Introduzione alla logica simbolica

Che per mezzo di essa [la logica] s'impari a pensare (ciò che una volta si riguardava come la sua utilità epperciò il suo scopo – proprio come se si dovesse imparare a digerire e a muoversi solo collo studio dell'anatomia e della fisiologia) è un pregiudizio che si è ormai perduto da un pezzo.

Georg W.F. Hegel

Voler fare della logica un uso pratico è un voler affannosamente dedurre da regole generali ciò che in ogni singolo caso particolare conosciamo con la massima immediata certezza: come se per muoverci credessimo necessario studiare prima la meccanica, o la fisiologia per digerire.

Arthur Schopenhauer

Il crimine è una cosa comune. La logica è una cosa rara. Quindi, lei dovrebbe concentrarsi più sulla logica che sul crimine.

Arthur Conan Doyle

La logica è una disciplina antica, e dal 1879 è stata una grande disciplina.

Willard V. O. Quine

La logica assomiglia alla buona poesia: immaginazione radicale e precisa, forma elegante e potente, esattamente le espressioni giuste nell'ordine esattamente giusto, sottili variazioni su un tema, l'inconsueta articolazione del consueto, una riflessione nel linguaggio sul linguaggio e la sua relazione con il mondo, profondità raggiunta attraverso la scrupolosa accuratezza.

Tim Williamson

Introduzione

La logica, come disciplina, studia certe caratteristiche del ragionamento, e in particolare le connessioni, dal punto di vista della loro verità, fra diversi pensieri. Piuttosto che di pensieri, noi parleremo spesso di proposizioni, ovvero pensieri veri o falsi, o di enunciati o formule, i corrispondenti linguistici delle proposizioni (almeno nelle nostre intenzioni). Il corrispondente di un ragionamento a livello linguistico sarà un argomento. Il modo in cui la logica moderna, o formale, procede è creare uno speciale linguaggio, un linguaggio formale, nel quale le connessioni fra i diversi enunciati sono rese esplicite attraverso un insieme di regole o di assiomi.

Per quale motivo si studia la logica formale? Ci sono due principali generi di ragioni. Possiamo usare la logica come strumento per valutare la validità dei nostri ragionamenti o argomenti (magari con particolare attenzione ad una certa area). O possiamo usare la logica, e le sue assunzioni su quali ragionamenti sono validi, per studiare certe proprietà generali del pensiero o del linguaggio (anche qua, si può limitarsi ad una certa area). Lo studio filosofico della logica stessa può rientrare in questo secondo campo. Ma anche l'interesse della logica come risorsa per lo studio del linguaggio, e per lo studio del pensiero, rientrano in questo campo. Diverse combinazioni di queste motivazioni sono naturalmente possibili.

Prima di andare avanti, sarà utile fornire un esempio forse curioso, ma a mio avviso istruttivo, del secondo tipo di utilità di studio della logica. La logica può servire a comprendere la psicologia degli animali. Una figura importantissima nella storia della logica fu il filosofo stoico Crisippo, che può essere considerato il padre di una parte della logica che chiamiamo logica *proposizionale*. Sesto Empirico racconta che Crisippo notò nel comportamento dei cani l'applicazione di uno dei principi da lui formulati. Un cane che stia seguendo una preda, e si trovi di fronte a un bivio (ovvero solo due possibili direzioni), inizierà con l'annusare una delle due piste, cercando l'odore della preda. Se non trova l'odore in quella pista, sosteneva di aver osservato Crisippo (ma credo questo sia stato confermato da recenti studi sperimentali), non si soffermerà ad annusare la seconda, ma la imboccherà immediatamente. Il cane dunque si comporta come se ragionasse come segue: "dev'essere andato o di qua o di là; di là non è andato, dunque è andato di qua." Il principio che il cane applica è quello che Crisippo chiamò "sillogismo disgiuntivo": A oppure B; ma non A; dunque B. Questa storiella ha diverse morali. In questo contesto, la morale è che la logica non servirà certamente ad insegnare al cane a ragionare correttamente; ma se Crisippo non avesse avuto il vocabolario e i concetti che aveva sviluppato studiando la logica, non avrebbe avuto i mezzi per interpretare il comportamento del cane in maniera sistematica. Non l'avrebbe notato, o non ne avrebbe colto il significato.

