

Qualche esercizio tipico in vista dell'esame scritto del modulo di Geometria

Niels Kowalzig

(1) Sistemi di equazioni lineari

Si consideri il sistema dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Determinare un valore di λ per il quale il sistema ammette infinite soluzioni (inserire un valore numerico):

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(a) Per nessun valore di λ , la terna $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema.

(b) Se $\lambda = 1$, il sistema ammette una soluzione con $x_2 = 0$.

(c) Qualunque sia il valore di λ , le prime due equazioni descrivono una retta dello spazio tridimensionale.

(2) Rette e piani

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si considerino le rispettive equazioni cartesiane della retta $r : x_1 = \frac{x_2+1}{6} = \frac{x_3-2}{2}$ nonché del piano $\pi : 2x_1 + (k+2)x_2 + 4x_3 - 11 = 0$ in \mathbb{R}^3 .

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (In caso di più di una risposta corretta, segnarne una a piacere.)

- r è parallela a π per $k = -11/3$.
- r non è mai ortogonale a π .
- r è incidente π per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- r è ortogonale a π per $k = 10$.
- r è parallela a π per $k = 3$.

(3) Rette e piani

Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, si considerino le rispettive equazioni cartesiane dei tre piani $\pi_1 : x_1 + x_2 + x_3 - h = 0$, $\pi_2 : x_1 + kx_2 = 0$ nonché $\pi_3 : x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (In caso di più di una risposta corretta, segnarne una a piacere.)

- Se $h \neq -1$, $k = 1$ uno dei piano è parallelo alla retta di intersezione degli altri due.
- Se $h = -1$, $k = 1$ i tre piani si intersecano in una retta.
- Se $h = 1$, $k = -1$ i tre piani non si intersecano mai.
- Se $h \neq 1$, $k = 0$ l'intersezione dei tre piani è un punto.
- Se $k \neq 1$ i tre piani si intersecano in un punto.
- π_1 è un sottospazio vettoriale per ogni $h \in \mathbb{R}$.
- π_3 è un sottospazio vettoriale
- Se $h = -1$, $k = 0$ i tre piani si intersecano in una retta.

(4) Distanze

a) Sia r la retta di \mathbb{R}^3 passante per i punti $A(-1, 3, 11)$ e $B(-1, -6, -1)$, e sia s la retta passante per $C(-1, k, 7)$, essendo $k \in \mathbb{R}$ un parametro reale, e con direzione data dal vettore $\mathbf{v} = (0, 3, 4)$.

a.1) Quale è la posizione reciproca delle due rette per $k = 0$?

- Incidenti
- Coincidenti
- Parallele
- Sghembe

a.2) Determinare un valore di k per il quale le due rette abbiano distanza 4 (inserire un valore numerico):

b) Determinare un valore di k per il quale il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori $(1, 0, -1)$, $(2, k, 5)$ nonché $(3, -1, -1)$ sia uguale a 1:

(5) **Sottospazi, intersezioni, somma**

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$(-5, 1, 0, 7) \quad (0, 1, 0, 2) \quad (1, 0, 0, -1) \quad (0, 4, -3, 8)$$

e sia W_k il sottospazio, dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$W_k := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

a) Il vettore $(0, 0, 1, 0)$ appartiene a V ?

Sì	<input checked="" type="checkbox"/>
No	<input type="checkbox"/>

b) V ha dimensione: (Inserire un valore numerico.)

Una sua base è data da

- non ha base perché non è un sottospazio
- $(0, 1, 0, 2), (-5, 0, 1, 5), (0, 0, 2, 0)$
- $(-1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (0, -2, 1, 3)$
- $(2, 3, 0, -1), (1, 0, 0, 1)$
- $(1, -1, 1, 0), (1, 0, -1, 0)$
- $(1, 1, -1, 0)$
- $(0, 0, 0, -1)$
- giovedì

c) W_k ha dimensione: (Inserire un valore numerico.)

d) $V \cap W_k$ ha dimensione 2:

- per ogni valore di k
- per nessun valore di k
- se e solo se $k = 0$
- se e solo se $k = -2$
- nessuna delle risposte precedenti

e) $V + W_0$ ha dimensione: (Inserire un valore numerico.)

f) Una base di W_k^\perp per ogni k è data da

- non ha base perché non è un sottospazio
- non si può dire per k arbitrario
- $(1, k, 1, k - 1), (0, 0, 1, -1), (1, 1, -k, -1)$
- $(k, 0, 0, 1), (1, 0, 1, -1), (1, -1, k, -1 - k)$
- $(1, -1, k, -1), (1, 1, -1, -k)$
- $(1, 1, -k, -1), (-1, 1, 1, -k)$
- $(1, k, 1, 1)$
- $(0, 0, 0, 0)$
- giovedì

(6) **Sottospazi, intersezioni, somma**

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$(4, -8, -12, 0) \quad (-6, 2, 8, 0) \quad (1, 0, 0, 1) \quad (0, 1, 1, 0)$$

e sia W_k il sottospazio, dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$W_k := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + kx_3 - x_4 = x_2 + x_3 = 0\}$$

a) Il vettore $(0, 1, 0, 1)$ appartiene a V ?

Sì	<input type="checkbox"/>
No	<input checked="" type="checkbox"/>

b) V ha dimensione: (Inserire un valore numerico.)

Una sua base è data da

- non ha base perché non è un sottospazio

- $(1, -2, -2, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, -1, -1)$ ✓
 - $(-1, -1, -1, 1), (1, 1, 0, -1), (0, -2, 1, -1)$
 - $(2, -1, -1, -1), (1, 0, 0, 1)$
 - $(1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, -67)$
 - $(1, -1, 0, 2)$
 - $(0, 1, 0, 0)$
 - giovedì
- c) W_k ha dimensione: ✓ (Inserire un valore numerico.)
- d) $V \cap W_k$ ha dimensione 2:
- per ogni valore di k
 - per nessun valore di k
 - se e solo se $k = 0$
 - se e solo se $k \neq 2$
 - nessuna delle risposte precedenti ✓
- e) $V + W_0$ ha dimensione: ✓ (Inserire un valore numerico.)
- f) Una base di W_k^\perp per ogni k è data da
- non ha base perché non è un sottospazio
 - non si può dire per k arbitrario
 - $(1, k, 1, k - 1), (0, 0, 1, -1), (1, 1, -k, -1)$
 - $(k, 0, 0, 1), (1, 0, 1, -1), (1, -1, k, -1 - k)$
 - $(1, 0, -k, -1), (1, 1, -1, -k)$
 - $(1, 0, k, -1), (0, 1, 1, 0)$ ✓
 - $(1, 0, -1, 1 - k)$
 - $(0, 0, 0, 0)$
 - giovedì

(7) Applicazioni lineari

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$ data da

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_2 + kx_3, kx_1 + x_2, -x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

- a) Per quali valori di k l'applicazione f è iniettiva?
- $k = 0$
 - $k = 1$
 - $k = 2$
 - $k \neq 0$
 - $k \neq 1$
 - $k \neq 2$ ✓
 - Per ogni valore di k
 - Per nessun valore di k
 - Nessuna delle risposte precedenti.
- b) Per quali valori di k l'applicazione f è suriettiva?
- $k = 0$
 - $k = 2$
 - $k = 4$
 - $k \neq 2$
 - $k \neq 4$
 - Per ogni valore di k
 - Per nessun valore di k ✓
 - Nessuna delle risposte precedenti.
- c) Si scelga ora un valore di k per il quale f non sia iniettiva, e sia V il sottospazio di \mathbb{R}^3 ortogonale al vettore $(1, 1, 1)$. Qual'è la dimensione di $f(V)$? ✓

(8) **Applicazioni lineari**

Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$ data da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (2x_2 - x_3 + x_4, kx_1 + x_2 + x_4, 2x_1 + x_3 + kx_4)$$

a) Per quali valori di k l'applicazione f è iniettiva?

