste in virtú della (b) del teorema (15.17)), si erano ottenute in mediante scoppiamenti.

L'insieme dei punti P di una varietá quasi–proiettiva tali che V é non normale in P é un chiuso proprio di che si denota con $N(V)$. Sia infatti U un aperto affine di V e ne sia (U', y) la normalizzazione. Esistono allora non vuoti di U e U' isomorfi e ció implica che esistono punti di U, e quindi di V, normali per U e per V. Se P é un tale punto, sia ancora U un aperto affine con P e sia (U', y) la normalizzazione di U. Sia P' un qualche punto di U' tale che $Y(P') = P$. Allora $y^*\colon \mathcal{O}_{U,P} \to \mathcal{O}_{U',P'}$ un morfismo e $\mathbb{Q}(\mathcal{O}_{U,P}) = \mathbb{Q}(\mathcal{O}_{U',P'}) = K(V)$ e $\mathcal{O}_{U',P'}$integralmente chiuso. Allora y^* é un isomorfismo. Esistono piú di un aperto di U contenente P e un aperto di U' contente tra cui y induce un isomorfismo. Quindi esiste un intorno di P costituito di punti in cui V é

normale. Anche per le varietá quasi–proiettive potrebbe stabilirsi un teorema di normalizzazione analogo al (15.17).

16 Ramificazioni

Si affronti un'ulteriore questione: dato un morfismo finito $f\colon V \to W$ tra varietá quasi–protettive, cosa si puó dire in merito all'ordine delle fibre di f? Cominciamo dando una definizione.

Definizione 16.1. Sia $y\colon V \dashrightarrow W$ un'applicazione razionale genericamente finita, sicché $y^*\colon K(W) \to K(V)$ sia un'estensione algebrica. Prende nome grado di y, e lo denoteremo con $deg\, y$, il grado di tale estensione. Diremo che poi y é separabile, o inseparabile, se tale é l'estensione suddetta.

Teorema 16.2. *Sia $f\colon V \to W$ un morfismo finito di varietá quasi–proiettive, con W normale. Allora per ogni $P \in W$, la fibre $f^{-1}(P)$ ha ordine al piú $deg\, f$.*

Dim. Ovviamente possiamo ridurci al caso in cui V, W siano entrambe affini. Poniamo

$$A(V) = A \qquad A(W) = B \qquad K = \mathbb{Q}(A) = K(V)$$
$$L = \mathbb{Q}(B) = K(W) \qquad [K\colon L] = deg\, f = n$$

Se $a \in A \subseteq K$, poiché A é integro su B e B é integralmente chiuso, é facile verificare (cfr. complementi), che il polinomio minimo di a su L ha coefficienti in B. Poniamo ora

$$f^{-1}(P) = \{Q_1, \dots, Q_m\}$$

e scegliamo un elemento $a \in A$ tale che $a(Q_1), \dots, a(Q_m)$ siano valori distinti di k. L'esistenza di a si mostra provando che, se $V \subseteq \mathring{A}^n$, esiste un polinomio $F \in A^{(n)}$ che assume valori distinti in $Q_1, \dots, Q_m$. Lo si dimostra per induzione su m. É banale se $m = 1$. Se $m > 1$, sia F_1 un siffatto polinomio relativo a $Q_1, \dots, Q_{m-1}$. Se $F_1(Q_m)$ é diverso da $F_1(Q_i)$, $i = 1, \dots, m-1$, basta prendere $F = F_1$. Se $F_1(Q_m)$ é invece uguale ad i dei valori $F_1(Q_i)$, $i = 1, \dots, m-1$, sia G un polinomio, certo esistente, tale che

$$G(Q_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, m-1 \text{ e } G(Q_m) \neq 0$$

Basta allora prendere $F = F_1 + aG$, con $a \in A$ opportuno: infatti $F(Q_i) = F_2(Q_i)$ sono un numero finito di k, mentre

$$F(Q_m) = F_1(Q_m) + a = G(Q_m)$$

ne sono un numero infinito, al variare di a. Sia allora $P(T) \in B[T]$ il polinomio minimo di ovviamente $h = deg\, P(T) \leq [K\colon L] = n$. Se

$$P(T) = T^h + a_1 T^{h-1} + \cdots + a_h \qquad , a_i \in B$$

consideriamo il polinomio su k

$$\overline{P}(T) = T^h + a_1(P) T^{h-1} + \cdots + a_h(P)$$

ovviamente esso ha m radici distinte $A(Q_1), \dots, a(Q_m)$ sicché $m \leq h \leq n$. $\square$

Definizione 16.3. Un morfismo finito $f\colon V \to W$ di varietá quasi–proiettive si dice non diramato in un punto $P \in W$ se l'ordine della fibra $f^{-1}(P)$ é uguale al grado del morfismo; se ció non accade, si dice che f é diramato in P. P si dice un punto di diramazione per f.

Teorema 16.4. *Sia $f\colon V \to W$ un morfismo finito di varietá quasi–proiettive, con W normale. Allora:*

(a) se f é inseparabile, f é diramato in ogni punto W;
(b) se f é separabile, i punti di diramazione per f in quasto caso costituiscono un chiuso proprio di W.

Dim. Conserviamo le notazioni della dimostrazione del teorema (16.2). Sia Q un punto in cui f non é diramato. allora $h = n$ e $\overline{P}(T)$ ha n radici distinte. Ció equivale a dire che il discriminante $D(\overline{P})$ di $\overline{P}(T)$, ossia il risultante di $\overline{P}(T)$ di $\overline{P}'(T)$ non sia nullo. Si consideri allora il discriminante $D(P) \in B$ di $P(T)$. Poiché $D(\overline{P}) = D(P)(Q)$, deve essere $D(P) \neq 0$. Ora, se f é inseparabile ció é assurdo il che prova la (a). Se f é inseparabile, avendosi $D(P)(Q) \neq 0$, esiste un intorno aperto U di Q in W, tale che per ogni $Q' \in U$, sia $D(P)(Q') \neq 0$. Poiché le soluzioni dell'equazione

$$T^n + a_1(Q')T^{n-1} + \cdots + a_n(Q') = 0$$

sono proprio i valori che a assume nei punti di $f^{-1}(Q')$, ne segue che in tutti i punti di U, f non é diramata. Resta da far vedere che esistono in questo caso punti in cui f é non diramata. Si noti che l'estensione $L \to K$ é separabile, e quindi, per il teorema dell'elemento primitivo, esiste un $\alpha \in B$ tale che $K = L(\alpha)$. Se $P(T) \in B[T]$ é il relativo polinomio minimo, si ha $deg\ P(T) = n$ e $D(P) \neq 0$ per la separabilitá dell'estensione. Esiste allora un punto $Q \in W$ tale che $D(P)(Q) \neq 0$ e Q é un punto di non ramificazione. □

Esempio 16.5. Il morfismo di normalizzazione di $\mathring{A}^1$ sulla curva $x_1^3 = x_2^2 - x_1^2$ (cfr.15.18) é birazionale e dunque ha grado 1, tutte le fibre hanno ordine 1 tranne quelle del punto $(0,0)$ che ha ordine 2. Dunque il teorema (16.2) non vale se si sopprime l'ipotesi che W sia normale.

Se $y\colon V \dashrightarrow W$ é un'applicazione razionale genericamente finita, esiste un aperto massimo $U \subseteq W$ tale che esiste un aperto $U' \subseteq W$ tale che y induce un morfismo finito di U' su U. Poniamo $Z_1 = W - U$ e sia Z_2 la chiusura in W dell'insieme dei punti di diramazione di $y\colon U' \to U$. $Z = Z_1 \cup Z_2$ si dice ancora

17 Dimensione

Fino a questo punto sono state introdotte due differenti nozioni di dimensione per le varietá quasi–proiettive: una topologica e una algebrica.

Per il resto poco é noto sia sull'una che sull'altra nozione, tranne un certo numero di esempi, e sulle relazioni che sussistono.
Di questo parleremo ora. Ma dapprima riassumiamo le cose fin qui note.

1. Se V é una varietá quasi–proiettiva e U ne é un aperto non vuoto, $dim\, V = dim\, U$;
2. $dim\, \mathbb{P}^n = dim\, \mathring{A}^n = n$, in particolare ogni varietá ridotta ad un punto ha dimensione zero e viceversa;
3. Se V e W sono varietá quasi–proiettive, $dim\, V \times W = dim\, V + dim\, W$;
4. ogni ipersuperficie irriducibile di $\mathbb{P}^n$ ha dimensione $n-1$, come si ricava dal teorema (14.20);
5. se $V \underset{+}{\subset} \mathbb{P}^n$ é una varietá proiettiva e r é il massimo intero tale che esistono sottospazi di $\mathbb{P}^n$ di dimensione r a intersezione vuota con V, allora $r = n - dim\, V - 1$.

Il primo passo della nostra indagine, consiste nell'invertire la proprietá (4). Il punto di partenza é il seguente lemma:

Lemma 17.1. *Siano V, W varietá quasi–proiettive con $W \subseteq V$. Allora $dim\, W \neq dim\, V$. Se poi W é chiusa in V e $dim\, W = dim\, V$, allora $V = W$.* $\square$

Dim. Basta ridursi, in virtú di (1), al caso in cui V, W siano affini. Allora supponiamo $W \subseteq V \subseteq \mathring{A}^n$, sicché $A(V)$ e $A(W)$ sono generati, quali $k-$algebre, da $x_1, \ldots, x_n$. Sia $m = dim\, V$. Allora per ogni $(m+1)-$pla di elementi di $\{x_1, \ldots, x_n\}$, sia $x_{i_1}, \ldots, x_{1_{m+1}}$, in $A(V)$ é algebricamente dipendente. Ció significa che esiste un polinomio non nullo $F \in k\,[T_1, \ldots, T_{m+1}]$ tale che

$$F\left(x_{i_1}, \ldots x_{i_{m+1}}\right) \in \mathcal{I}_A(V) \subseteq \mathcal{I}_A(W)$$

Dunque $F\left(x_{i_1}, \ldots, x_{1_{m+1}}\right) = 0$ anche in $A(W)$, cioé $x_{i_1}, \ldots, x_{1_{m+1}}$ sono algebricamente dipendenti in $A(W)$. Ció implica che $dim\, W \leq m = dim\, V$.
Supponiamo ora $dim\, W = m$, con W chiuso in V. É possibile allora scegliere m funzioni coordinate e supponiamo siano le prime m, algebricamente indipendenti in $A(V)$. Ripetendo il ragionamento giá fatto prima, si verifica che esse sono algebricamente indipendenti anche in $A(W)$. Sia ora $f \in \mathcal{I}_A(W)$; $f(x_1, \ldots, x_n)$ puó essere considerato quale elemento di $A(V)$, e , come tale, dipende da $x_1, \ldots, x_m$, ossia esiste una relazione del tipo

$$a_0\,(x_1, \ldots, x_m)\, f^l + \cdots + a_l\,(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

dove il polinomio a primo membro si puó supporre non nullo e irriducibile, sicché si puó assumere che $a_l\,(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$ in $A(V)$ e dunque in $A^{(n)}$. Tuttavia la relazione precedente vale anche in $A(W)$, che é quoziente di $A(V)$ modulo $\mathcal{I}_W(V)$ e in $A(W)$, é $f = 0$. Allora in $A(W)$ é $a_l\,(x_1, \ldots, x_m) = 0$. Ma in $A(W)$, $x_1, \ldots, x_m$ sono algebricamente indipendenti, sicché si avrebbe $a_l = 0$ in $A^{(n)}$, che é una contraddizione. Allora $\mathcal{I}_a(W) \subseteq \mathcal{I}_a(V)$ e quindi $V = W$. $\square$

Teorema 17.2. *Ogni varietà di dimensione $n-1$ in $\mathbb{A}^n$ o in $\mathbb{P}^n$ è un'ipersuperficie irriducibile.*

Dim. Basta riferirsi ad una varietà V di dimensione $n-1$ in $\mathbb{A}^n$. Esiste allora un polinomio irriducibile $f \in \mathcal{I}_a(V)$, essendo $\mathcal{I}_a(V)$ un ideale primo di $A^{(n)}$. Allora $V \subseteq Z_a(f)$ e $Z_a(f)$ è una varietà irriducibile di dimensione $n-1$ in cui V è chiusa. Basta allora applicare il lemma (17.1). $\square$

Il passo successivo della nostra indagine consiste nello studio dell'intersezione di una varietà affine o proiettiva con un'ipersuperficie. Premettiamo il seguente lemma semplice:

Lemma 17.3. *Sia A un anello privo di divisori dello zero, contenente $A^{(r)}$ e integro su di esse. Siano $x, y \in A^{(1)} - \{0\}$ primi tra loro, $z \in A$ tali che x divida yz in A. Allora esiste un $m > 0$ tale che x divida z^m in A.*

Dim. Si abbia $xw = yz$ in A , e sia

$$F(T) = T^l + b_1 T^{l-1} + \cdots + b_l$$

il polinomio minimo di w su $\mathbb{Q}(A^{(r)})$, si ha $b_i \in A^{(r)}$, $i = 1, \ldots, l$. Poiché $z = \left(\frac{x}{y}\right) w$ e $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}(A^{(r)})$, anche il polinomio minimo di z su $\mathbb{Q}(A^{(r)})$ ha grado l. Inoltre si ha:

$$O = F(w) = F\left(\frac{y}{x} z\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^l z^l + b_1 \left(\frac{y}{x}\right)^{l-1} z^{l-1} + \cdots + b_l$$

sicchè il polinomio minimo di z è

$$G(T) = \left(\frac{x}{y}\right)^l F\left(\frac{y}{x} T\right) = T^l + \frac{x}{y} b_1 T^{l-1} + \cdots + \left(\frac{x}{y}\right)^l b_2$$

si ha $\left(\frac{x}{y}\right)^i b_i \in A^{(1)}$ e poiché x, y sono primi tra loro, y^i divide b_i. Dalla relazione $G(Z) = 0$ si ha allora che x divide Z^l. $\square$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 17.4. *Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà con $n = dim\, V \geq 1$ e H un'ipersuperficie non contenente V. Allora ciascuna componente irriducibile di $H \cap V$ ha dimensione $n-1$.*

