Programma del corso di Geometria ed Algebra

canale MAS-ROM, a.a. 2020-2021.

05/21

1. Cenni di algebra astratta

1.1 Operazioni di un insieme (interne e esterne). Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Iniettività e suriettività di applicazioni composte. Compatibilità con intersezione ed unione di insiemi 1.2 Proprietà associativa e commutativa, elemento neutro, elementi invertibili. 1.3 Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento. 1.4 Strutture algebriche: anelli, campi, gruppi, semigruppi, monoidi. Sottogruppi di matrici. Estensione di $\mathbb{Q}$ mediante $\sqrt{n}$, i numeri complessi $\mathbb{C}$ come estensione di $\mathbb{R}$. 1.5 Cenni sui polinomi e sulle equazioni algebriche: teorema delle radici razionali, regola di Ruffini, teorema fondamentale dell'algebra. 1.6 Esempi: anelli e campi numerici, operazioni insiemistiche, operazioni fra matrici. Permutazioni.

2. Spazi vettoriali

2.1 Definizione e proprietà elementari. Spazio delle n-uple e delle matrici reali. Spazio dei polinomi reali. 2.2 Vettori geometrici liberi e applicati. 2.3 Legge di semplificazione della somma, legge di annullamento del prodotto. 2.4 Sottospazi vettoriali: intersezione, somma e somma diretta. 2.5 Combinazioni lineari e insiemi generatori, spazi finitamente generati. 2.6 Dipendenza e indipendenza lineare, insiemi liberi e legati, lemma di Steinitz. 2.7 Basi e componenti. Basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m,n}$. 2.8 Equipotenza delle basi e dimensione. Formula di Grassmann. 2.9 Metodo degli scarti successivi e del completamento ad una base. Determinare una base per riduzione.

3. Spazi metrici

3.1 Prodotto scalare e norma di un vettore. 3.2 Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$. 3.3 Lunghezze, angoli e proiezioni in $\mathbb{R}^n$. 3.4 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; disuguaglianza triangolare; teorema di Pitagora. 3.5 Insiemi ortogonali e ortonormali: definizione e proprietà. 3.6 Basi ortonormali e metodo di Gram-Schmidt. 3.7 Complemento ortogonale di un sottospazio. 3.8 Teorema della dimensione fra sottospazio e suo complemento ortogonale. Lo spazio generato dalle righe di un sistema omogeneo come complemento ortogonale dello spazio delle soluzioni.

4. Matrici

4.1 Matrici diagonali, triangolari, ridotte, fortemente ridotte, simmetriche. 4.2 Determinante di matrici. 4.3 Sviluppo di Laplace del determinante di una matrice $n \times n$. 4.4 Calcolo del determinante con il metodo di Gauss. 4.5 Prodotto righe per colonne e sue proprietà. 4.6 Matrice trasposta, matrice dei cofattori, matrice inversa. 4.7 Calcolo dell'inversa con il metodo di Gauss-Jordan. Matrice dei cofattori, teorema di Laplace sull'inversa di una matrice. 4.8 Rango di una matrice e indipendenza lineare. 4.9 Teorema degli orlati.

5. Sistemi di equazioni lineari

5.1 Generalità. Sistemi equivalenti ed operazioni elementari su un sistema. 5.2 Esame dei casi più semplici. 5.3 Sistemi ridotti e a scala, soluzione per sostituzione. 5.4 Risoluzione di un sistema lineare generale per riduzione e con il metodo di Gauss-Jordan. 5.5 Teorema di Rouché-Capelli. 5.6 Teorema di Cramer.

6. Applicazioni lineari

6.1 Applicazioni lineari; matrici rappresentative. 6.2 Nucleo, immagine e teorema della dimensione. 6.3 Endomorfismi: autovalori, autovettori, autospazi. 6.4 Ricerca degli autovalori: polinomio caratteristico, molteplicità algebrica e geometrica. 6.5 Il gruppo lineare, il gruppo ortogonale, il gruppo ortogonale speciale. 6.6 Matrici simili e loro polinomio caratteristico. Traccia di una matrice. 6.7 Matrice del cambiamento di base. Vettori e matrici rappresentative di endomorfismi espressi in basi diverse. 6.8 Endomorfismi semplici. Matrici diagonali, diagonalizzabili, diagonalizzanti. 6.9 Diagonalizzabilità di una matrice in campo reale: criteri. Matrici simmetriche e diagonalizzabilità ortogonale.