Ma la logica serve a ragionare correttamente? Schopenhauer, ne *Il mondo come volontà e rappresentazione*, scrive: "Voler fare della logica un uso pratico è un voler affannosamente dedurre da regole generali ciò che in ogni singolo caso particolare conosciamo con la massima immediata certezza: come se per muoverci credessimo necessario studiare prima la meccanica, o la fisiologia per digerire. Chi insegna la logica per un fine pratico somiglia a colui che volesse insegnare al castoro a costruire la sua capanna". Lo stesso concetto, e con delle analogie quasi identiche, era stato espresso pochi anni prima da Hegel nella prefazione della sua *Scienza della logica*: "Che per mezzo di essa [la logica] s'impari a pensare (ciò che una volta si riguardava come la sua utilità epperciò il suo scopo – proprio come se si dovesse imparare a digerire e a muoversi solo collo studio dell'anatomia e della fisiologia) è un pregiudizio che si è ormai perduto da un pezzo". Per uno storico della filosofia, la domanda interessante sarebbe se Schopenhauer stesse (inconsapevolmente, senza dubbio) riprendendo Hegel, o se ci sia una fonte comune. Quello che invece ci interessa qui è quanto ci sia di vero e di utile nell'atteggiamento espresso dai due filosofi tedeschi.

Chiariamo meglio la tesi. Nessuno dei due suggerisce che la logica come disciplina teoretica non abbia nessun valore. Inoltre, la logica può avere alcune applicazioni pratiche che non erano prevedibili nel primo ottocento, ad esempio nel campo dell'informatica. Dunque la tesi può essere espressa dicendo che la logica non è utile, specificamente, per imparare a ragionare. Se fosse vero, questo avrebbe delle conseguenze anche pratiche. Alcuni sostengono invece che lo studio della logica sia utile per acquisire la capacità di valutare criticamente delle argomentazioni, e che vada perciò introdotto anche a livello di scuola secondaria, rendendo la popolazione più capace di resistere alle strategie persuasive dei demagoghi. Se la logica però è priva di utilità per il pensare, questa proposta è basata su un errore.

Ci sono diverse ragioni che possono essere offerte a sostegno della tesi dell'inutilità della logica per il pensiero, partendo dalle analogie sopra. Primo, gli esseri umani sono per natura capaci di ragionare. L'uomo non è l'animale razionale? Ma allora gli esseri umani non hanno bisogno che s'insegni loro quello che è iscritto, per così dire, nel loro DNA (come nel DNA del castoro c'è l'istinto a costruire). Secondo, ma legato al punto precedente, ci sono innumerevoli esempi storici di persone che ragionano correttamente, e anche in maniera sofisticata e ingegnosa, senza aver avuto un'educazione di logica formale. Tutte le persone d'ingegno vissute prima di Aristotele, ad esempio. Ma anche moltissime dopo, e ancora oggi. Supporre che chi non ha studiato logica non posso ragionare correttamente sembra un atteggiamento assurdamente intellettualistico, uno snobismo filosofico del tutto privo di base. Terzo, l'apprendimento della logica presuppone esso stesso la capacità di ragionare. Se uno studente non trova persuasivo un esempio chiaro di ragionamento corretto, non sarà possibile fare progressi.

Queste ragioni hanno un loro valore, ma provano una tesi limitata. Lo studio della logica non è necessario per ragionare correttamente. Questo però non significa che lo studio della logica non aiuti a ragionare correttamente. Possiamo riprendere da Hegel un'altra analogia, quella che usa per criticare il progetto di Kant nella critica della ragion pura, ovvero, grossomodo, il progetto di voler determinare a priori i limiti della ragione. Questo progetto è paragonato da Hegel a quello dello scolastico di una storiella comica, che voleva imparare a nuotare, prudentemente, prima di entrare in acqua. Che questa sia o meno una critica giusta verso Kant, sembra che si applichi bene all'atteggiamento nei confronti della logica espresso da Schopenhauer e dallo stesso Hegel. Non possiamo concludere, dal fatto che è necessario essere già capaci di ragionare per iniziare a studiare la logica, che la logica non abbia la capacità di migliorare quella stessa capacità; proprio come non possiamo dedurre, dal fatto che sia necessario rimanere a galla per poter imparare la tecnica del nuoto, che quella tecnica non aiuti a rimanere a galla in maniera più sicura, efficiente ed elegante.

Quello che possiamo ottenere è, nel migliore dei casi, una retroazione positiva. La capacità di ragionare che permette di apprendere la logica può essere affinata e rinforzata dalla riflessione sistematica, e questo rafforzamento è la base (fra le altre cose) per approfondire ed espandere lo studio della logica. Ancora molte considerazioni sarebbero possibili, ma credo si possa dire con ragionevole certezza che la logica è più utile per pensare correttamente di quanto lo sia l'anatomia per digerire. Piuttosto, direi che la logica è utile per pensare quanto la scienza fisica o chimica per operare sulla materia. Gli esseri umani, da quando esistono, operano sulla materia in una varietà enorme di modi, e ci sono anche adesso moltissimi modi eccellenti di operare sulla materia che non richiedono minimamente la conoscenza della fisica o della chimica. Ma la conoscenza di queste scienze può sia correggere errori e introdurre miglioramenti nelle nostre attività, sia aprire interi nuovi campi di azione.