Dim. Poniamo $V^{(1)} = H \cap V$. $V^{(1)}$ è un insieme algebrico non vuoto (14 (*iii*)). Senz'altro esiste una ipersuperficie $H^{(1)}$ non contenente nessuna delle componenti irriducibili di $V^{(1)}$. Allora $V^{(2)} = H^{(1)} \cap V^{(1)}$ è un insieme algebrico vuoto, oppure tale che ciascuna sua componente irriducibile è strettamente contenuta in qualche componente irriducibile di $V^{(1)}$. Ripetendo tale ragionamento, si ottiene una successione di insiemi algebrici

$$V = V^{(0)} \supsetneq V^{(1)} \supsetneq V^{(2)} \supsetneq \cdots \supsetneq V^{(i)} \supsetneq V^{(i+1)} \supsetneq \ldots$$

tale che $V^{(i+1)} = V^{(i)} \cap H^{(i)}$, dove $H^{(i)}$ è un'ipersuperficie che non contiene alcuna componente di $V^{(i)}$. Sia ora n_i la massima dimensione delle componenti irriducibili di $V^{(i)}$. Si ha allora per il lemma (17.1)

$$n > n_1 > n_2 > \cdots > n_i > n_{i+1}$$

sicchè senz'altro $V^{(n+1)} = \varnothing$. Ciò significa che

$$V \cap H \cap H^{(1)} \cap \cdots \cap H^{(n)} = \varnothing$$

Siano allora

$$f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$$

rispettivamente le equazioni di $H, H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$. Dal ragionamento che precede si ha che $f_0, \ldots, f_n$ possono assumersi dello stesso grado: ciò infatti è senz'altro vero per $f_1, \ldots, f_n$, poiché $H^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, deve soddisfare la sola ipotesi di non contenere alcuna componente di $V^{(i)}$, sicchè di tali ipersuperficie ne esistono di ogni grado. Basta allora prendere $f_1, \ldots, f_n$ dello stesso grado di f_0. Poiché $Z_p\,(f_0, \ldots . f_n) \cap V = \varnothing$, l'applicazione

$$\varphi\colon P \in V \to [f_0(P), \ldots, f_n(P)] \in \mathbb{P}^n$$

è un morfismo finito, di V sulla sua immagine. Ma $\varphi(V)$ è un chiuso di $\mathbb{P}^n$ e $dim\,\varphi(V) = dim\,V = n$, sicchè $\varphi(V) = \mathbb{P}^n$. Ora se fosse $n_1 < n-1$, si avrebbe $V^{(n)} = \varnothing$, e quindi $V \cap H \cap \cdots \cap H^{(n-1)} = \varnothing$, ossia $Z_p(f_0, \ldots, f_{n-1}) \cap V = \varnothing$. Ciò significherebbe che $[0, \ldots, 0, 1] \notin \varphi(V)$ il che è assurdo. Si ha dunque $n_1 = n - 1$, e quindi esiste qualche componente di $V^{(1)}$ di dimensione $n - 1$. Mostriamo ora, per concludere, che ciascuna di tali componenti ha dimensione almeno $n - 1$. A tale scopo si consideri in $\mathbb{P}^n$ l'aperto affine U_j su cui $x_j \neq 0$ e si ponga

$$V_j = \varphi^{-1}(U_j) \text{ con } j = 0, \ldots, n$$

Mostreremo che ogni componente di $V^{(1)} \cap V_j$ ha dimensione almeno $n-1$ per ogni $j = 0, \ldots, n$ il che proverà l'asserto. Basta a tale scopo riferirsi al caso $j = n$. Poniamo allora

$$a_{i+1} = \frac{f_i}{f_n}\; i = 0, \ldots, n-1$$

e consideriamo la restrizone di φ a V_0 data da:

$$\varphi\colon P \in V_o \to (a_1(P), \ldots, a_n(P)) \in \mathbb{A}^n$$

che è un morfismo finito. Mostriamo allora che la restrizione di $a_2, \ldots, a_n$ a ciascuna delle componenti di $V^{(1)} = Z_{V_0}(a_1)$, sono algebricamente indipendenti. A tale scopo sia $P\,(T_2, \ldots, T_r) \in k\,[T_2, \ldots, T_n]$ un polinomio non identicamente nullo. Va dunque provato che $P\,(a_2, \ldots, a_n)$ non si annulla su alcuna componente di $Z_{V_0}(a_1)$. Per far ciò basta provare che, se per $Q \in A(V)$ si ha $Q \cdot P(a_2, \ldots, a_n) = 0$ su $V^{(1)}$, allora $Q = 0$ su $V^{(1)}$. Infatti se $P(a_2, \ldots, a_n)$ fosse nullo su una comoponente di $V^{(1)}$, basterebbe scegliere Q nulle sulle altre ma non in queste e $P(a_2, \ldots, a_n)\ Q = 0$ su $V^{(1)}$ senza che fosse $Q = 0$ su $V^{(1)}$. Applicando il teorema degli zeri, si è dunque ricondotti a dimostrare che se a_1 divide $(QP(a_1, \ldots, a_n))^2$ in $A(V)$ per qualche $l > 0$, allora esiste un $m > 0$ tale che a_1 divide Q^m in $A(V)$. Ciò segue dal lemma (17.3), ove si prenda

$$A = A(V) \qquad r = n \qquad x = a_1 \qquad y = P(T_2, \ldots, T_n)^l \qquad z = Q^l$$

□

Il precedente teorema ha alcune notevoli conseguenze.

Corollario 17.5. *Sia $V \subseteq \mathbb{P}^m$ una varietà proiettiva $n-$dimensionale e siano $f_1, \ldots, f_r$ r forme in $S^{(m)}$. Allora ogni componente di $V \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r)$ ha dimensione non minore di $n - r$. In particolare*

$$r \leq n \Rightarrow V \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r) \neq \varnothing$$

Se V invece è solo quasi–proiettva, quanto sopra continua a valere, perchè $V \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r) \neq \varnothing$.

Dim. Se V è proiettiva, l'asserto segue dall'uso reiterato del teorema (17.4). Se V è quasi–proiettiva, V è aperto in $\overline{V}$. D'altra parte

$$V \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r) = \left(\overline{V} \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r)\right) \cap V$$

Allora o $V \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r) = \varnothing$ oppure ciascuna sua componente è un aperto di una componente una componente di $\overline{V} \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r)$ e si può applicare quanto visto nel caso V proiettiva. □

Corollario 17.6. *Siano $V, W \subseteq \mathbb{P}^N$ varietà quasi–proiettive di dimensioni n, m con $N \leq n + m$. Allora se $V \cap W \neq \varnothing$, per ogni componente Z di $V \cap W$ è $\dim Z \geq n + m - N$.*

Dim. Basta ridursi ovviamente al caso in cui V, W siano affini. Allora

$$V \cap W = (V \times W) \cap \Delta$$

, dove Δ è la diagonale di $\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$. D'altra parte Δ è definito in $\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N = \mathbb{A}^{2N}$ da N equazioni lineari. Basta dunque applicare il corollario (17.5). □

Corollario 17.7. *Su una varietà quasi–proiettiva V esistono sottovarietà di ogni dimensione $s = 0, \ldots, \dim V$ e anzi $\dim V = \sup_{W \subsetneq V} \{\dim W\} + 1$.*

Dim. Ovvia. □

Corollario 17.8. *Se V è una varietà quasi–proiettiva, allora $dim\, V = dim_t\, V$.*

Dim. Dalla stessa dimostrazione del teorema (17.4) segue che se $n = dim\, V$, esiste una catena di sottovarietà

$$V = V^{(0)} \supsetneq V^{(1)} \supsetneq \cdots \supsetneq V^{(n)}$$

con $V^{(n)}$ ridotta ad un punto, sicchè $dim_t\, V \geq n$. D'altra parte, dal lemma (17.1) segue subito che $dim_t\, V \leq n$. □

Corollario 17.9. *Se V è una varietà quasi–proiettiva di dimensione n e W ne è una sottovarietà di codimensione r, esiste una catena di sottovarietà*

$$V = V^{(0)} \not\supseteq V^{(1)} \not\supseteq \cdots \not\supseteq V^{(r)} = W$$

Dim. Se $W = V$ non c'è nulla da provare. Altrimenti sia H un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^m \supseteq V$, tale che $H \supseteq W$. Allora sia $V^{(1)}$ una delle componenti di $H \cap V$ contenenti W. Avendosi $dim\, V^{(1)} = n - 1$ tale procedimento può ripetersi al fine di trovare le catene richieste. □

Corollario 17.10. *Se V è una varietà quasi–proiettiva di dimensione n e W ne è una sottovarietà di codimensione r si ha $dim_k\, \mathcal{O}_{v,w} = r$.*

Dim. L'asserto segue dalla definizione di dimensione Krull di un anello e dal precedente corollario. □

Definizione 17.11. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà quasi–proiettiva, e sia $Z \subseteq V$ un sottoinsieme algebrico di V tale che ogni sua componente abbia codimensione r in V. Si dice che Z è **intersezione completa insiemistica in** V se esistono delle forme $f_1, \ldots, f_r \in S^{(n)}$ tali che $Z = V \cap Z_p(f_1, \ldots, f_r)$.

Definizione 17.12. Se $V \subseteq \mathbb{P}^n (V \subseteq \mathbb{A}^m)$ è una varietà proiettiva (affine) e $Z \subseteq V$ é definito come sopra, si dice che Z è un'**intersezione completa in** V se $\mathcal{I}_{P,Z}(V)$ $(\mathcal{I}_Z(V))$ è generato da r elementi di $S(V)$ (di $A(V)$)

Osservazione 57. È chiaro che ogni intersezione completa è pure intersezione completa insiemistica, ma non vale il viceversa come si vedrà dagli esempi che seguono:

Esempio 17.13. Sia Z il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$ costituito da tre punti non allineati; Z non è intersezione completa in $\mathbb{P}^l$. Infatti $\mathcal{I}_P(Z)$ contiene tre quadriche linearmente indipendenti come forme di grado minimo. Ciò il Lettore lo verificherà agevolmente supponendo, come lecito, che i tre punti siano i vertici della piramide fondamentale.

Esempio 17.14. Sia Z un insieme finito di punti di $\mathbb{A}^2$, Z è intersezione completa insiemistica in $\mathbb{A}^2$. Infatti è sempre possibile, con eventuale cambiamento di coordinate, supporre che i punti di Z, $P_1, \dots, P_n$ abbiamo le prime coordinate tutte distinte. Sia allora $P_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \dots, n$. Esiste un polinomio $f(x_i) \in A^{(1)}$ tale che $f(a_i) = b_i$. Basta prendere $f(x_i) = \sum_1^m i b_i P_i(x_1)$, con

$$P_i(x_1) = \frac{(x_1 - a_{i-1}) \dots (x_1 - a_{i1})(x_1 - a_{i+1}) \dots (x_1 - a_n)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}$$

È allora chiaro che $Z = Z_a(x_2 - f(x_1), \prod_{i=1}^n (x_1 - a_i))$.

Osservazione 58. Visto Z in $\mathbb{P}^2$, si ha

$$Z_p \left(x_0^{deg\, f - 1} x_2 - f(x_1), \prod_{i=1}^n (x_1 - a_i x_0) \right) = Z \cup \{[0, 1, 0]\}$$

Di qui si deduce che se S è un sottoinsieme finito di $\mathbb{P}^2$ tale che esiste un punto $P \in S$ tale che non esistono coppie di punti di $S - \{P\}$ allineati con P, allora S è intersezione completa insiemistica. In particolare il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$ considerato nell'esempio (290) è intersezione completa insiemistica.

Esempio 17.15. Ragionando come nell'esempio (290) si verifica che la cubica gobba di $\mathbb{P}^3$ non è intersezione completa. Si è invece visto che la cubica gobba affine è intersezione completa in $\mathbb{A}^3$. Inoltre la cubica gobba proiettiva è intersezione completa insiemistica. Per verificare quanto fatto, cominciamo col mettere in luce una semplice circostanza di natura puramente algebrica. Sia

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

una matrice su un campo e poniamo

$$M_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{Vmatrix}, M_2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n} \end{Vmatrix}, M_3 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} \end{Vmatrix}$$

Allora se $det\, M = det\, M_1 = 0$, si ha $rank\, M_3 < n-1$ oppure $rank\, M_2 < n-1$. Suggeriamo infatti che $rank\, M_2 = n - 1$. Allora il sistema lineare omogeneo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

è equivalente a quello costituito dalle prime $n - 1$ equazioni, il quale, a sua volta, ha un'unica soluzione definita a meno di un fattore di proporzionalità, e costituito dai minori d'ordine $n-1$ di M_2, presi a segni alterni. Poiché $det\, M_1 = 0$, tale soluzione è del tipo $(b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$. Si ha allora

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + \cdots + a_{1\,n-1}b_{n-1} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_1 + \cdots + a_{n\,n-1}b_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

con $b_1, \ldots, b_{n-1}$ non tutti nulli: di ogni segue $rank\, M_3 < n$. Di qui si trova subito che la cubica gobba è intersezione completa insiemistica. Si consideri infatti la matrice

$$M = \begin{Vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & f \end{Vmatrix}$$

dove f è una qualunque forma lineare. Allora, con le stesse notazioni di prima, se in un punto di $\mathbb{P}^3$ si ha

$$det\, M = det\, M_1 = 0 \Rightarrow rank\, M_2 < 2 \text{ oppure } rank\, M_3 < 2$$

Ma $M_2 = M_3$ e $rank\, M_2$ è proprio l'equazione matriciale della cubica gobba di $\mathbb{P}^3$, che risulta quindi intersezione della cubica di equazione $det\, M = 0$ e del cono quadrico di equazione $det\, M_2 = 0$.

Esempio 17.16. Vi sono curve di $\mathbb{A}^3$ che non sono intersezioni complete. L'insieme algebrico riducibile costituito dall'unione dei tre assi coordinati di $\mathbb{A}^3$. Il Lettore constaterà che esso non è intersezione completa con un ragionamento analogo a quello svolto in (290). Inoltre anche l'immagine V del morfismo

$$\varphi\colon t \in \mathbb{A}^1 \to \left(t^3, t^4, t^5\right) \in \mathbb{A}^3$$

non é un intersezione completa.
Si noti che V è un sottoinsieme algebrico di $\mathbb{A}^3$, ovviamente irriducibile: si tratta infatti della parte affine della immagine del morfismo

$$\psi\colon\ [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \to \left[\lambda^3\mu^2, \lambda^4\mu, \lambda^5, \mu^5\right] \in \mathbb{P}^3$$

V non è intersezione completa. Si cominci col notare infatti che V è non degenere, perchè se un iperpiano di equazione

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

contenesse V, si avrebbe

$$a_0 + a_1t^3 + a_2t^4 + a_3t^5 = 0$$

per ogni $t \in k$, sicchè sarebbe $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Similmente si verifica che l'unica quadrica in $\mathcal{I}_a(V)$ è quella di equazione $F = x_2^2 - x_1x_3 = 0$.

Supponiamo ora V sia intersezione completa, sicchè $\mathcal{I}_a(V) = (f, g)$. Come dianzi, si verifica che ogni polinomio in $\mathcal{I}_a(V)$, e dunque anche f, g, manca dei termini di grado zero e uno. Allora, decomponendo in componenti omogenee, si ha:

$$f = f_2 + f_3 + \dots \qquad , g = g_2 + g_3 + \dots$$

Se i polinomi

$$\widetilde{f} = f_3 + \dots \qquad , \widetilde{g} = g_3 + \dots$$

non sono proporzionali, si perviene ad un assurdo. Infatti dovendo essere

$$F = Af + Bg \tag{1}$$

ed essendo F omogeneo, A e B dovrebbero essere costanti, perchè

$$F = A_0 f + B_0 g + (A - A_0)f + (B - B_0)g$$

e $(A - A_0)f + (B - B_0)g$ ha componenti omogenee di gradi superiori a 2. D'altra parte, se A, B sono costanti e verificano la (1) si ha

$$F = Af_2 + Bg_2 + A\widetilde{f} + B\widetilde{g}$$

con $A\widetilde{f} + B\widetilde{g} = 0$ per gli stessi motivi di cui dianzi, e pertanto $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ sono proporzionali. Può allora assumersi, che uno dei due polinomi f, g sia uguale a f_2 o a g_2, ossia a F. Supponiamo pertanto

$$f = f_2 + f_3 + \dots \qquad g = F$$

Notiamo ora che in $\mathcal{I}_a(V)$ vi sono i polinomi di terzo grado $G = x_1^2 x_2 - x_3^2$, $H = x_2 x_3 - x_1^3$. Dovendo essere

$$G = Af + Bf = A_0 f_2 + B_0 F + \dots$$

deve aversi

$$-x_3^2 = A_0 f_2 + B_0(x_2^2 - x_1 x_3)$$

Può allora assumersi $A_0 = 1$ e

$$f_2 = -x_3^2 - B_0(x_2^2 - x_1 x_3)$$

D'altra parte, deve pure aversi

$$H = A'f + B'F = A'_0 f_2 + B'_0 F + \dots$$

sicchè $x_2 x_3$ dovrebbe essere combinazione lineare di $F = x_2^2 - x_1 x_3$ e di $f_2 = -x_3^2 - B_0(x_2^2 - x_3)$ il che è assurdo.

Esempio 17.17. Sia Q una quadrica in $\mathbb{P}^3$ e $L \subseteq Q$ una retta: x_1 non è intersezione completa in Q. Si noti infatti che L è intersezione completa in $\mathbb{P}^3$, in quanto $\mathcal{I}_P(L)$ è generato da 2 forme lineari, sicchè $\mathcal{I}_{P,L}(Q)$ è generato dalle immagini di tali due forme in $S(Q)$.

L'ultimo esempio suggerisce la seguente constatazione generale: **se F è un'ipersuperficie irriducibile in $\mathbb{P}^n$ e $V \subseteq F$ è una varietà di codimensione 1 in F, che sia intersezione completa in $\mathbb{P}^n$, V è intersezione completa in F se e solo se uno dei generatori di $\mathcal{I}_P(V)$ può assumersi coincidente con un polinomio che, eguagliato a zero, fornisce un'equazione ridotta di F.**

Osservazione 59. Se Q è un cono, ogni retta di Q, pur non essendo intersezione completa in Q, è intersezione completa insiemistica: della elementare verifica di ciò la lasciamo al Lettore. Se invece Q è non degenere, le rette di Q non sono neanche intersezioni complete insiemistiche. È noto infatti che, se L, L' sono rette di Q, esiste una omografia di $\mathbb{P}^3$ che muta Q in sè e L in l'. Sicchè se L è intersezione completa insiemistica, tale è pure L'. Ma se L e L' appartengono allo stesso sistema, si ha $L \cap L' = \varnothing$ e d'altra parte esisteranno due polinomi omogenei $f, f' \in S^{(3)}$ tali che $L = Z_p(f) \cap Q$, $L' = Z_p(f') \cap Q$, sicchè si avrebbe $Q \cap Z_p(f, f') = \varnothing$, contro il corollario (17.5).