7. Elementi di geometria analitica

7.1 Geometria di $\mathbb{R}^2$: Rette nel piano, equazioni parametriche e cartesiane, intersezione di due rette. Determinante ed area di un triangolo. Distanza fra due punti e distanza punto-retta. Circonferenze, equazioni della retta tangente. 7.2 Geometria di $\mathbb{R}^3$: Rette e piani nello spazio tridimensionale; relazioni di incidenza. Prodotto vettoriale, prodotto misto e loro proprietà. Volume di un parallelepipedo. Distanze fra due punti, fra punto-piano, fra piano-piano e fra due rette sghembe.

8. Sezioni coniche

8.1 Ellisse, parabola e iperbole. Equazioni canoniche e cambi di coordinate. 8.2 Basi ortonormali e rotazioni. Matrici ortogonali. Roto-traslazioni. 8.3 Definizione algebrica di una conica e matrici associate. Riduzione in forma canonica. 8.4 Invarianti di una conica. Classificazione delle coniche. 8.5 Centro risp. vertice ed assi di simmetria di una conica.

Elenco delle dimostrazioni (in parole sintetiche, quindi non troppo esatte)

Nota: nella maggior parte dei casi, più importante di ogni singolo dettaglio delle dimostrazioni è poter spiegare (brevemente) i passi principali.

1. Se $g \circ f$ iniettivo (suriettivo), allora f iniettivo (allora g suriettivo).
2. Per due sottoinsiemi $A_1, A_2 \subset A$ si ha $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ per una applicazione $f : A \to B$. Se f è iniettiva, si ha $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso.
4. Teorema di Cramer (solo la direzione "$\Leftarrow$").
5. $\det(A) = \det(A^T)$.
6. $U_1 \cap U_2$ è sottospazio per due sottospazi vettoriali. $U_1 + U_2 = \mathcal{L}(U_1 \cup U_2)$.
7. Formula di Graßmann.

8. Unicità della decomposizione in una somma diretta.
9. Caratterizzazione di una base.
10. Lemma di Steinitz. Equipotenza delle basi.
11. Proprietà di nucleo e immagine: un'applicazione lineare $f : V \to V$ trasforma sottospazi in sottospazi, insiemi di generatori in insiemi di generatori, e se f è iniettiva, basi di V in basi di $f(V)$.
12. Teorema della dimensione.
13. Per il rango di un prodotto di due matrici vale $\rho(AB) \leq \min(\rho(A), \rho(B))$.
14. Teorema di Rouché-Capelli.
15. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
16. Disuguaglianza triangolare.
17. Gram-Schmidt: l'insieme che risulta dalla procedura costituisce una base ortonormale.
18. $U^\perp$ è un sottospazio. Teorema del complemento ortogonale: $\dim(U) \bigoplus \dim(U^\perp) = \dim(V)$.
19. Nonassociatività e noncommutatività del prodotto vettoriale.
20. Formula per la distanza di due rette sghembe e volume di un parallelepipedo.
21. Metodo per derivare la matrice del cambiamento di base. Relazione fra due matrici rappresentative di un endomorfismo rispetto a basi diverse.
22. Gli autospazi sono sottospazi vettoriali. Autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.
23. Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, la stessa traccia e lo stesso determinante.
24. Se gli autovettori di una matrice formano una base di $\mathbb{R}^n$, allora la matrice che ha i vettori di questa base come colonne è una matrice diagonalizzante.
25. Criterio di diagonalizzabilità di una matrice.
26. Teorema spettrale per matrici simmetriche. Autovalori di matrici simmetriche sono reali ed autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.
27. Teorema: gli invarianti di una conica sono, appunto, invarianti.
28. Lemma dell'asse di una parabola, formula per il centro di una formula a centro.

Testi consigliati

[1] Slides e appunti del corso.

[2] C. Carrara, *Esercizi di algebra lineare* (on-line).

[3] M. Abate e C. De Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, McGraw-Hill (2010).

[4] L.A. Lomonaco, *Un'introduzione all'algebra lineare*, Aracne (2005).

[5] F. Orecchia, *Lezioni di geometria I*, Aracne (2000).
[6] E. Sernesi, *Geometria I*, ed. Boringheri ;
[7] M. R. Casali, C. Gagliardi e L. Grasselli, *Geometria*, Esculapio (2016);