1. La logica formale

Una definizione più rigorosa di logica formale può essere data come segue:

LOGICA FORMALE: disciplina che studia le condizioni di validità degli argomenti.

L'oggetto della logica è dunque la validità e la invalidità degli argomenti. Lo scopo della logica è quello di elaborare criteri e metodi attraverso cui distinguere gli argomenti validi da quelli invalidi: essa cerca di trovare le condizioni alle quali un argomento, da qualunque campo di studi esso provenga, risulta accettabile. Per comprendere a fondo questa caratterizzazione della logica abbiamo bisogno di capire:

1) cos'è un argomento
2) cos'è la validità di un argomento

2. Enunciati e proposizioni

Per spiegare cos'è un argomento, useremo la nozione di **enunciato**. Cominciamo dunque col vedere cos'è un enunciato:

ENUNCIATO: Unità grammaticale (ben formata) di un linguaggio *L*.

Le seguenti espressioni sono quindi esempi di enunciati:

"Chiudi la porta"

“La neve è bianca”

Le seguenti espressioni invece non sono esempi di enunciati (non sono, infatti, unità ben formate dell’italiano):

“Chiudi porta la”
“Neve la bianca”

Gli **enunciati dichiarativi** sono un sottoinsieme dell’insieme degli enunciati. In particolare, possiamo dire che:

ENUNCIATO DICHIARATIVO: Enunciato di *L* che ha la proprietà di essere vero o falso.

Quindi, i seguenti sono esempi di enunciati dichiarativi:

“Il gatto dorme sul tappeto”
“La neve è bianca”

Infatti, sono entrambi valutabili come veri o falsi. I seguenti, invece, non sono esempi di enunciati dichiarativi:

“Dove dorme il gatto?”
“Vai a dormire!”

Infatti, non sono valutabili come veri o falsi: non ha senso chiedersi, ad esempio, se la domanda “Dove dorme il gatto?” sia vera o falsa.

In quanto segue, faremo uso, senza farcene scrupolo, delle nozioni di **vero** e **falso**. Dal punto di vista matematico, potremmo anche farne a meno; potremmo assegnare agli enunciati valori come 0 e 1, o V ed F, senza specificare cosa questi rappresentino, e la logica potrebbe rimanere invariata. Ma è chiaro che noi, pur senza entrare nel dibattito filosofico sulla natura della verità, vogliamo fare uso di questa nozione, con lo scopo di rimanere vicini, se non altro, ad un uso intuitivo o pre-teorico. Diremo dunque, dove sia necessario, che un enunciato dichiarativo è vero o falso a seconda del fatto che descriva come stanno le cose in modo rispondente ad esse. Ad esempio, l’enunciato dichiarativo:

“Il gatto dorme sul tappeto”

sarà vero se e solo se, ovvero solamente nel caso in cui, effettivamente il gatto dorme sul tappeto; sarà falso in tutti gli altri casi, ad esempio nel caso in cui il gatto sia sveglio, o nel caso in cui il gatto dorma sul tavolo. Più brevemente, diremo che:

L'enunciato "Il gatto dorme sul tappeto" è vero sse (= se e solo se) il gatto dorme sul tappeto

È conveniente descrivere l'essere vero di un enunciato dicendo che il suo valore è il Vero, e l'essere falso di un enunciato dicendo che il suo valore è il Falso. Ci riferiamo a questi due possibili valori come a **valori di verità**. Una ulteriore assunzione che manterremo, almeno provvisoriamente, è che ciascun enunciato ha uno, ed uno solo, di questi due valori di verità.

2.1 Proposizioni

Gli enunciati dichiarativi sono dunque quegli enunciati che hanno la proprietà di avere un valore di verità. C'è anche un modo diverso, forse più comune in filosofia, di esprimere questo stesso punto. Anziché dire, ad esempio, che:

(*) L'enunciato "La neve è bianca" è vero sse la neve è bianca

Possiamo dire che:

(**) La **proposizione** espressa dall'enunciato "La neve è bianca" è vera sse la neve è bianca

dove per "proposizione" intendiamo:

PROPOSIZIONE: Ciò che è espresso o detto dall'enunciato.

La proposizione è quindi il contenuto semantico dell'enunciato, ciò che appunto l'enunciato dice o esprime. Se quello che è propriamente vero o falso è la proposizione (come alcuni filosofi pensano), sarà allora anche più corretto dire che:

ENUNCIATO DICHIARATIVO: Enunciato che esprime una proposizione che ha la proprietà di essere vera o falsa.