Proposizione 17.18. *Se H è un insieme algebrico contenuto nella varietà di Veronese $V_{n,d}$ e ogni componente del quale ha codimensione 1, allora H è intersezione completa insiemistica in $V_{n,d}$.*

Dim. Basta evidentemente ridursi al caso in cui H è irriducibile. Allora $v_{n,d}^{-1}(H)$ è un'ipersuperficie irriducibile H' di grado m in $\mathbb{P}^n$, e quindi di equazione $f = 0$, con $f \in S_m^{(n)}$. D'altra parte, esiste un $F \in k[v_{i_0,\dots,i_n}]$ omogeneo di grado m, tale che $\mathcal{O}_{n,d}(F) = f$ e $H = V_{n,d} \cap Z_p(F)$. $\square$

Non è invece detto che H sia intersezione completa in $V_{n,d}$: basta pensare ai punti in $V_{1,d}$ e tenere presente l'esempio (291).

Proposizione 17.19. *Sia V una varietà quasi–proiettiva di dimensione n, e siano $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(V)$. Se $Z_V(f_1, \dots, f_r) \neq \varnothing$ ogni sua componente irriducibile ha dimensione non minore di $n - r$.*

Dim. Ciò segue subito dal corollario (17.5) e dal fatto che, localmente, si ha $f_i = \frac{P_i}{P_0}$, $i = 1, \dots, r$ con P_i, P_0 forme dello stesso grado, sicchè $Z_V(f_1, \dots, f_r)$ localmente si scrive come $V \cap Z_p(P_1, \dots, P_r)$. $\square$

Vogliamo ora indagare come si comporta la dimensione rispetto ai morfismi tra varietà. A tale proposito vale il seguente fondamentale teorema:

Teorema 17.20. *Siano V, W varietà di dimensioni rispettive n, m e sia $f\colon V \to W$ un morfismo dominante. Allora si ha:*

(a) *$n \geq m$ e per ogni punto $P \in f(V)$, ogni componente irriducibile di $V_P = f^{-1}(P)$ ha dimensione non minore di $n - m$;*
(b) *esiste un aperto non vuoto $U \subseteq f(V)$ tale che per ogni punto $P \in U$, ogni componente irriducibile di V_P ha dimensione $n - m$.*

Dim. Sia P un punto di W. Essendo il problema di natura locale, possiamo supporre V affine, e dunque $V \subseteq \mathbb{A}^N$. Per la dimostrazione del teorema (17.4) e per il corollario (17.9), possiamo allora trovare m polinomi $f_1, \ldots, f_m \in \overset{2}{\wedge}^{(n)}$ tale che $W \cap Z_a(f_1, \ldots, f_m) = \{P\}$.
Ma allora, posto

$$g_i = f^*(f_i) = f_i \circ f \in \mathcal{O}(V) \text{ con } i = 1, \ldots, m$$

si ha $V_P = Z_V(g_1, \ldots, g_m)$ sicchè la (a) segue da (22.ii) Per provare ora la (b), partiamo dal caso in cui V, W siano varietà affini. Ad f corrisponde il monomorfismo di $k-$algebre

$$f^* \colon A(W) \to A(V)$$

che s'estende a quello di campi

$$f^* \colon K(W) \to K(V)$$

Ovviamente $K(V)$ ha grado di trascendenza $n - m$ su $K(W)$. Allora tra i generatori di $A(V)$ su k, $t_1, \ldots, t_N$ vi sono delle $(n-m)-$ple di generatori algebricamente indipendenti su $K(W)$ e quindi su $A(W)$. Sia $t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n-m}}$ di tali $(n-m)-$ple. Esistono dunque polinomi non nulli

$$F_{i_1 \ldots i_{n-m} i}(T) \in A(W)\left[t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n-m}}\right][T] \text{ per } i = 1, \ldots, N, i \neq i_j$$

con $F_{i_1 \ldots i_{n-m-1}, i}(t_i) = 0$ Poniamo

$$F_{i_1 \ldots i_{n-m}, i}(T) = a_{0,i}\left(t_{i_1} \ldots t_{i_{n-m}}\right) T^{l_i} + \cdots + a_{li}, i\left(t_{i_1} \ldots t_{i_{n-m}}\right)$$

Per le ipotesi possiamo supporre $a_{0,i}\left(t_i, \ldots, t_{i_{n-m}}\right) \in A(W)\left[t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n-m}}\right]$ non identicamente nullo. Consideriamo ora il chiuso

$$X_{i_1 \ldots i_{n-m,i}} \supseteq W$$

costituito dai punti $P \in W$ tali che i polinomi

$$\overline{a}_{0,i}\left(t_i, \ldots, t_{i_{n-m}}\right) \in k\left[t_{i1}, \ldots, t_{i_{n-m}}\right]$$

dedotto da $a_{0,i}$ calcolandone i coefficienti, elementi di $A(W)$, in P, siano identicamente nulli. Ovviamente $X_{i_1 \cdots_{n-m}, i}$ è un chiuso proprio di W, e dunque altrettanto accade per

$$X = \cup X_{i_1 \ldots i_{n-m}, i}$$

ove l'unione va effettuata su tutti gli i, e su tutte le $(n-m)-$ple di generatori di $A(V)$ algebricamente indipendenti su $A(W)$. Sia infine $U \subseteq f(V) \cap (W - X)$ un aperto e Z una componente irriducibile di V_P. Le $\bar{t}_i$ sono l'immagini di t_i in $A(Z)$, ed è chiaro che $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_N$ generano $A(Z)$ su k. D'altra parte, in virtù di (a), esistono almeno $n-m$ elementi di $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_N$ algebricamente indipendenti su k, e supponiamo siano $\overline{t}_1, \dots \overline{t}_{n-m}$. È allora ovvio che $t_1, \dots, t_{n-m}$ sono algebricamente indipendenti in $A(V)$. poiché i polinomi $\overline{a}_{0,i}$ sono non nulli in P, si ha $\overline{a}_{0,i}\left(\overline{t}_1, \dots, \overline{t}_{n-m}\right) \neq 0$ sicchè $F_{1\dots n-m,i}(\overline{t}_i) = 0$, con $F_{1\dots n,i} \neq 0$. Da ciò segue che $dim\, Z$ é minore od uguale a $n - m$. Dalla (a) segue l'asserto. Quanto al caso generale, sia U_1 un aperto affine di W, e sia $\{U_{1,i}\}_{i=1,\dots,m}$ un ricoprimento di aperti affini di $f^{-1}(U_1)$. Per ogni $i = 1, \dots, m$ esiste un'aperto non vuoto $U'_i \subseteq U_1 \cap f(V)$, tali che per ogni $P \in U'_i$, ogni componente di $V_P \cap U_{1,i}$ ha dimensione $n - m$. Dunque

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} U'_i$$

U verifica l'asserto. $\square$

Anche questo teorema ha alcuni notevoli corollari:

Corollario 17.21. *Siano V, W varietà proiettive di dimensioni rispettive n, m e sia $f\colon V \to W$ un morfismo suriettivo. Per ogni intero $l = n - m, \dots, n$ i sottoinsiemi W_l costituiti dai punti $P \in W$ tali che V_p abbia una componente di dimensione almeno l, sono chiusi in W.*

Dim. Per il teorema (17.20), $W_{n,m} = W$ e vi è un chiuso $X \subsetneq W$ tale che $W_l \subseteq X$ per $l > n - m$. Supponiamo allora $l > n - m$ e $W_l \neq \varnothing$. Per provare che W_l è chiuso, basta provare che lo è la sua intersezione con ciascuna componente irriducibile di X. Supponiamo allora X irriducibile, e siano $Y_1, \dots, Y_h$ le componenti irriducibili di $f^{-1}(x)$ tali che

$$f_i = f_{|Y_i}\colon Y_i \to X$$

sia dominante, e quindi suriettiva poiché V è proiettiva. Se $l \leqslant dim\, Y_i - dim\, X$ per qualche $i = 1, \dots, h$ in virtù del teorema (17.20) si ha $W_l = X$. Se invece per ogni $i = 1, \dots, h$, $l > dim\, Y_i$, $l > dim\, Y_i - dim\, X$, W_l è contenuta in un sottoinsieme chiuso proprio di X. Reiterando allora il ragionamento, si perviene all'asserto. $\square$

Corollario 17.22. *Siano V, W varietà proiettive ed $f\colon V \to W$ un morfismo. Sia inoltre Z un chiuso di V tale che $f(Z) = W$ e che per ogni $P \in W$, $Z_p = V_p \cap Z$ è irriducibile, di dimensione costante al variare di P. Allora Z è irriducibile e $dim\, Z = dim\, Z_p + dim\, W$.*

Dim. Poniamo $n = dim\, Z_p$, $m = dim\, W$. Sia

$$Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_h$$

una decomposizione irriducibile di Z in componenti irriducibili. Poiché $f(Z) = W$,

$$\exists Z_1, \dots, Z_l \text{ componenti di } Z\colon f(Z_i) = W, i = 1, \dots, l$$

mentre $f(Z_i)$ è un chiuso proprio di W, per $i = l+1, \dots, h$. Sia U l'aperto non vuoto di W dato da $W - \left(\cup_{i=l+1}^{h} f(Z_i)\right)$. Per ogni $i = 1, \dots, l$, e per ogni $P \in U$, denotiamo con $n_i(P)$ la massima dimensione di una componente di $V_p \cap Z_i$, e denotiamo ancora con n_i il minimo di $n_i(P)$ al variare di P in U. In virtù del teorema (17.20),

$$\exists U' \subset U \text{ aperto non vuoto} : \forall P \in U' \qquad n_i = n_i(P), i = 1, \dots, l$$

Inoltre

$$P \in U \Rightarrow Z_p = (V_p \cap Z_1) \cup \cdots \cup (V_p \cap Z_l)$$

sicchè

$$\exists i = 1, \dots, l (i = 1) \colon Z_p = V_p \cap Z_i$$

Si prenda per esempio $i = 1$. Ma allora $n_1 = n$, cosicchè $dim\, Z_1 = n + m$. Allora per ogni $P \in W$, si ha che la dimensione di ogni componente di $Z_1 \cap V_p$ vale almeno n. D'altra parte, essendo $V_p \cap Z_1 \subseteq Z_p$, si ha l'uguaglianza, e dunque $Z_1 = Z$. $\square$

Esempio 17.23. Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva e sia p la proiezione di V su un sottospazio $\mathbb{P}_2$ da un centro $\mathbb{P}_1$ tale che $\mathbb{P}_1 \cap V = \varnothing$. Abbiamo visto che $p(V)$ è una sottovarietà di $\mathbb{P}_2$, e che anzi il morfismo $p \colon V \to p(V')$ è finito, sicchè $dim\, V = dim\, p(V)$. La varietà $p^{-1}(p(V)) = W$ é detta cono (proiettivo) su V di vertice $\mathbb{P}_1$: la nozione di cono introdotta è di questa un caso particolare. Ovviamente si ha $W = \bigcup_{P \in V} (\mathbb{P}_1 \vee P)$. Vi è inoltre un morfismo naturale, restrizione di p, $\widetilde{p} \colon W - \mathbb{P}_1 \to p(V)$ tale che per ogni $P \in p(V)$,

$$\widetilde{p}^{-1}(P) = \mathbb{P}_1 \vee P - \mathbb{P}_1$$

Poiché $W - \mathbb{P}_1$ è un aperto non vuoto di W, e $dim\, \widetilde{p}^{-1}(P) = dim\, \mathbb{P}_1 + 1$, si ha

$$dim\, W = dim\, V + dim\, \mathbb{P}_1 + 1$$

Proposizione 17.24. *Per una varietà affine di V, si ha $dim\, V = dim_k A(V)$. Invece, se V è una varietà proiettiva, è $dim\, V = dim_k S(V) - 1$.*

Dim. Se $V \subseteq \mathbb{P}^n$, si pensi $\mathbb{P}^n$ immerso in $\mathbb{P}^{n+1}$ come iperpiano all'infinito di $\mathbb{A}^{n+1}$ e si consideri il cono affine V' su V di vertice 0, la cui chiusura in $\mathbb{P}^{n+1}$ è il cono proiettivo. Si ha allora, per l'esempio (17.23), $dim\, V' = dim\, V + 1$. Ma $A(V') = S(V)$, perchè $\mathcal{I}_a(V') = \mathcal{I}_p(V)$ e da ciò segue quanto prima asserito.

In applicazione dei risultati di questo paragrafo, forniamo qualche complemento di **teoria dell'eliminazione**. A tale scopo riprendiamo le notazioni precedenti, e poniamo, per brevità $\sum (n_i d_1, \dots, d_h) = \mathbb{P}^{N(n,d_1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N(n,d_h)}$.

Proposizione 17.25. *Il chiuso $Z\,(n; d_1, \dots, d_h)$ di $\sum (n; , d_1, \dots, d_h)$ è irriducibile.* $\square$

Dim. Si consideri $\Gamma(n; d_1, \ldots, d_h) \subseteq \sum(n; d_1, \ldots, d_h) \times \mathbb{P}^n$, formato dalle coppie $((H_1, \ldots, H_h), P)$ tali che $P \in H_1 \cap \cdots \cap H_h$. $\Gamma(n; d_1, \ldots, d_h)$ è chiuso in $\sum(n; d_1, \ldots, d_h) \times \hat{N}^n$: della facile verifica di questa circostanza lasciamo la cura al Lettore. Inoltre il morfismo

$$p_2 \colon \Gamma(n; d_1, \ldots, d_h) \to \mathbb{P}^n$$

è chiaramente suriettivo. Per ogni punto $P \in \mathbb{P}^n$ si consideri infatti l'iperpiano $\sum(n; d_1, P)$ di $\mathbb{P}^{N(n,d_i)}$ costituito da tutte le ipersuperficie $H \in \mathbb{P}^{N(n,d_i)}$ tali che $P \in N$. È chiaro allora che

$$p_2^{-1}(P) = \sum(n; d_1, P) \times \cdots \times \sum(n; d_h, P)$$

Dunque per ogni $P \in \mathbb{P}^n$, $p_2^{-1}(P)$ è irriducibile, di dimensione

$$N(n, d_1) - 1 + \cdots + N(n, d_h) - 1 = N(n, d_1) + \cdots + N(n, d_h) - h$$

Applicando il corollario (17.22) si può affermare che $\Gamma(n; d_1, \ldots, d_h)$ è irriducibile. Poiché

$$Z(n; d_1, \ldots, d_h) = p_1(\Gamma(n; d_1, \ldots, d_h))$$

ne segue la sua irriducibilità. $\square$

Da ció consegue che

$$codim_{\sum(n;d_1,\ldots,d_h)} Z(n; d_1, \ldots, d_h) \geq h - n \tag{2}$$

Tale relazione non è significativa se $h \leq n$. In effetti in tal caso, in virtù del corollario (17.5), si può affermare che $Z(n; d_1, \ldots, d_h) = \sum(n; d_1; \ldots; d_h)$. Sia allora $h > n$; mostriamo che in tal caso in (2) vale l'uguaglianza. A tale scopo, in virtù del teorema (17.20), basta mostrare che esiste un

$$\exists (H_1, \ldots, H_h) \in Z(n; d_1, \ldots, d_h) : p_1^{-1}(H_1, \ldots, H_h) \subseteq \Gamma(n; d_1, \ldots, d_h)$$

ovvero basta esibire h polinomi omogenei di gradi $d_1, \ldots, d_h$ che ammettono delle soluzioni non banali, e che tali soluzioni siano in numero finito. Poiché $h > n$ possono essere $x_1^{d_1}, \ldots, x_h^{dn}, x_n^{dn+1}, \ldots, x_n^{dh}$, che ammettono l'unica soluzione $[1, 0, \ldots, 0]$. Il primo caso interessante è dunque quello $h = n+1$, laddove $codim_{\sum(n;d_1,\ldots,d_{n+1}) Z(n;d_1,\ldots,d_{n-1})} = 1$. Di tale caso intendiamo approfondire lo studio.