- $k = 0$
- $k = 2$
- $k \neq 0$
- $k \neq 2$
- Per ogni valore di k
- Per nessun valore di k ✓
- Nessuna delle risposte precedenti.

b) Per quali valori di k l'applicazione f è suriettiva?

- $k = 1$
- $k = 2$
- $k \neq 0$
- $k \neq 1$ ✓
- $k \neq 2$
- Per ogni valore di k
- Per nessun valore di k
- Nessuna delle risposte precedenti.

c) Si ponga ora $k = 0$, e sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 ortogonale al vettore $(0, 1, -1, 0)$. Qual'è la dimensione di $f(V)$? ✓

(9) **Coniche nel piano proiettivo**

La conica affine $\gamma : x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

a) è

- degenerare, ovvero due rette parallele distinte
- degenerare, ovvero due rette parallele coincidenti (un'unica retta)
- degenerare, cioè l'insieme vuoto (ovvero un insieme di punti immaginari)
- degenerare, ovvero un punto
- degenerare, ovvero due rette distinte incidenti nel piano affine
- una ellisse
- una parabola ✓
- una iperbole
- preferisco non rispondere

b) I suoi invarianti sono $I_1 = \text{input type="text" value="10"/> ✓$, $I_2 = \text{input type="text" value="0"/> ✓$, $I_3 = \text{input type="text" value="-9"/> ✓$

c) La sua chiusura proiettiva ha ✓ punti impropri (inserire il numero dei punti impropri).

In coordinate omogenee, questi punti impropri sono dati da

- non so proprio cosa sia un punto improprio
- $[0, 1, 2]$, $[-1, 0, 2]$
- $(0, 2, 3)$, $(0, 1, -1)$
- $[0, 3, 1]$, $[0, -1, 3]$
- $[0, 2, 1]$, $[0, 1, 2]$, $[0, 4, 1]$
- $[0, 0, 0]$
- $[0, -3, 1]$ ✓
- $[0, 1, 2]$
- non ha punti impropri

d) Il centro (proprio o improprio) della conica nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è dato dal punto:

- centro?
- $[0, 1, 1]$
- $[1, 7, 4]$

- $[11, 1, -2]$
- $[0, 0, 0]$
- $[1, 1, -2]$
- $[2, 1, 2]$
- $[0, 5/7, 2/3]$
- $[0, -3, 1]$ ✓

(10) **Coniche nel piano proiettivo**

La conica affine $\gamma : xy + 2x - y + 2 = 0$

a) è

- degenerare, ovvero due rette parallele distinte
- degenerare, ovvero due rette parallele coincidenti (un'unica retta)
- degenerare, cioè l'insieme vuoto (ovvero un insieme di punti immaginari)
- degenerare, ovvero un punto
- degenerare, ovvero due rette distinte incidenti nel piano affine
- una ellisse
- una parabola
- una iperbole ✓
- preferisco non rispondere

b) I suoi invarianti sono $I_1 = \boxed{0 \quad \checkmark}$, $I_2 = \boxed{-0.25 \quad \checkmark}$, $I_3 = \boxed{-0.5 \quad \checkmark}$

c) La sua chiusura proiettiva ha $\boxed{2 \quad \checkmark}$ punti impropri (inserire il numero dei punti impropri).

In coordinate omogenee, questi punti impropri sono dati da

- non so proprio cosa sia un punto improprio
- $[0, 1, 1]$
- $[0, 1, 1], [-1, 0, 1]$
- $(0, 1, 1), (0, 1, -1)$
- $[0, 1, 1], [0, -1, 1]$ ✓
- $[0, 2, 1], [0, 1, 2], [0, 4, 1]$
- $[0, 0, 0]$
- $[0, 0, 0], [0, 1, 1]$
- non ha punti impropri

d) Il centro (proprio o improprio) della conica nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è dato dal punto:

- centro?
- $[0, 1, 1]$
- $[1, 7, 4]$
- $[1, 1/11, -2/11]$
- $[1, 0, 0]$
- $[1, 1, -2]$ ✓
- $[2, 1, 2]$
- $[1, 5/7, 2/3]$