Teorema 17.26. *Le varietà di codimensione* 1 *in* $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ *sono tutte e sole le sottovarietà definite in* $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ *da un'equazione del tipo* $f = 0$, *con* $f \in^p S_{d_1,\ldots,d_r}^{n_1,\ldots,n_r}$, *e non costante, irriducibile.*

Dim. Dato infatti un polinomio f siffatto, si ponga $Z_s(f) = V$, e dimostriamo che $dim\, V = n_1 + \cdots + n_r - 1$. Si osservi che f è del tipo $f\left(\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^r\right)$ dove $\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^r$ sono coordinate omogenee in $\mathbb{P}^{n_1}, \ldots \mathbb{P}^{n_r}$ rispettivamente. Poiché f

non è costante, in f compaiono effettivamente le variabili di uno almeno di tali gruppi; supponiamo ad esempio che f sia non costante nelle $\underline{x}^r$. Consideriamo poi la proiezione

$$p\colon V \to \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_{r-1}}$$

$$P = \left(\left[\underline{a}^1\right], \ldots, \left[\underline{a}^{r-1}\right]\right) \in \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_{r-1}} \Rightarrow p^{-1}(P) \subseteq \{P\} \times \mathbb{P}^{n_r}$$

di equazione $f\left(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^{r-1}, \underline{x}^r\right) = 0$ in $\mathbb{P}^{n_r}$, sicchè o è tutto $\{P\} \times \mathbb{P}^{n_r}$ o ne è una ipersuperficie, o è vuota. Il primo si presenta solo se $f\left(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^{r-1}, \underline{x}^r\right)$ è identicamente nullo, cosa che , per le ipotesi fatte su f, può accadere solo se P appartiene ad un chiuso proprio di $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_{r-1}}$. Il terzo caso può accadere solo se $f\left(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^{r-1}, \underline{x}^r\right)$ è una costante non nulla in $\underline{x}^r$, il che non può accadere, stanti le ipotesi su f. Poiché V è irriducibile, per il teorema (17.20) si ha $dim\, V = n_1 + \cdots + n_r - 1$. Il viceversa si prova esattamente come il teorema (17.2). $\square$

Proposizione 17.27. *Fissiamo un $i = 1, \ldots, n+1$, la proiezione*

$$p_i\colon Z\left(n; d_1, \ldots, d_{n+1}\right) \to \sum\left(n; d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_{n+1}\right)$$

é un morfismo suriettivo.

Dim. Fissato un punto

$$\left(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_{n+1}\right) \in \sum\left(n; d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_{n+1}\right)$$

risulta $H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \cdots \cap H_{n+1} \neq \varnothing$ per il corollario (17.5); allora per ogni punto $P \in H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \ldots H_{n+1}$,

$$p_i^{-1}\left(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_{n+1}\right) \subseteq \left\{\left(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_{n+1}\right)\right\} \times \mathbb{P}^{N(n,d_i)}$$

isomorfo a $\mathbb{P}^{N(n,d_i)}$, contiene $\sum(n; d_i, P)$, ed è quindi non vuoto. Di più, possono verificarsi soltanto le seguenti due eventualità:

(a) $H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \cdots \cap H_{n+1}$ è un insieme finito $\{P_1, \ldots, P_l\}$, e allora $p_i^{-1}\left(H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \cdots \cap H_{n+1}\right)$ è dato da $\bigcup\limits_{i=1}^{l} \sum(n; d_i, P_j)$, che è un'ipersuperficie riducibile in $\mathbb{P}^{N(n,d_i)}$;

(b) $H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \cdots \cap H_{n+1}$ possiede qualche componente irriducibile di dimensione positiva, e allora

$$p_i^{-1}\left(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_{n+1}\right) = \mathbb{P}^{N(n,d_i)}$$

In virtù del teorema (17.20), esiste un aperto non vuoto

$$U \subseteq \sum\left(n; d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_{n+1}\right)$$

tale che per ogni $\left(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots\ H_{n+1}\right) \in U$ si verifica la (a) e non la (b). Ciò reca un'interessante precisazione al corollario (17.5) , nel caso in cui $V = \mathbb{P}^n$. Precisamente si ha che, se $r \leq n$, esiste un aperto non vuoto U di $\sum(n; d_1, \ldots, d_r)$ tale che per ogni $(H_1, \ldots, H_r) \in U$ ogni componente irriducibile di $H_1 \cap \cdots \cap H_r$ ha dimensione esattamente $n - r$. Ciò si é provato per $r = n$ con i ragionamenti effettuati dianzi; per provarlo per $r < n$ si può procedere per induzione discendente. Sia allora vera la cosa per $\sum(n; d_1, \ldots, d_{r+1})$ e sia U' l'aperto non vuoto di $\sum(n; d_1, \ldots, d_{r+1})$ tale che per ogni $(H_1, \ldots, H_{r+1}) \in U'$, ogni componente di $H_1 \cap \cdots \cap H_{r+1}$ abbia dimensione $n - r - 1$. Poiché la proiezione

$$\widetilde{p}\colon \sum(n; d_1, \ldots, d_{r+1}) \to \sum(n; d_1, \ldots, d_r)$$

è suriettiva, $\widetilde{p}_{|U'}$ è dominante, sicchè esiste un aperto non vuoto $U \subseteq \sum(n; d_1, \ldots, d_r)$ tale che $\widetilde{p}^{-1}(U) \subseteq U'$. Per ogni $(H_1, \ldots, H_r) \in U$ esiste un $H_{r+1} \in \sum(n; d_{r+1})$ tale che ogni componente di $H_1 \cap \cdots \cap H_{r+1}$ abbia dimensione $n - r - 1$. Allora ogni componente di $H_1 \cap \cdots \cap H_r$ ha dimensione $n - r$, per il corollario (17.5). $\square$

Tornando allo studio di $Z(n; d_1, \ldots, d_{n+1})$, possiamo allora precisare che, dette $\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^{n+1}$ le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^{N(n,d_1)}, \ldots, \mathbb{P}^{N(n,d_{n+1})}$ rispettivamente, esiste un polinomio irriducibile pluriomogeneo, non costante, definito a meno del prodotto per una costante non nulla, $\mathcal{R}\left(\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^{n+1}\right)$, tale che $Z(n; d_1, \ldots, d_{n+1}) = Z_s(\mathcal{R})$. Il polinomio $\mathcal{R}$ è detto **polinomio risultante** di $n+1$ polinomi in $n+1$ indeterminante di gradi $d_1, \ldots, d_{h+1}$ a coefficienti indeterminati. Il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di tali forme abbia una soluzione non banale.

Proposizione 17.28. *$\mathcal{R}$ non è costante rispetto a nessun gruppo di variabili $\underline{x}^i$, $i = 1, \ldots, n+1$.*

Dim. Se U è l'aperto non vuoto di $\sum(n; d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_{n+1})$ in cui si verfica la (a), per ogni $(H_1, \ldots, H_{i-1}, H_{i+1}, \ldots, H_{n+1}) \in U$, se $H_j = [\underline{a}^j]$ in $\mathbb{P}^{N(n,d_j)}$, $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1$, l'equazione

$$\mathcal{R}\left(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^{i-1}, \underline{x}^i, \underline{a}^{i+1}, \ldots, \underline{a}^n\right) = 0$$

definisce l'ipersuperficie $\overset{l}{\underset{j=1}{U}} \sum(n; d_i, P_j)$ di $\mathbb{P}^{N(n,d_i)}$, con

$$\{P_1, \ldots, P_r\} = H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \cdots \cap H_{n+1}$$

Si ha allora che, detto α_i il grado di $\mathcal{R}$ sulle variabili $\underline{x}^i$, $\alpha_i \geq l$. In definitiva si ottiene allora che α_i è non minore del massimo ordine di un isieme finito di punti che sia intersezione di ipersuperficie di grado $d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_{n+1}$. In particolare si ha

$$\alpha_i \geq d_1 \ldots d_{i-1} d_{i+1} \ldots d_{n+1} \tag{3}$$

Infatti se si prende H_j riducibile a d_j iperpiani distinti presi in modo opportuno, $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1$ è facile constatare, e di ciò lasciamo il compito al Lettore, che $H_1 \cap \cdots \cap H_{i-1} \cap H_{i+1} \cap \cdots \cap H_{n+1}$ è costituito di $d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_{n+1}$ punti distinti. Vogliamo ora provare che in (3) vale, di fatto, l'uguaglianza. A tale scopo ragioniamo come segue. Fissiamo un qualunque intero positivo d, si può considerare $\sum \left(n; d_0, \dots, d_{N(n,d)}\right)$ con $d_i = d$, $i = 0. \dots, N(n,d)$. Siano $\underline{x}$ le coordinate omgenee in $\mathbb{P}^{N(n,d)}$, sicchè $\underline{x}$ è un vettore d'ordine $N(n,d)+1$ su k, non nullo. Se $\left(H_0, \dots, H_{N(n,d)}\right) \in \sum \left(n; d_0, \dots, d_{N(n,d)}\right)$ e se $H_i = [\underline{x}_i]$, la matrice

$$M = \begin{Vmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \underline{x}_{N(n,d)} \end{Vmatrix}$$

è quadrata d'ordine $N(n,d)+1$, sicchè il suo determinante $\varDelta(n,d)$ è un'espressione razionale intera in $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{N(n,d)}$, in cui anzi, $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{N(n,d)}$ compaiono linearmente. $\varDelta(n,d)$ può dunque considerarsi come un polinomio pluriomogeneo in $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{N(n,d)}$, ovviamente irriducibile. Il suo luogo di zeri in $\sum \left(n; d_0, \dots, d_{N(n,d)}\right)$ è una sottovarietà di codimensione 1, denotata con $D(n,d)$: geometricamente essa rappresenta le $(N(n,d)+1)-$ple di ipersuperficie generalizzate di grado d in $\mathbb{P}^n$, che, quali punti di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ non sono linearmente indipendenti, ossia sono contenute in qualche sottospazio proiettivo proprio di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$. Si noti che, per $d = 1$, $N(n,d) = d$ e $D(n,d)$ coincide con $Z(n; 1, \dots, 1)$; allora $\varDelta(n,d)$ coincide con $\mathcal{R}(n; 1, \dots, 1)$. $\square$

Ma torniamo allo studio di $\mathcal{R}(n; d_1, \dots, d_{n+1})$ in generale. Poniamo $d = d_2 + \cdots + d_{n+1} - n + 1$, ed osserviamo che i monomi distinti con coefficienti 1 e grado d in $x_0, \dots, x_n$ godono della proprietà che almeno uno x_i vi compare con grado d_{i+1}. Allora quei monomi si ottengono tutti, e una sola volta, sotto la forma $x_i^{d_{i+1}} \mu_i$, $i = 0, \dots, n$ dove μ_i è un monomio di grado $d - d_{i+1}$ tale che:

(a) se $i = 0$, non è tenuto a soddisfare ulteriori condizioni;
(b) se $i = 1$, contiene x_0 a grado $\leq d_1 - 1$;
(c) se $i = 2$, contiene x_j a grado $\leq d_{j+1} - 1$, $j = 0, 1$;

Si noti che i monomi del tipo μ_n sono in numero di $d_1, \dots, d_n$. Sia ora ν_i il numero dei monomi μ_i, sicchè

$$\nu_0 + \cdots + \nu_i = N(n,d) + 1$$

Denotiamo inoltre con $M_{i,j}$, $j = 1, \dots, \nu_i$, i monomi del tipo μ_i, e con $H_{i,j}$ l'ipersuperficie generalizzata di $\mathbb{P}^n$, di grado $d - d_{i+1}$, e di equazione $M_{i,j} = 0$. Consideriamo infine il morfismo

$$\psi \colon \sum (n; d_1, \dots, d_{n+1}) \to \underbrace{\mathbb{P}^{N(n,d)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N(n,d)}}_{N(n,d)+1 \,\text{volte}}$$

$(H_1, \ldots, H_{n+1}) \to (H_1+H_{0,1}, \ldots, H_1+H_{0,\nu_0}, \ldots, H_{n+1}+H_{n,1}, \ldots, H_{n+1}+H_{n,\nu_n})$

Se $H_i = [\underline{a}^i] \in \mathbb{P}^{N(n,d_i)}$, $i = 1, \ldots, n+1$, allora

$$\psi\left([\underline{a}^i], \ldots, [\underline{a}^{n+1}]\right) = \Big([\underline{x}_0], \ldots, [\underline{x}_{N(n,d)}]\Big)$$

dove $\underline{x}_i$ sono funzioni lineari di $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^{n+1}$, e scriveremo pertanto $\underline{x}_i = \underline{x}_i(\underline{a}^j)$. Ora è chiaro che $\psi^{-1}(D(n,d))$ è un chiuso di codimensione 1, e precisamente è definito dall'equazione

$$\Delta(n,d)\Big(\underline{x}_0(\underline{x}^j), \ldots, \underline{x}_{N(n,d)}(\underline{x}^j)\Big) = 0$$

Quest'ultima non è identicamente nulla perchè $\psi^{-1}(\Delta(n,d)) \subsetneq \sum(n; d_1, \ldots, d_{n+1})$: si noti infatti che se H_i ha equazione $x_{i-1}^{d_i}$, $(H_1, \ldots, H_{n+1}) \notin \psi^{-1}(D(n,d))$. Ora è chiaro che $\psi^{-1}(D(n,d)) \supseteq Z(n; d_1, \ldots, d_{n+1})$, sicchè $\mathcal{R}$ divide

$$\Delta_r = \Delta(n,d)\left(\underline{x}_0(\underline{x}^j), \ldots, x_{N(n,d)}(\underline{x}^j)\right)$$

D'altra parte, quest'ultimo polinomio ha in $\underline{x}^i$ grado ν_{-i}, come subito si constata , e quindi in $\underline{x}^{n+1}$ grado $d_1, \ldots, d_n$. Ne segue allora che $\alpha_n \leq d_1 \ldots d_n$. Scambiando l'ordine delle variabili $\underline{x}^i$ si prova similmente che $\alpha_i \leq d_1 \ldots d_{i-1} d_{i+1} \ldots d_{n+1}$, e da ciò si ha l'uguaglianza in (3).
È bene osservare esplicitamente che, dalle argomentazioni che precedono, si trae una rilevante conseguenza

Teorema 17.29. *(Teorema di Lasker) Se $(H_1, \ldots, H_{n+1}) \notin Z(n; d_1, \ldots, d_{n+1})$, e H_i ha equazione $f_i = 0$, l'ideale $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ contiene $(S_+)^m$, per $m \geq d_1 + \cdots + d_{n+1} - n + 1$.*

Dim. Si considerino infatti i polinomi $\Delta_1, \ldots, \Delta_{r-1}$, analoghi a Δ_r, ottenuti cambiando le voci delle variabili $\underline{x}^i$. Allora $\mathcal{R}$ coincide col massimo comune divisore D di $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$. Infatti $\mathcal{R}$ divide D, e ha grado non minore di quello di D in ogni gruppo di variabili, com'è possibile constatare. Allora se $\mathcal{R} \neq 0$, esiste qualche $\Delta_i \neq 0$ e , tenendo presente l'interpretazione geometrica dei luoghi $Z_s(\Delta_i)$, si ha l'asserto. $\square$

Corollario 17.30. *Il massimo numero finito di punti a comune di n ipersuperficie generalizzate di gradi $d_1, \ldots, d_n$ in $\mathbb{P}^n$ vale $d_1, \ldots, d_n$. Nel caso $n = 2$ si ottiene così un'ulteriore precisazione della formulazione debole del teorema di Bezout.*

Osservazione 60. Se $n = 1$, $\mathcal{R}$ è proprio il polinomio risultante definito nel §1, il quale risulta così irriducibile.

Di tale polinomio risultante vogliamo ora dare un'altra forma. Si noti che $\mathbb{P}^{N(n,d)} = \mathbb{P}^d$ e che si ha un morfismo suriettivo:

$$\psi\colon \underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_1-\text{volte}}\times\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_2-\text{volte}}\to\mathbb{P}^{N(1,d_1)}\times\mathbb{P}^{N(1,d_2)}=\mathbb{P}^{d_1}\times\mathbb{P}^{d_2}$$

$$\left(\left(P_1,\ldots,P_{d_1}\right),\left(Q_1,\ldots,Q_{d_2}\right)\right)\to\left(P_1+\cdots+P_{d_2},\,Q_1+\cdots+Q_{d_2}\right)$$

Supponiamo che sull'$i-$simo fattore $\mathbb{P}_{1,i}$ di $\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_1-\text{volte}}$ siano $\left[\lambda_0^i,\lambda_1^i\right]$ le coordinate omogenee, e che sul $j-$esimo fattore $\mathbb{P}_{2,j}$ di $\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_2-\text{volte}}$ siano $\left[\mu_0^j,\mu_i^1\right]$ le coordinate omogenee. Allora $\psi\left(\left[\lambda_0^i,\lambda_1^i\right],\left[\mu_0^j,\mu_1^j\right]\right)_{\substack{i=1,\ldots,d_1\\ j=1,\ldots,d_2}}$ è la coppia di ipersuperficie generalizzate di $\mathbb{P}^1$ di equazione

$$f(x_0,x_1)=\prod_{i=1}^{d_1}\left(\lambda_0^i x_1-\lambda_1^i x_0\right)=0$$
$$g(x_0,x_1)=\prod_{j=1}^{d_2}\left(\mu_0^j x_1-\mu_1^j x_1\right)=0$$

Si noti che i coefficienti $X_0,\ldots,X_{d_1}$ di $f\left[Y_0,\ldots,Y_{d_2}\,\text{di}\,g\right]$ sono espressioni razionali intere lineari di λ_h^i $\left[\text{di}\,\mu_h^j\right]$. Porremo allora

$$X_s=x_s(\lambda_h^i)\qquad s=0,\ldots,d_1$$
$$Y_t=y_t(\mu_h^j)\qquad t=0,\ldots,d_2$$

Il chiuso $\psi^{-1}\left(Z\left(1;d_1,d_2\right)\right)$ è ovviamente propio in $(\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_1-\text{volte}})\times(\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_2-\text{volte}})$ ed ha codimensione 1, avendo equazione

$$\overline{\mathcal{R}}\left(\lambda_h^i,\mu_h^j\right)=\mathcal{R}\left(X_s\left(\lambda_h^i\right),Y_t\left(\mu_h^j\right)\right)=0$$

Si noti che il polinomio $\overline{\mathcal{R}}$ ha grado d_2 nelle λ_h^i e grado d_1 nelle μ_h^j. Si consideri ora l'altro chiuso di $(\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_1-\text{volte}})\times(\underbrace{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}_{d_2-\text{volte}})$, def31nto dall'equazione

$$\widetilde{\mathcal{R}}\left(\lambda_h^i,\mu_h^j\right)=\prod_{i=1}^{d_1}\prod_{j=1}^{d_2}\left(\lambda_0^i\mu_1^j-\lambda_1^i\mu_0^j\right)=(-1)^{d_1}\prod_{i=1}^{d_1}g\left(\lambda_0^i,\lambda_1^i\right)=\prod_{j=1}^{d_1}f\left(\mu_0^j,\mu_1^j\right)=0$$

Si noti che anche il polinomio $\widetilde{\mathcal{R}}$, al pari di $\overline{\mathcal{R}}$ ha grado d_2 nelle λ_h^i e grado d_1 nelle μ_h^j. È ben chiaro che $Z_s(\widetilde{\mathcal{R}})\subseteq\psi^{-1}\left(Z\left(1;d_1,d_2\right)\right)=Z_s(\overline{\mathcal{R}})$. Ma inoltre $\widetilde{\mathcal{R}}$ è riducibile in d_1d_2 fattori, lineari in entrambe le λ_h^i,μ_h^j, e quindi irriducibili: è chiaro che il luogo di zeri di ciascuno di tali fattori lineari è contenuto in

$Z_s(\overline{\mathcal{R}})$, sicchè $\overline{\mathcal{R}}$ è divisibile per ognuno di essi. Poiché questi fattori lineari sono tutti fra loro distinti, $\overline{\mathcal{R}}$ è divisibile anche per il loro prodotto e dunque $\widetilde{\mathcal{R}}$.

Supponiamo ora char $H = 0$ e fissata una ipersuperficie generalizzata per H di $\mathbb{P}^n$ di grado $d > 1$, ne sia $f\left(x_0, \ldots, x_n\right) = 0$ un'equazione. Ad H restano associate $n+1$ ipersuperficie generalizzate $H_0', \ldots, H_n'$ di grado $d-1$, e di equazioni rispettive

$$f_i' = \frac{\delta f}{\delta x_i}\left(x_0, \ldots, x_n\right) = 0 \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{4}$$

Si ha così un'applicazione naturale

$$\pi \colon H \in \mathbb{P}^{N(n,d)} \to \left(H_0', \ldots, H_n'\right) \in \underbrace{\mathbb{P}^{N(n\,d-1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N(n\,d-1)}}_{n+1-\text{volte}}$$

che, com'è facile verificare, è un morfismo. Il chiuso $\pi^{-1}\left(Z\left(n; d-1, \ldots, d-1\right)\right)$ è proprio in $\mathbb{P}^{N(n,d)}$: infatti la ipersuperficie H di equazione

$$x_0^d + \cdots + x_n^d = 0 \tag{5}$$

è tale che $\pi(H) \notin Z\left(n; d-1, \ldots, d-1\right)$. D'altra parte, ragionando come di consueto, si verifica che $\pi^{-1}\left(Z\left(n; d-1, \ldots, d-1\right)\right)$ ha codimensione 1, la sua equazione essendo

$$\mathcal{D}(n,d)(\underline{x}) = \mathcal{R}\left(\underline{x}_1', \ldots, \underline{x}_n'\right) = 0$$

dove $\mathcal{R}\left(\underline{x}_1^1, \ldots, \underline{x}_n^n\right)$ è il polinomio risultante di $n+1$ polinomi omogenei di grado $d-1$ in $n+1$ incognite, $\underline{x}$ sono le coordinate di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ e $\underline{x}_i'$ sono le coordinate del punto di $\mathbb{P}^{N(n,d-1)}$ corrispondente all'ipersuperficie H_i', se $H = [\underline{x}]$.

Definizione 17.31. Il polinomio $\mathcal{D}(n,d)$ si dice **polinomio discriminante** del polinomio di grado d in $n+1$ incognite a coefficienti indeterminati, e $\pi^{-1}\left(Z\left(n; d-1, \ldots, d-1\right)\right)$ si denota ancora con $\mathcal{D}(n,d)$ e si dice **ipersuperficie discriminante** di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$.

Osservazione 61. Se $d = 2$. le coordinate in $\mathbb{P}^{N(n,2)}$ sono $\left[x_{ij}\right]_{\substack{i,j=0,\ldots,n \\ i \le j}}$ e

$$\mathcal{D}(n,2) = det\left|x_{ij}\right|_{i,j=0,\ldots,n}$$

Dunque geometricamente $\mathcal{D}(n,2)$ rappresenta l'insieme delle quadriche degeneri in $\mathbb{P}^{N(n,2)}$.

Conserviamo le notazioni precedenti e cominciamo col supporre $n > 1$. Se $H \in \mathbb{P}^{N(n,d)}$ ed è riducibile, esiste certo un punto $P \in H$ tale che o P appartenga a una componente multipla di H oppure P appartenga a due componenti inducibili distinte di H. Il Lettore verificherà agevolmente che allora $P \in$

$H'_0 \cap \cdots \cap H'_n$, sicchè $H \in \mathcal{D}(n,d)$. Similmente se $n = 1$, e H possiede qualche componente multipla, $H \in \mathcal{D}(1,d)$. Pertanto sono propri i chiusi costituiti delle ipersuperficie di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ con componenti multiple, e quelli costituiti dalle ipersuperficie riducibile se $n \geq 1$. Il Lettore verificherà agevolmente che ciò vale anche in caratteristica positiva. A tale scopo si suggerisce di fornire per ogni n e d un esempio di ipersuperficie generalizzata di equazione $f = 0$ tale che non esistono soluzioni del sistema $f = \frac{\delta f}{\delta x_0} = \cdots = \frac{\delta f}{\delta x_n} = 0$. Per $n = 2$ e p che divide d (che è il caso rilevante), ma $p \neq 3$, si può considerare

$$f(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1^{d-1} + x_1 x_2^{d-1} + x_2 x_1^{d-1}$$

Se $p = 3$ si può prendere il suddetto polinomio più il monomio $x_0 x_1 x_2^{d-2}$. Concludiamo osservando che alcuni dei risultati provati in questo paragrafo hanno interessanti ed importanti interpretazioni algebriche. È ad esempio noto il seguente teorema di algebra commutativa:

Teorema 17.32. *Sia k un campo, B un dominio di integrità che sia finitamente generato come $k-$algebra. Allora:*

(a) $dim_k B$ eguaglia il grado di trascendenze di $\mathbb{Q}(B)$ su k;
(b) per ogni ideale primo $\mathcal{I}$in B si ha:

$$altezza(\mathcal{I}) + dim\, \frac{B}{\mathcal{I}} = dim\, B.$$

Il lettore può agevolmente dedurre tale teorema dai risultati di questo paragrafo. Sono inoltre ben noti i seguenti teoremi:

Teorema 17.33. ***(di Krull sull'ideale principale)*** *Sia A un anello noetheriano e sia $f \in A$ un elemento che non sia nè divisore dello zero, nè invertibile. Allora ogni primo minimale contenente f ha altezza* 1.

Teorema 17.34. *Sia A un dominio noetheriano. A è a fattorizzazione unica se e solo se ogni ideale primo di altezza* 1 *è principale.*

Il teorema (17.2) può interpretarsi come applicazione di tali teoremi.

18 Varietà di Grassmann: definizione e prime proprietà

Le varietá di Grassmann sono oggetti interessanti di studio nella geometria algebrica. Sia $char\, K \neq 2$ e fissati gli interi $m > 0, n > 0$, con $m < n$, si consideri il seguente insieme:

$$\mathcal{G}(n,m) = \{Z \leq \mathbb{P}_k^n : dim Z = m\}$$

l'insieme dei sottospazi di dimensione m di $\mathbb{P}_k^n$. Fissato un elemento $V \in \mathcal{G}(n,m)$, ne restano determinate, come s'è visto precedentemente le coordinate grassmaniane. $\left(p_{j_0 \overset{<}{\cdots} j_m}\right)$ e le coordinate grassmaniane duali $\left(p^{i_0 \overset{<}{\cdots} i_{n-m-1}}\right)$, che sono entrambi vettori numerici d'ordine

$$M(n+m)+1=\binom{n+1}{n-m}$$

non nulli, su k, definiti a meno di un fattore di proporzionalità e fra loro proporzionali. L'applicazione

$$g_{n,m}\colon V \in \mathcal{G}_{(n,m)} \to \left[p_{j_o \overset{<}{\cdots} j_m}\right] \in \mathbb{P}^{M(n,m)}$$

che coincide con l'altra

$$\check{g}_{n,m}\colon V \in \mathcal{G}_{(n,m)} \to \left[p^{i_o \overset{<}{\cdots} i_{n \cdot m \cdot \frac{1}{j}}}\right] \in \mathbb{P}^{M)(n,m)}$$

è dunque ben definita e **iniettiva**. L'insieme $\mathcal{G}_{(\mathbf{n},\mathbf{m})}$ immagine di $\mathcal{G}_{(n,m)}$ tramite $g_{n,m}$ è dunque un sottoinsieme di $\mathbb{P}^{M(n,m)}$ che è in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{G}_{(n,m)}$.
Si noti che, dato $V \in \mathcal{G}_{(n,m)}$, resta determinato il sottospazio $\check{V}$ di $\check{\mathbb{P}}^n$ costituito da tutti gli iperpiani che contengono V. Ovviamente si ha $dim\widehat{V} = n-m-1$ e le coordinate grassmaniane duali di V non sono altro che le coordinate grassmaniane di $\check{V}$. Di qui segue che

$$\mathcal{G}_{(\mathbf{n},\mathbf{m})} = \mathcal{G}_{(\mathbf{n}-\mathbf{m}-\mathbf{1},\mathbf{m})}$$

È pure opportuno tenere presente la seguente interpretazione algebrica di $\mathcal{G}_{(n,m)}$. Si riguardi $\mathbb{A}^{n+1}$ come uno spazio vettoriale, sicchè $\Lambda^{m+1}\,\mathbb{A}^{n+1}$ è uno spazio vettoriale di dimensione $M(n,m)+1$, e dunque può riguardarsi come un $\mathbb{A}^{M(n,m)+1}$, i cui punti sono tensori alternanti $m+1$ volte controvarianti su $\mathbb{A}^{n+1}$.

Definizione 18.1. Un tensore $T \in \mathbb{A}^{M(n,m)+1}$, non nullo, si dice **decomponibile**, se

$$\exists \underline{a}_0,\ldots,\underline{a}_m \in \mathbb{A}^{n+1} \text{ tali che } T = \underline{a}_0 \wedge \cdots \wedge \underline{a}_m$$

Osservazione 62. I tensori decomponibili generano $\Lambda^{m+1}\mathbb{A}^{n+1}$ come spazio vettoriale, ossia non sono contenuti in alcun sottospazio proprio.

$\mathcal{G}_{(n,m)}$ può anche riguardarsi in modo naturale, come l'insieme dei sottospazi vettoriali $(m+1)-$dimensionali di $\mathbb{A}^{n+1}$. Dato allora $V \in \mathcal{G}_{(n,m)}$ e determinata una base $\underline{a}_0,\ldots,\underline{a}_n$, resta individuato il tensore decomponibile $\underline{a}_0 \wedge\cdots\wedge \underline{a}_m$: se si cambia base in V tale tensore decomponibile varia, ovviamente, ma solo per il prodotto per un elemento di k^*, come il lettore facilmente verficherà. Pertanto se $\mathbb{P}^{M(n,m)}$ è lo spazio proiettivo dedotto da $\mathbb{A}^{M(n,m)+1} = \Lambda^{m+1}\mathbb{A}^{n+1}$ il che si denoterà sovente scrivendo $\mathbb{P}^{M(n,m)} = \mathbb{P}(\Lambda^{m+1}\mathbb{A}^{n+1})$, resta determinata l'applicazione:

$$V \in \mathcal{G}_{n,m} \to [\underline{a}_0 \wedge \dots \underline{a}_m] \in \mathbb{P}^{M(n,m)}$$

che chiaramente coincide con la $g_{n,m}$. Dunque $\mathcal{G}_{(n,m)}$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{P}(\Lambda^{m+1}\mathbb{A}^{n+1})$ che hanno per vettori coordinate omogenei dei tensori decomponibili. È inoltre chiaro, dalla precedente discussione, che $\mathcal{G}_{(n,m)}$ è non degenere.
Studieremo ora con qualche dettaglio l'insieme $\mathcal{G}_{(n,m)}$ che, per motivi che saranno chiari al lettore nel seguito, si dice insieme ad ogni sua trasformata omografica, **varietà grassmanniana**, o semplicemente **grassmanniana dei sottospazi di dimensione m in $\mathbb{P}^n$**. Supponiamo $1 \le m \le n-1$ e cominciamo col considerare un elemento $V \in \mathcal{G}_{(n,m)}$ di coordinate plickeriane $\left(P_{j_0 \dot{<} j_m}\right)$, sicchè $\left[p_{j_0 \dot{<} j_m}\right] \in \mathbb{G}_{(n,m)}$. Siano ancora $P_i = \left[a_0^i, \dots, a_n^i\right]$, $i = 0, \dots, m$, punti linearmente indipendenti di V, tali che le suddette coordinate *plückeriane* siano proprio i minori d'ordine massimo della matrice.

$$a = \left\| \begin{matrix} \underline{a}^0 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{matrix} \right\|$$

di cui può considerarsi, più generalmente, il sistema $(p_{j_0 \dots\dots j_m})$ alternante, dei determinanti

$$p_{j_0 \dots\dots j_m} = \left| \begin{matrix} a_{j_0}^0 \dots a_{j_m}^0 \\ \dots\dots \\ a_{j_0}^m \dots a_{j_m}^m \end{matrix} \right|$$

Fissiamo ora una qualunque disposizione con ripetizioni di classe m di $\{0, \dots, n\}$, $(i_1, \dots, i_m)$. Se le colonne di a di posti $i_1, \dots, i_m$ formano un sistema di vettori linearmente dipendenti si ha ovviamente $P_{ii_1 \dots i_m} = 0$, $i = 0, \dots, n$; poiché il range di a vale $m+1$, vale naturalmente anche il viceversa. Pertanto, se le colonne di posti $i_1, \dots, i_m$ di a sono linearmente indipendenti, può considerarsi il punto $P_{i_1 \dots i_m} = [p_{0i_1 \dots i_m}, \dots, p_{ni_1 \dots i_m}] \in \mathbb{P}^n$. Naturalmente $P_{i_1 \dots i_m}$ non dipende dall'ordinamento di $i_1, \dots, i_m$, sicchè si potrà sempre supporre $i_1 < \dots < i_m$.

Lemma 18.2. *Nelle suddette ipotesi $P_{i_1 \dots i_m}$ è l'unico punto a comune di V con la faccia della piramide fondamentale di equazioni*

$$x_{i_1} = \dots = x_{i_m} = 0$$

Dim. Un punto P di V ha coordinate omogenee del tipo

$$\underline{a} = \lambda_0 \underline{a}^0 + \dots + \lambda_m \underline{a}^m$$

sicchè P appartiene alla suddetta faccia della piramide fondamentale se e solo se

$$\lambda_0 a^0_{i_1} + \cdots + \lambda_m a^m_{i_1} = 0 \qquad (1)$$
$$\cdots\cdots \qquad (2)$$
$$\lambda_0 a^0_{i_m} + \cdots + \lambda_m a^m_{i_m} = 0. \qquad (3)$$

Poiché le colonne di posti $i_1, \ldots, i_m$ di a sono linearmente indipendenti, le relazioni (11.1) determinano $[\lambda_0, \ldots, \lambda_m]$ univocamente, ossia essi sono proporzionali ai minori di ordine massimo, presi a segni alterni della matrice

$$\left\| \begin{matrix} a^0_{i_1} \ldots a^m_{i_1} \\ \ldots \\ a^0_{i_m} \ldots a^m_{i_m} \end{matrix} \right\|$$

Allora si ha

$$a_i = \lambda_0 a^0_i + \cdots + \lambda_m a^m_i = \begin{vmatrix} a^0_i \ldots a^m_i \\ a^0_{i_1} \ldots a^m_{i_1} \\ \ldots \\ a^0_{i_m} \ldots a^m_{i_m} \end{vmatrix} = p_{i\, i_1 \ldots i_m}$$

□

È bene notare esplicitamente che un'altra dimostrazione del lemma 18.2 si può trovare dalle proprietà delle forme di Cayley. Infatti la forma di Cayley di V è :

$$F_V\left(\underline{u}^0, \ldots, \underline{u}^m\right) = \sum p_{j_0 \underset{\cdot}{<} j_m} u^{j_0 \underset{\cdot}{<} j_m}$$

Ponendo $\underline{u}^j = \left(0 \ldots \underset{i_j}{1}\, 0 \ldots 0\right) = \overline{\underline{u}}^j$, $j = 1, \ldots, m$, e tenendo conto delle proprietà di alternanza, si ha

$$F_V\left(\underline{u}^0, \overline{\underline{u}}^1, \ldots, \overline{\underline{u}}^m\right) = F(\underline{u}^0) = \sum p_{i i_1 \ldots i_m} u^{i\, i_1 \ldots i_m}$$

Ciò tenendo presente (11.10) (i), e le proprietà delle forme di Cayley rispetto all'intersezione, implica l'asserto.

Consideriamo ora la matrice

$$a_{i_1 \ldots i_m} = \left\| \begin{matrix} p_{0 i_1 \ldots i_m} & p_{1 i_1 \ldots i_m} & \cdots & p_{n i_1 \ldots i_m} \\ a^0_0 & a^0_1 & \ldots & a^0_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^m_0 & a^m_1 & \ldots & a^m_n \end{matrix} \right\|$$

Dal lemma (18.2) segue che $a_{i_1 \ldots i_m}$ ha comunque range $m+1$ sicchè se ne annullano tutti i minori d'ordine $m+2$. Dunque se $(i_0 j_0 \ldots j_m)$ è una disposizione con ripetizione di classe $m+2$ di $\{0, \ldots, n\}$, si ha

$$\begin{vmatrix} p_{i_0 i_1 \ldots i_m} & p_{j_0 i_1 \ldots i_m} & \cdots & p_{j_m i_1 \ldots i_m} \\ a^0_{i_0} & a^0_{j_0} & \ldots & a^0_{j_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^m_{j_0} & a^m_{j_0} & \ldots & a^m_{j_m} \end{vmatrix} =$$

$= p_{i_0 i_1 \dots i_m} p_{j_0 j_1 \dots j_m} - p_{j_0 i_1 \dots i_m} p_{i_0 j_1 \dots j_m} + \dots + (-1)^m p_{j_m i_1 \dots i_m} p_{i_0 j_0 \dots j_{m-1}} = 0$
ossia
$p_{i_0 \dots i_m} p_{j_0 \dots j_m} = p_{j_0 i_1 \dots i_m} p_{i_0 j_1 \dots j_m} + p_{j_1 i_1 \dots j_m} p_{j_0 i_0 \dots j_m} + \dots p_{j_m i_1 \dots i_m} p_{j_0 \dots j_{m-1} i_0}$
Tali relazioni, che valgono per ogni $(i_0 \dots i_m)$ e $(j_0 \dots j_m)$ si dicono **relazioni di Plücker**. Se in $S^{(M(n,m)+1)}$ le indeterminate si indicano con $x_{i_0 < \dots < i_m}$, sicchè $x_{i_0 \dots i_m} = \pm x_{i_0 < \dots < i_m}$ si ha che $\mathbb{G}_{(n,m)}$ è contenuto nel chiuso definito delle equazioni:

$$x_{i_0 \dots i_m} x_{j_0 \dots j_m} = x_{j_0 i_1 \dots i_m} x_{i_0 j_1 \dots j_m} + \dots + x_{j_m i_1 \dots i_m} x_{j_0 \dots j_{m-1}, i_0} \tag{4}$$

Se $m = n - 1$ tali equazioni si riducono, di fatto, ad essere tutte identicamente soddisfatte. Ciò segue dal fatto che, ovviamente $\mathbb{G}_{(n,n-1)}$ coincide con tutto $\mathbb{P}(\Lambda^n \mathbb{A}^{n+1}) = \check{\mathbb{P}}^n$, ma può anche verificarsi direttamente nel modo che segue. Intanto è chiaro che le (4) sono identiche se $(i_1, \dots, i_{n-1})$ ha qualche ripetizione. È dunque lecito assumere $i_1, \dots, i_{n-1}$ distinti e, per fissare le idee supporremo $i_1 = 2, \dots, i_{n-1} = n$, il che, come è naturale, non lede la generalità. Se i_0 è uguale a uno degli interi $j_0, \dots, j_m$, ad esempio, j_h, la (4) si riduce poi a

$$x_{i_0 \dots i_m} x_{j_0 \dots j_m} = x_{j_h i_1, \dots, i_m} x_{j_0 \dots j_{h-1} i_0 j_{h+1} \dots j_n}$$

che è un'identità. Similmente da (4) si ha un'identità se $j_h = j_k$ con $h \neq k$. È lecito dunque assumere (i_0, j_o, j_{n-1}) senza ripetizioni e dunque coincidente con $\{0, \dots, n\}$ a meno dell'ordine. Vi sono allora due indici tra $i_0, j_0, \dots, j_{n-1}$ coincidenti con $0, 1$. Se fra questi uno è i_0 e l'altro j_h, la (4) è del tipo:

$$x_{i_0 \dots i_{n-1}} x_{j_0 \dots j_{n-1}} = x_{j_h i_1 \dots, i_{h-1}} x_{j_0 \dots j_{h-1} i_0 \, j_{h+1} \dots j_{n+1}}$$

da cui

$$x_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} x_{j_h j_0 \dots j_{h-1} \dots j_{h+1} \dots j_{n+1}} = x_{j_h i_1 \dots i_{n-1}} x_{i_0 j_0 \dots j_{h-1} j_{h+1} \dots j_{n-1}}$$

che è ovviamente un'identità. Se invece $i_0 \neq 0, 1$, si ha $j_h = 0$, $j_k = 1$, $h \neq k$. Allora la (4) si riduce a

$$x_{j_h i_1 \dots i_{n-1}} x_{j_1 \dots j_{h-1} i_0 j_{h+1} \dots j_{n-1}} + x_{j_k i_1 \dots i_{n-1}} x_{j_1 \dots j_{k-1} i_0 j_{k+1} \dots j_{n-1}}.$$

Supposto, per fissare le idee, $h < k$, si ha

$$\begin{aligned} x_{j_1 \dots j_{h-1} i_0 j_{h+1} \dots j_{n-1}} &= (-1)^{h+k-2} x_{j_k i_0 j_1 \dots j_{h-1} j_{h+1} \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_{n-1}} \\ x_{j_1 \dots j_{k-1} i_0 j_{k+1} \dots j_{n-1}} &= (-1)^{h+k-3} x_{j_h i_0 j_1 \dots j_{h-1} j_{h+1} \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_{n-1}} \end{aligned}$$

e, tenendo conto del fatto che, a meno dell'ordine, $i_0, j_1, \dots, j_{h-1} j_{h+1}, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_{n-1}$ sono $2, \dots, n$, ne segue che (4) è un'identità. Diversamente vanno invece le cose se $1 < m < n - 1$. In tal caso è possibile scegliere $i_2 = j_2, \dots, i_m = j_m$ e poniamo $i_0 = i, i_1 = j$, $j_0 = h$, $j_1 = k$. Allora le (4) divengono del tipo

$$x_{i j i_2 \dots i_m} x_{h k i_2 \dots i_m} = x_{h j i_2 \dots i_m} x_{i k i_2 \dots i_m} + x_{k j i_2 \dots i_m} x_{h i i_2 \dots i_m} \tag{5}$$

e queste sono certo non identiche se i, j sono diversi tra loro e da h, k, com'è possibile se $m < n - 1$. Le (5) si dicono **equazioni a tre termini di $\mathbb{G}_{(\mathbf{n},\mathbf{m})}$**.

Teorema 18.3. $\mathbb{G}_{(n,m)}$ *è un chiuso di* $\mathbb{P}^{M(n,m)}$, *proprio se* $m = 1, \dots, n-2$

Dim. Che $\mathbb{G}_(n,m)$ sia proprio se $m = 1, \dots, n-2$ segue dai ragionamenti che precedono. Per provare che $\mathbb{G}_{(n,m)}$ è chiuso verfichiremo che esso è definito dalle (4). Supponiamo dunque che $(p_{i_0 \dots i_m})$ sia un sistema alternante che verifica le relazioni di *Plücker*, e che non sia nullo e assumiamo per fissare le idee $p_{0\dots m} \neq 0$. Ha allora senso considerare i punti di $\mathbb{P}^n$:

$$\begin{aligned} P_0 &= [p_{i1\dots m}]_{i=0\dots n} \\ P_1 &= [p_{0i2\dots m}]_{i=0\dots n} \\ &\dots\dots \\ P_m &= [p_{0\dots m-1\,i}]_{i=0\dots n} \end{aligned}$$

Essi sono linearmente indipendenti giacchè una matrice che ha per righe delle coordinate omogenee di tali punti è, ad esempio, data da:

$$\begin{Vmatrix} p_{01\dots m} & 0\dots 0 p_{m+1\,1\dots m} & \dots & p_{n1\dots m} & \\ 0 & p_{01\dots m}\dots 0 p_{0m+1\dots m} & \dots & p_{0n\dots m} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_{01\dots m} p_{0\dots m-1m+1} & \dots & p_{0\dots m-1n} \end{Vmatrix}$$

e il minore d'ordine massimo di tale matrice individuato dalle prime $m+1$ colonne è non nullo, coincidendo con $p_{0\dots m}^{m+1}$. Qui supponiamo come possibile $0 \ni \{i_0 \dots i_h\}^p$. Dunque

$$P_0 \vee \dots \vee P_m = V \in \mathcal{G}(n,m)$$

Concluderemo la dimostrazione provando che il sistema alternante $(\pi_{i_0\dots i_m})$ dedotto dalle coordinate *plückeriane* di V coincide, a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, con $(p_{i_0\dots i_m})$, precisamente proviamo che

$$\pi_{i_0\dots i_m} = p_{0\dots m}^m p_{i_0\dots i_m} \tag{6}$$

La (6) è certo vera se uno solo degli indici $i_0 \dots i_m$ è maggiore di m. Si ha infatti, se $m < i \leq n$

$$\pi_{0\dots l-1\,i\,l+1\dots m} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} p_{0\dots m} & 0 & \dots & p_{i_1\dots m} & \dots 0 \\ 0 & p_{0\dots m} & \dots & p_{0i\dots m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_{0\dots m-1\,i} & \dots & p_{0\dots m} \end{vmatrix} \\ 0 \quad 1 \quad l-1 \quad l \quad l+1 \quad m \end{array}$$

Procediamo ora per induzione, supponendo la (6) vera se $(i_0 \dots i_m)$ contiene ν numeri maggiori di m, e mostrando che essa è conseguentemente vera se $(i_0 \dots i_m)$ ha $\nu + 1$ indici maggiori di m. Valendo le relazioni di *Plücker* per $(p_{i_0\dots i_m})$ si ha

$$p_{0\dots m}p_{i_0\dots i_m} = p_{i_0 1\dots m}p_{0 i_1,\dots i_m} + p_{i_1 1\dots m}p_{i_0 0 i_2\dots i_m} + \dots + p_{i_m 1\dots m}p_{i_0\dots i_{m-1}0} \tag{7}$$

Si noti ora che, di fatto, al secondo membro, sono non nulli solo i termini del tipo $p_{i_h 1\dots m}\, p_{i_0\dots i_{h-1}\,0\, i_{h+1}\dots i_m}$ con $i_h > m$. Si può allora applicare l'ipotesi di induzione. Moltiplichiamo ambo i membri di (7) per $p^{2m}_{0\dots m}$. D'altra parte le relazioni di *Plücker* certo valgono per il sistema $(\pi_{i_0\dots i_m})$ sicchè

$$\pi_{0\dots m}\pi_{i_0\dots i_m} = \pi_{i_0 1\dots n}\pi_{0 i_1\dots i_m} + \dots + \pi_{i_m 1\dots m}\pi_{i_0\dots i_{m-1}0}$$

da cui segue la (6), essendo $\pi_{0\dots m} \neq 0$. $\square$

Allo scopo di approfondire lo studio di $\mathbb{G}(n,m)$ svolgeremo le seguenti considerazioni. In $\underbrace{\mathbb{P}^n \times \dots \times \mathbb{P}^n}_{m+1}$ siano $\underline{a}^i = \left[a^i_0 \dots a^i_n\right]$ le coordinate omogenee nell'$(i+1)-$simo fattore del prodotto. L'insieme

$$\mathcal{Z}(n,m) = \{(P_0,\dots,P_m) \colon P_0,\dots,P_m \text{ linearmente dipendenti in } \mathbb{P}^n\}$$

è un chiuso proprio di $\underbrace{\mathbb{P}^n \times \dots \times \mathbb{P}^n}_{m+1}$ essendo definito dall'equazione matriciale

$$rank \begin{Vmatrix} \underline{a}^0 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{Vmatrix} < m+1$$

Denoteremo con $\mathcal{D}(n,m)$ l'aperto complementare di $\mathcal{Z}(n,m)$. In $\mathcal{D}(n,m)$ è definita l'applicazione

$$\varphi_{n,m} \colon\ (P_0,\dots,P_m) \in \mathcal{D}(n,m) \to g_{n,m}\,(P_0 \vee \dots \vee P_m) \in \mathbb{G}(n,m)$$

Lemma 18.4. *$\varphi_{n,m}$ è un morfismo suriettivo e dunque individua un'applicazione razionale determinante $\varphi_{n,m} \colon \mathbb{P}^n \times \dots \times \mathbb{P}^n \twoheadrightarrow \mathbb{G}(n,m)$*

Dim. La suriettività è ovvia. Per il resto basta osservare che $\varphi_{n,m}$ agisce associando al posto $\left(\left[\underline{a}^0\right],\dots,\left[\underline{a}^n\right]\right) \in \mathcal{D}(n,m)$ il punto $[p_{j_0<\dots<j_m}]$ è il sistema dei minori d'ordine massimo della matrice

$$a = \begin{Vmatrix} \underline{a}^0 \\ \vdots \\ \underline{a}^m \end{Vmatrix}$$

$\square$

Teorema 18.5. $\mathbb{G}(n,m)$ *è irriducibile, di dimensione* $(n-m)(m+1)$

Dim. L'irriducibilità segue dalla suriettività di $\varphi_{n,m}$. Sia ora $V \in \mathcal{G}(n,m)$, si ha

$$\varphi_{n,m}^{-1}\left(g_{n,m}(V)\right) = \underbrace{(V \times \cdots \times V)}_{m+1} \cap \mathcal{D}(n,m)$$

che ha dimensione $m(m+1)$. Pertanto, per il teorema si ha

$$dim \mathbb{G}(n,m) = n(m+1) - m(m+1) = (m+1)(n-m)$$

$\square$

Più in particolare possiamo provare che vale il seguente teorema:

Teorema 18.6. $\mathbb{G}(n,m)$ *è razionale.*

Dim. Nel seguito identificheremo $\mathcal{G}(n,m)$ con $\mathbb{G}(n,m)$ tramite la $g(n,m)$. Con tale convenzione l'insieme

$$\mathcal{I}(n,m) = \{(V,W) \in \mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{G}(n-m) \colon V \vee W \subset \mathbb{P}^n\}$$

è un chiuso proprio di $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{G}(n,n-m)$. Infatti se

$$V = P_0 \vee \cdots \vee P_m \text{ e } W = P_{m+1} \vee \cdots \vee P_{n+1}$$

con $P_i = \left[\underline{a}^i\right]$, $i = 0, \ldots, n+1$, $(V,W) \in \mathcal{I}(n,m)$ se e solo se

$$ran\, k \begin{Vmatrix} \underline{a}^0 \\ \vdots \\ \underline{a}^{n+1} \end{Vmatrix} < n+1$$

ossia se e solo se della matrice

$$\begin{Vmatrix} a^0 \\ \vdots \\ \underline{a}^{n+1} \end{Vmatrix}$$

si annullano tutti i minori d'ordine massimo. Sviluppando tali minori con il teorema di Laplace applicato alle prime $m+1$ righe si ottengono relazioni algebriche (di primo grado) tra le coordinate grassmanniane di V e W il cui verificarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè $(V,W) \in \mathcal{I}(n,m)$. Fissato ora $W_0 \in \mathbb{G}(n,n-m)$, poniamo $\mathbb{G}(n,m,W_0)$ per denotare il sottoinsieme $p_1\left(p_2^{-1}(W_0)\right)$ di $\mathbb{G}(n,m)$, dove

$$p_1 \colon \mathcal{I}(n,m) \to \mathbb{G}(n,m)$$

$$p_2 \colon \mathcal{I}(n,m) \to \mathbb{G}(n,n-m)$$

sono le proiezioni. È ovvio che $\mathbb{G}(n,m,W_0)$ è un chiuso proprio di $\mathbb{G}(n,m)$. Fissiamo ora $V \in \mathbb{G}(n,m)$, e fissiamone $m+1$ punti linearmente indipendenti

$P_0, \ldots, P_m$, e fissiamo $W_0, \ldots, W_m \in \mathbb{G}(n, n-m)$ tali che $W_i \cap V = P_i$. Denotiamo ancora un U l'aperto $\mathbb{G}(n,m) - \cup_{i=0}^{m} \mathbb{G}(n,m,W_i)$ di $\mathbb{G}(n,m)$ e con U' l'aperto $\mathcal{D}(n,m) \cap (W_0 \times \cdots \times W_m)$ di $W_0 \times \cdots \times W_m$. U è non vuoto , poiché $V \in U$, e in U è definita la seguente applicazione

$$\psi \colon V' \in U \to (V' \cap W_0, \ldots, V' \cap W_m) \in W_0 \times \cdots \times W_m$$

Anche U' è non vuoto, poiché $(P_0, \ldots, P_m) \in U'$, e in U' è definita l'applicazione

$$\varphi \colon \; (Q_0, \ldots, Q_m) \in U' \to Q_0 \vee \cdots \vee Q_m \in \mathbb{G}(n,m)$$

Quest'ultima è restrizione a U' di $\varphi_{n,m}$ ed è quindi un morfismo. Poiché

$$\varphi^{-1}\left(\varphi\left(P_1, \ldots, P_m\right)\right) = (P_1, \ldots, P_m)$$

è dominante e quindi individua un'applicazione razionale dominante

$$\varphi \colon W_0 \times \cdots \times W_m \to \mathbb{G}(n,m)$$

Osserviamo ora che pure ψ è un morfismo. Infatti sia $V \notin \mathbb{G}(n,m,W)$ e supponiamo V di equazioni

$$u_0^0 x_0 + \cdots + u_n^0 x_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_0^{n-m-1} x_0 + \cdots + u_n^{n-m-1} x_n = 0$$

e W di equazioni

$$u_0^{n-m} x_0 + \cdots + u_n^{n-m} x_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_0^{n-1} x_0 + \cdots + u_n^{n-1} x_n = 0$$

Dall'ipotesi segue la matrice di tipo $n \times (n+1)$

$$u = \begin{Vmatrix} \underline{u}^0 \\ \vdots \\ \underline{u}^{n-1} \end{Vmatrix}$$

ha range massimo e le coordinate di $V \cap W$ sono espresse dai minori d'ordine n di u presi a segni alterni. Tali minori sono, d'altra parte, espressioni razionali intere omogenee di grado 1 delle coordinate grassmaniane (duali) di V. Anche ψ individua dunque un'applicazione razionale:

$$\psi \colon \mathbb{G}(n,m) \to W_0 \times \cdots \times W_m$$

Sia ora $V' \in U$ e supponiamo che $\psi(V') \in U'$. Allora ovviamente

$$\varphi\left(\psi(V')\right) = V'$$

Similmente, se $(Q_0, \dots, Q_m) \in U'$ e $\varphi(Q_0, \dots, Q_m) \in U$ allora

$$\psi(\varphi(Q_0, \dots, Q_m)) = (Q_0, \dots, Q_m)$$

Da ciò segue che φ e ψ sono trasformazioni birazionali una inversa dell'altra. poiché, naturalmente, $W_0 \times \cdots \times W_m$ è razionale, e si ha l'asserto. $\square$

Consideriamo ora in $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^n$ il sottoinsieme

$$\widetilde{\mathbb{G}}(n,m) = \{(V, P) \in \mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^n \colon P \in V\}$$

e mostriamo quanto segue:

Proposizione 18.7. $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m)$ *è una sottovarietà chiusa di* $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^n$*, di dimensione* $(n-m)(m+1)+m$.

Dim. Tenendo conto del corollario, basta provare che $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m)$ è chiuso. A tale scopo si può ragionare nel modo seguente. Sia $V = [p_{i_0 < \cdots < i_n}] \in \mathbb{G}(n,m)$ e supponiamo $p_{0\dots m} \neq 0$, sicchè possiamo supporre che ciò si verifichi in tutto un'intorno U di V su $\mathbb{G}(n,m)$. Allora i punti

$$p_j = [p_{0 \dots j-1\, i\, j+1 \dots m}]_{i=0 \dots n,\, j=0,\dots,m}$$

sono punti linearmente indipendenti di V, per ogni $V \in U$ (cfr. prova teorema (18.3)). In definitva $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m) \cap (U \times \mathbb{P}^n)$ è l'insieme dei punti $([p_{i_0 \cdots < \dots i_m}], [x_j])$ tali che

$$rank \left\| \begin{matrix} x_0 & \dots & \dots & x_n & \\ p_{o1\dots m} & 0 & \dots & p_{n1\dots m} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots\; p_{o1\dots m} & & \dots & p_{0\dots m-1m} \end{matrix} \right\| = m+1$$

e dunque è chiuso. Per l'arbitrarietà di V si ha l'asserto. Per quanto concerne l'irriducibilità di $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m)$ e la sua dimensione, basta applicare il teorema al morfismo suriettivo $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m) \to \mathbb{G}(n,m)$. $\square$

Sia $p \colon \widetilde{\mathbb{G}}(n,m) \to \mathbb{G}(n,m)$ la restrizione a $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m)$ della proiezione canonica di $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^n$ su $\mathbb{G}(n,m)$. La terna $\left(\widetilde{\mathbb{G}}(n,m), \mathbb{G}(n,m), p\right)$ gode della seguente notevole proprietà, di cui, per il momento, tralasciamo la dimostrazione.

Teorema 18.8. *Se* (Z, W, π) *è una famiglia di sottospazi di dimensione* m *di* $\mathbb{P}^n$ *parametrizzata da* W*, esiste un unico morfismo* $f \colon W \to \mathbb{G}(n,m)$ *tale che per ogni* $P \in W$*,* $f(P) = \pi^{-1}(P) \subseteq \mathbb{P}^n$*, e che* $Z \simeq W \times_{\mathbb{G}(n,m)} \widetilde{\mathbb{G}}(n,m)$.

Tenendo presente il teorema, dal teorema (18.8) si deduce agevolmente il corollario:

Corollario 18.9. *Esistono isomorfismi*

$$f\colon \mathbb{G}(n,m) \to C_{n,m,1}$$

$$g\colon \widetilde{\mathbb{G}}(n,m) \to \Gamma_{n,m,1}$$

che rendono commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{G}}(n,m) & \xrightarrow{g} & p_{n,m,1} \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ \mathbb{G}(n,m) & \xrightarrow{f} & C_{n,m,1} \end{array}$$

In altri termini $\mathbb{G}(n,m)$ è, a meno d'isomorfismo, la varietà di Chow dei sottospazi di dimensione m di $\mathbb{P}^n$ e $\widetilde{\mathbb{G}}(n,m)$ è, a meno d'isomorfismo, la famiglia universale.

Come applicazione delle cose dette dianzi possiamo qui di seguito occuparci della **determinazione dei sottospazi giacenti su un'ipersuperficie di dato grado**. Fissiamo intanto degli interi n, m, d, con $n \geq m$ e, come di consueto interpretiamo $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ come la varietà di Chow dei cicli $(n-1)-$dimensionali di grado d di $\mathbb{P}^n$. In $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^{N(n,d)}$ consideriamo il sottoinsieme:

$$\mathcal{I}(n,m,d) = \{(V,Z) :\ V \subseteq Z\}$$

Teorema 18.10. *$\mathcal{I}(n,m,d)$ è un chiuso irriducibile di $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^{N(n,d)}$ di codimensione $N(m,d)+1$.*

Dim. Sia $(V,Z) \in \mathcal{I}(n,m,d)$ e supponiamo, com'è lecito che V abbia coordinate grassmaniane $(p_{i_0<\cdots<i_m})$ con $p_{0\ldots m} \neq 0$. Esiste allora un intorno U di (V,Z) in $\mathbb{G}(n,m) \times \mathbb{P}^{N(n,d)}$ tale che per ogni $(V,Z) \in U$, V gode delle suddette proprietà. Per ogni $(V,Z) \in U$, una base di V è data dai soliti punti $P_j = [p_{0\ldots j-1\, i\, j+1\ldots m}]_{i=0,\ldots,n\, j=0,\ldots,m}$. Allora i punti di V hanno coordinate omogenee date da

$$\mu x_i = \sum_0^m j\lambda_j p_{0\ldots j-1\, i\, j+1\ldots m} \qquad i = 0\ldots,n$$

con $\mu \neq 0$, $[\lambda_0,\ldots,\lambda_m] \in \mathbb{P}^n$. Se Z ha equazione $f(x_0\ldots x_n) = 0$ in $\mathbb{P}^n$, $(V,Z) \in \varphi(n,m,d)$ se e solo se il polinomio

$$f\left(\cdots \sum_{j=0}^m, \lambda_j p_{0\ldots j-1\, i\, j+1\ldots m\ldots}\right)$$

in $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ è identicamente nulla. I coefficienti di tale polinomio in $\lambda_0,\ldots,\lambda_m$ sono del tipo

$$\varphi_h\left(a_{j_0\ldots j_n}\,,\,p_{i_0<\cdots<i_m}\right), \qquad h=0,\ldots,N(m,d)$$

dove $a_{j_0\ldots j_n}$ sono i coefficienti di f e $(P_{i_0<\cdots<i_m})$ sono le coordinate gassmaniane di V. Sicchè $U\cap\mathcal{I}(n,m,d)$ è definito dalle equazioni $\varphi_h=0$ ed è perciò un chiuso. Per provare l'irriducibilità ed il conto della dimensione, basta applicare il solito corollario alla proiezione canonica

$$p\colon \mathcal{I}(n,m,d)\to\mathbb{G}(n,m)$$

e mostrare che per ogni $V\in\mathbb{G}(n,m)$, l'insieme delle ipersuperficie generalizzate contenenti V è una sottovarietà irriducibile di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ di codimensione $N(m,d)+1$. Sia infatti $\mathcal{I}(n,d,V)$ tale sottoinsieme, ovviamente chiuso, di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$. È ben chiaro che $\mathcal{I}(n,d,V)$ è un sottospazio di $\mathbb{P}^{N(n,d)}$, contenendo le rette congiungenti due qualunque suoi punti. Per determinare la dimensione di $\mathcal{I}(n,d,V)$, basta ovviamente ridursi al caso in cui V abbia equazioni

$$x_{m+1}=\cdots=x_n=0$$

Allora l'ipersuperficie di equazione $f(x_0,\ldots,x_n)=0$ contiene V se e solo se il polinomio $f(x_0,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$ in $x_0,\ldots,x_m$ è identicamente nullo, ossia se e solo se in f non compaiono i monomi, in numero di $N(m,d)+1$ che contengono solo $x_0,\ldots,x_m$. $\square$

Il teorema (18.10) ha conseguenze alquanto interessanti.
Sia

$$q\colon \mathcal{I}(n,m,d)\to\mathbb{P}^{N(m,d)}$$

la proiezione canonica sull'altro fattore. Ovviamente $\mathcal{R}(n,m,d)=q\left(\mathcal{I}\left(n,m,d\right)\right)$ è un chiuso che è proprio se $dim\,\mathcal{I}(n,m,d)<N(n,d)$ e

$$dim\,\mathcal{I}(n,m,d)<N(n,d)\Leftrightarrow dim\mathbb{G}(n,m)=(m+1)(n-m)<N(m,d))+1$$

Pertanto si ha i corollario seguente:

Corollario 18.11. *Se* $(m+1)(n-m)<N(m,d)+1$ *esistono ipersuperficie di grado* d *in* $\mathbb{P}^n$ *che non contengono sottospazi di dimensione* m*, ed anzi tali ipersuperficie riempiono un aperto di* $\mathbb{P}^{N(n,d)}$*.*

Un'altra conseguenza del teorema (18.10) è che, per ogni $Z\in\mathbb{P}^{N(m,d)}$, $p(q^{-1}(Z))$ è un chiuso, denotato con $\mathbb{G}(Z,m)$ di $\mathbb{G}(n,m)$. Tale chiuso non necessariamente irriducibile, prende il nome di **sistema dei sottospazi di dimensione m di Z**.

Esempio 18.12. $\mathbb{G}(3,1)\subset\mathbb{P}^5$, avendo dimensione 4, è un'ipersuperficie. Dalle considerazioni svolte nella dimostrazione del teorema (18.3) e da quelle che la precedono, si ha che $\mathbb{G}(3,1)$ è la di equazione quadrica

$$x_{01}x_{23}-x_{21}x_{03}-x_{31}x_{20}=0$$

Tale quadrica , detta **quadrica di Klein**, è non degenere.

Osservazione 63. $\mathbb{G}(n,m)$ non è contenuta in alcun sottospazio proprio di $\mathbb{P}^{N(n,m)}$. Supponiamo infatti che la forma lineare

$$F = \sum_i a_{i_0<\cdots<i_m}\, x_{i_0<\cdots<i_m}$$

si annulli su $\mathbb{G}(n,m)$. Consideriamo poi i punti ${\mathbb{P}^n}_0, \ldots, {\mathbb{P}^n}_{m-1}$. L'insieme dei punti $P = [a_0, \ldots, a_n]$ tali che ${\mathbb{P}^n}_0, \ldots, {\mathbb{P}^n}_{m-1}$, P siano linearmente indipendenti in $\mathbb{P}^n$ è un aperto U di $\mathbb{P}^n$. Per ogni $P \in U$, le coordinate grassmaniane di ${\mathbb{P}^n}_0 \vee \cdots \vee {\mathbb{P}^n}_{m-1} \vee P$, ossia i minori d'ordine massimo della matrice

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & \end{matrix}\right\|$$

sono tutti nulli tranne

$$p_{0\ldots m-1\, i} = a_i \qquad , \qquad i = m, \ldots, n$$

Dovendosi avere

$$\sum_{i=m}^{n} a_{0\ldots m-1\, i} a_i = 0$$

per ogni $P = [a_0, \ldots, a_n] \in U$, ne segue $a_{0\ldots m\, i} = 0$, $i = m, \ldots, n$. Del tutto similmente si prova che ogni altro coefficiente di F è 0.

Osservazione 64. La definizione di $\mathbb{G}(\mathbf{n},\mathbf{m})$ è indipendente da cambiamenti di coordinate. Sia infatti

$$\tau\colon [\underline{x}] \in \mathbb{P}^n \to [\underline{x}A] \in \mathbb{P}^n$$

un'omografia, dove A è una matrice non degenere, d'ordine $n+1$ su k. Dato $V \in \mathbb{G}(n,m)$, ne siano $P_i = [\underline{a}^i]$, $i = 0.\ldots, m$ punti linearmente indipendenti; $\tau(V)$ è generato allora da $\tau(P_i) = [\underline{a}^i A]$, $i = 0, \ldots, m$. È allora chiaro che, tra le coordinate *plückeriane* $(p_{i_0\leq\cdots\leq i_m})$ di V e quelle $p'_{i_0\leq\cdots\leq i_m}$ di $\tau(V)$, intercedono le relazioni

$$p'_{i_0\leq\cdots\leq i_m} = \sum_{l_0\leq\cdots\leq l_m} A^{l_0\leq\cdots\leq l_m}_{i_0\leq\cdots\leq i_m} p_{l_0\leq\cdots\leq l_m}$$

dove $A^{l_0\leq\cdots\leq l_m}_{i_0\leq\cdots\leq i_m}$ è il minore di A determinato dalle colonne di $i_0 \ldots i_m$ e dalle righe di $l_0 \ldots l_m$. Si consideri l'omografia generalizzata di $\mathbb{P}^{M(n,m)}$ in sè data da :

$$\tau'\colon\ [x_{i_0\leq\cdots\leq i_m}] \in \mathbb{P}^{M(n,m)} \to \left[\sum_{l_0\leq\cdots\leq l_m} A^{l_0\leq\cdots\leq l_m}_{i_0\leq\cdots\leq i_m} x_{l_0\leq\cdots\leq l_m}\right] \in \mathbb{P}^{M(n,m)}$$

Da quanto precede, si trae che τ' è definito in ogni punto di $\mathbb{G}(n,m)$ e $\tau'(\mathbb{G}(n,m)) = \mathbb{G}(n,m)$. Dall'osservazione precedente segue allora che τ' è un'omografia non degenere, che muta $\mathbb{G}(n,m)$ in sè e tale che per ogni $V \in \mathbb{G}(n,m)$, si ha $\tau'(V) = g_{n,m}(\tau(V))$. Sia P un punto di $\mathbb{P}^n$ e sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ non passante per P. L'applicazione:

$$g_p\colon Q \in H = \mathbb{P}^{n-1} \to P \vee Q \in \mathbb{G}(n,1)$$

è un isomorfismo di $\mathbb{P}^{n-1}$ su un $\mathbb{P}^{n-1}$ contenuto in $\mathbb{G}(n,1)$. Possiamo ridurci al caso $P = [1,0,\dots,0]$, $H = Z_P(x_0)$. Allora per ogni $Q \in [0,x_1,\dots,x_n] \in H$; le coordinate *plückeriane* di $P \vee Q$ sono tutte nulle tranne

$$p_{1i} = x_i, \qquad i = 1,\dots,n$$

Di qui l'asserto.

Proposizione 18.13. *g_p è un'omografia.*

Il lettore dimostri, per esercizio, seguendo la falsa riga della dimostrazione di *(iv)* il seguente fatto. Sia $W \subseteq \mathbb{P}^n$ un sottospazio di dimensione h, con $m > h+1$ e consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{G}(n,m)$:

$$\mathbb{G}^*(W,m) = \{V \in \mathbb{G}(n,m)\colon V \supset W\}$$

$\mathbb{G}^*(W,m)$ è isomorfo a $\mathbb{G}(n-h-1\,,\, n-m-1)$. Similmente il lettore dimostrerà per esercizio che, se $W \subset \mathbb{P}^n$ è un sottospazio di dimensione h, con $h > m$, considerato il sottoinsieme

$$\mathbb{G}(W,m) = \{V \in \mathbb{G}(n,m),\, V \subset W\}$$

esso è isomorfo a $\mathbb{G}(h,m)$. Come conseguenza di ció detto prima, ne segue che sulla quadrice $\mathbb{G}(3,1)$ vi sono due sistemi di piani $\sum_1$, $\sum_2$, l'uno contenente i piani corrispondenti alle rette passanti per un punto fissato di $\mathbb{P}^3$ (**stelle**), l'altro contenente i piani corrispondenti alle rette contenute in un piano fissato di $\mathbb{P}^3$ (**piani rigati**). Ovviamente **due piani di uno stesso sistema si intersecano in un solo punto; due piani di due diversi sistemi possono intersecarsi nel vuoto ovvero in una retta**. Siano $V_0,\dots,V_m$, $m+1$ sottospazi di $\mathbb{P}^n$ tali che

$$\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq V_i \subsetneq \cdots \subsetneq V_m$$

e quindi di dimensione $a_o,\dots,a_m$ tali che

$$0 \le a_0 < a_1 < \cdots < a_m \le n$$

Consideriamo il sottoinsieme $\Omega\,(V_0,\dots,V_d)$, talora più brevemente denotato con $\Omega(V)$ o con $\Omega_{a_0\dots a_d}$, dei punti $V \in \mathbb{G}(n,m)$ tali che $dim\, V \cap V_i \geqq i$. Si prova che $\Omega(V)$ è chiuso irriducibile di dimensione

$$\sum_{i=0}^{m} a_i - \frac{1}{2}m(m+1)$$

di ciò tralasciamo, per ora, la dimostrazione.

Definizione 18.14. Le sottovarietà di $\mathbb{G}(n,m)$ del tipo $\Omega(V)$ si dicono **cicli di Schubert** di $\mathbb{G}(n,m)$.

Nel caso $m=1, n=3$ i cicli di Schubert sono del tipo:

(a) $\Omega_{0,1}$, ridotto ad un punto;
(b) $\Omega_{0,2}$, corrispondente ad un fascio di rette in un piano di $\mathbb{P}^3$ e dunque ridotto ad una retta su $\mathbb{G}(3,1)$;
(c) $\Omega_{0,3}$, un piano di Σ_1;
(d) $\Omega_{1,2}$, un piano di Σ_2;
(e) $\Omega_{1,3}$, corrispondente alla rette di $\mathbb{P}^3$ incidenti una data retta;
(f) $\Omega_{2,3} = \mathbb{G}(3,1)$.

Proposizione 18.15. *Il sottoinsieme di* $\mathbb{G}(3,1)$*, tra i suddetti,* $\Omega_{1,3}$*, è un chiuso irriducibile di* $\mathbb{G}(3,1)$ *di codimensione* 1.

Dim. Sia r una fissata retta di $\mathbb{P}^3$ e ne siano $[\underline{a}_0]$, $[\underline{b}_0] \in \mathbb{P}^3$ punti distinti. Se $P=[\underline{x}]$, $Q=[\underline{y}]$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^3$, la retta $P \vee Q$ incide r se e solo se

$$det \begin{Vmatrix} \underline{a}_0 \\ \underline{b}_0 \\ \underline{x} \\ \underline{y} \end{Vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Se (p_{ij}) sono le coordinate grassmanniane di r, la (8) fornisce la seguente equazione per le coordinate grassmaniane (x_{ij}) di una retta incidente r.

$$X_{01}p_{23} + p_{01}X_{23} - X_{21}p_{03} - p_{21}X_{03} - p_{31}X_{20} - X_{31}p_{20} = 0 \tag{9}$$

Pertanto $\Omega_{1,3}$ è l'intersezione della quadrica di Klein con l'iperpiano di equazione (9). È allora chiaro che $\Omega_{1,3}$ è chiuso e che ogni sua componente ha dimensione 3. Quanto all'irriducibilità, si noti che basta provare quelle di $\Omega_{1,3} - \{r\}$. Si consideri allora l'applicazione

$$f\colon s \in \Omega_{1,3} - \{r\} \to s \cap r \in r = \mathbb{P}^1$$

Il Lettore verificherà agevolmente trattarsi di un morfismo suriettivo, tale che per ogni punto $P \in r$, $f^{-1}(P)$ è il piano Σ_1 corrispondente a P privato del punto corrispondente a r. L'irriducibilità segue allora dal corollario . $\square$

Siano $r=[P_{ij}]$, $s=[Q_{ij}]$ due punti distinti di $\mathbb{G}(3,1)$ tali che $r \vee s \subseteq \mathbb{G}(3,1)$. Si verifica subito che si ha:

$$p_{01}q_{23} + q_{01}p_{23} - p_{21}q_{03} - q_{21}p_{03} - p_{31}q_{20} - q_{31}p_{20} = 0$$

e quindi segue:

$$r, s \text{ incidenti } \Leftrightarrow r \vee s \subset \mathbb{G}(3,1)$$

Il lettore deduce da ciò che gli unici piani contenuti in $\mathbb{G}(3,1)$ sono quelli di Σ_1 e di Σ_2.

Osservazione 65. Dal corollario (18.11) segue che se $d \geq 4$ la superficie di grado d di $\mathbb{P}^3$ che contengono qualche retta sono un chiuso proprio di $\mathbb{P}^{N(3,d)}$. Tale chiuso, irriducibile ha dimensione pari a quella di $\mathcal{I}(3,1,d)$, ossia

$$N(3,d) - (N(1,d) + 1 - 4) = N(3,d) - (d-3)$$

Per mostrare ciò, basta verificare che esistono superfici $F \in \mathbb{P}^{N(3,d)}$ tale che $q^{-1}(F)$ sia finito, ossia con un numero finito di rette.

Esempio 18.16. Si consideri la superficie irriducibile $\mathbb{A}^3$ di equazione

$$x_1^{d-2} x_2 x_3 = 1$$

Questa non possiede rette affini. Infatti una siffatta retta avrebbe equazioni parametriche del tipo

$$x_i = a_i\, t + h_i \qquad t \leftarrow k$$

e quindi il polinomio in t

$$(a_1 t + b_1)^{d-2} (a_2 t + b_2) (a_s t + b_3) - 1$$

dovrebbe essere identicamente nullo, il che è assurdo. D'altra parte la chiusura proiettiva F della suddetta ipersuperficie ha sul piano all'infinito tre rette.

Osservazione 66. Lo stesso ragionamento, applicato al caso $d = 3$, insieme ai risultati del 10 prova che: ogni ipersuperficie cubica di $\mathbb{P}^3$ possiede almeno una retta e in $\mathbb{P}^{N(3,3)} = \mathbb{P}^{19}$ vi è un aperto non vuoto corrispondente a tutte le superficie cubiche con un numero finito di rette.

Definizione 18.17. Una superficie F irriducibile di grado d di $\mathbb{P}^3$ è **rigata** se contiene infinite rette , ossia se $\mathbb{G}(F,1)$ è infinito.

Esempio 18.18. Sono rigate i coni. Se F è un cono di grado d, $\mathbb{G}(F,1)$ è una curva di grado d che appartiene al piano di Σ_1 corrispondente al vertice P di F, e inoltre $\mathbb{G}(F,1)$ è isomorfa alla curva su cui F è un cono di P. L'isomorfismo in questione è determinato dall'applicazione g_P dell'osservazione 91. Viceversa: se Z è una curva irriducibile in un piano di Σ_1 corrispondente ad un punto $P \in \mathbb{P}^3$, il sistema delle rette di Z in $\mathbb{P}^3$ riempie un cono di vertice P su una curva isomorfa a Z. Ciò si deduce subito dall'isomorfismo g_P e dalla definizione di cono. Essendo g_P un'omografia, il grado di F e di $\mathbb{G}(F,1)$ coincidono.

Esempio 18.19. Le quadriche sono rigate. Se una quadrica è un cono, si ricade nell'esempio precedente. Se F è una quadrica non degenere, abbiamo visto che F contiene infinite rette che si ripartiscono in due sistemi Ω_1, Ω_2. Il lettore verificherà che:

(a) le applicazioni

$$\omega_1 \colon P \in \mathbb{P}^1 \to L_p \in \Omega_1 \subseteq \mathbb{G}(F,1)$$
$$\omega_2 \colon P \in \mathbb{P}^1 \to M_p \in \Omega_2 \in \mathbb{G}(F,1)$$

sono morfismi di $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{G}(3,1)$ e che $\omega_1(\mathbb{P}^1)$; $\omega_2(\mathbb{P}^1)$ sono due coniche distinte e disgiunte;

(b) la conica $\omega_1(\mathbb{P}^1)$ giace nel piano in cui s'intersecano tre iperpiani di $\mathbb{P}^5$ che tagliano su $\mathbb{G}(3,1)$ tra cicli di Schubert del tipo $\omega_{1,3}$ relativi a tre qualunque rette distinte di Ω_2, anzi $\omega_1(\mathbb{P}^1)$ è intersezione di $\mathbb{G}(3,1)$ con detto piano; analogo discorso vale per $\omega_2(\mathbb{P}^1)$.

(c) $\mathbb{G}(F,1)$ è unione di $\omega_1(\mathbb{P}^1)$ e $\omega_2(\mathbb{P}^2)$.

Osservazione 67. Quanto sopra equivale al fatto elementare ben noto che le quadriche non degeneri si caratterizzano come il luogo delle rette di $\mathbb{P}^3$ incidenti tre rette sghembe fissate.

Proposizione 18.20. *Se F è una superficie rigata di $\mathbb{P}^3$ e se Z è una componente di $\mathbb{G}(F,1)$ si ha o $\dim Z \leq 1$ oppure F è un piano.*

Dim. In virtù della proposizone (18.7),

$$\widetilde{Z} = \{(P,r) \in F \times Z \colon P \in r\}$$

è un chiuso di $F \times Z$. Se $n = dim\, Z$, in applicazione del corollario si verifica che $\widetilde{Z}$ è irriducibile di dimensione $n+1$. Allora se $n \geq 1$ è chiaro che la proiezione di $\widetilde{Z}$ su F è suriettiva. Possono allora verificarsi i due casi:

(a) $n = 1$, e allora esiste un aperto U non vuoto di F tale che per ogni punto $P \in U$, esistono un numero finito di rette di Z che passano per U;

(b) $n > 1$, e allora per ogni punto di F passano infinite rette di Z.

Quest'ultima circostanza implica che sia un cono di vertice un qualunque suo punto: il Lettore verificherà che ciò comporta che F sia un piano. In generale dunque, se Z non è un punto, si verifica la (a) e, se si esclude che F sia un cono, per ogni punto di F passano un numero finito di rette di Z. $\square$

Proposizione 18.21. *Se F non è un piano, esiste un aperto non vuoto U' di F tale che per ogni punto $P \in U'$ passa una sola retta di Z.*

Dim. La cosa è del tutto evidente se F è un cono. Supponiamo pertanto che ciò non sia. Fissiamo una qualunque retta $r \in Z$ e consideriamo l'insieme

$$\widetilde{Z}_r = \{(P,s) \in \widetilde{Z},\ P \in r\}$$

che è un chiuso di $\widetilde{Z}$. È chiaro che ogni componente irriducibile di $\widetilde{Z}_r$ ha dimensione al più 1 e che $\widetilde{Z}_r$ ha almeno una componente di dimensione 1 data da $\widetilde{Z}_{r,1} = \{(P,r),\ P \in r\}$. D'altra parte $\widetilde{Z}_r$ possiede altre componenti irriducibili di dimensione 1 se e solo se ogni retta di Z interseca r. Ciò può verificarsi soltanto per un numero finito di rette di Z. Infatti se ci fossero infinite rette di Z incidenti ogni retta di Z, tutte tali rette, essendo a due a due incidenti e non appartenendo ad un piano, passerebbero per uno stesso punto: allora Z sarebbe contenuto in un piano di Σ_1 ed F sarebbe un cono. Di qui, tenendo conto di segue l'asserto. $\square$

Esercizio 18.22. Si provi che, se $char(k) = 0$, esiste un aperto $U'' \subseteq U$ non vuoti tale che l'applicazione: $f\colon U'' \to Z$ che ad ogni $P \in U''$ associa l'unica retta di Z per P, è un morfismo.

Proposizione 18.23. *Se* $\mathbb{G}(F,1)$ *possiede più componenti irriducibili di dimensione positiva, allora* F *è una quadrica non degenere.*

Dim. Possiamo escludere il caso banale in cui F è un cono. Supponiamo allora che $\mathbb{G}(F,1)$ possegga due componenti irriducibili unidimensionali Z_1, Z_2. Ragionando come sopra, si verifica facilmente che per ogni retta $r \in Z_1 - (Z_1 \cap Z_2)$, tutte le rette di Z_2 intersecano r. D'altra parte è possibile scegliere tre rette r_1, r_2, r_3 di $Z_1 - (Z_1 \cap Z_2)$ sghembe a due a due: la verifica di ciò viene lasciata per esercizio al Lettore. Dunque F è la quadrica delle rette incidenti r_1, r_2, r_3. $\square$

Riferimenti bibliografici

1. Atiyah, M.F., MacDonald I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley 1969.
2. Ciliberto, C., *Appunti al Corso di Geometria Algebrica*, 1985.
3. Curzio, M., *Lezioni di Algebra*, Liguori Editore.
4. Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Testxts in Mathematics, Springer–Verlag, 1977.
5. Harris J., *Algebraic Geometry*, Graduate Testxts in Mathematics, Springer–Verlag, 1992.
6. De Giovanni F., Franciosi S. *Elementi di Algebra*, Aracne Editore.
7. I.R. Shafarevich *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1974