Perché abbiamo bisogno della distinzione tra enunciato e proposizione? Considerate i tre enunciati seguenti:

(1) Die Schnee ist Weiss
(2) La neve è bianca
(3) Snow is white

(1), (2) e (3) sono tre enunciati diversi che esprimono però tutti la stessa proposizione. Pur essendo diversi, cioè, i tre enunciati dicono in un certo senso la stessa cosa, hanno il medesimo contenuto semantico. La proposizione che la neve sia bianca può essere valutata come vera (o falsa), indipendentemente dal fatto che esprimiamo tale proposizione con (1), (2), oppure (3). Potremmo anche dire che la proposizione è il pensiero espresso da (1), (2) e (3). Come vedremo, si può supporre che anche diversi enunciati nella stessa lingua esprimano la stessa proposizione; ad esempio, "Il gatto ha acchiappato il topo" e "il topo è stato acchiappato dal gatto".

Un altro modo per chiarire la distinzione tra enunciato e proposizione passa per la distinzione tra discorso diretto e discorso indiretto. Supponete che Pietro proferisca l'enunciato "La musica rap non è elegante". Ci sono due modi per descrivere il proferimento di Pietro:

a) Pietro ha detto: **"**La musica rap non è elegante**"**

b) Pietro ha detto che la musica rap non è elegante

Se usiamo a), ovvero il discorso diretto, stiamo riportando le esatte parole che Pietro ha proferito per dire ciò che ha detto. Se usiamo b), invece, stiamo riportando ciò che Pietro ha detto. Se Pietro, anziché l'enunciato "La musica rap non è elegante", avesse proferito l'enunciato "La musica rap manca di eleganza", il modo a) di descrivere o riportare il proferimento di Pietro sarebbe stato scorretto, mentre invece il modo b) sarebbe stato ancora corretto. Infatti, usiamo il discorso diretto quando ciò che ci interessa è riportare fedelmente l'enunciato che è stato proferito; usiamo il discorso indiretto quando ciò che ci interessa è ciò che è stato detto (la proposizione), indipendentemente dalle parole esatte che sono state usate per dirlo.

3. Argomenti

ARGOMENTO (O INFERENZA): sequenza di enunciati dichiarativi, ovvero enunciati che sono veri o falsi. Uno di questi enunciati è la conclusione dell'argomento, gli altri sono le premesse dell'argomento. Le premesse inoltre forniscono le ragioni per derivare la conclusione.

Quello che segue è quindi un esempio di argomento (la linea segnala graficamente il passaggio dalle premesse alle conclusioni):

(1) Tutte le donne sono mortali

<u>(2) Laura è una donna</u>

(3) Laura è mortale

(1), (2), e (3) sono tutti enunciati dichiarativi; (1) e (2) sono le premesse, (3) è la conclusione; (1) e (2) ci forniscono delle ragioni per arrivare a concludere (3).

Quello che segue invece *non* è un esempio di argomento:

(1) Tutte le donne sono mortali

<u>(2) Laura è una donna?</u>

(3) Laura è mortale

(2) infatti non è un enunciato dichiarativo (è un enunciato interrogativo, e come tale non è vero o falso), e le premesse (1) e (2) non ci forniscono delle ragioni per derivare la conclusione (3) – e non ce le forniscono proprio perché (2) non è un enunciato dichiarativo.

Nel linguaggio ordinario, le premesse di un argomento sono a volte precedute e quindi segnalate da *indicatori di premessa* quali "dato che", "dal momento che", "visto che", "poiché", ecc.; la conclusione è invece a volte preceduta e quindi segnalata da *indicatori di conclusione* quali "quindi", "dunque", "ne segue che", "allora", "perciò", "ne risulta che", ecc. Ma a volte non abbiamo né indicatori di premessa né indicatori di conclusione, e dobbiamo far ricorso al contesto e alle intenzioni di chi usa gli enunciati per stabilire se abbiamo di fronte un argomento. Ad es. se dico "Francesco Guccini è emiliano; è una persona onesta", possiamo pensare che io intenda proporre un argomento (che sarebbe invalido) o che stia facendo due affermazioni separate (che potrebbero essere entrambe vere).

Esercizio 1. (da Varzi, Nolt e Rohatyn, *Logica* (2ª ed.), McGraw Hill, 2007)

A. Alcuni dei brani che seguono contengono argomentazioni, altri no. Individuare i primi ed elencarne premesse e conclusioni.

(1) È da tante settimane che la Juve non perde. Domani perderà senz'altro.
(2) È da tante settimane che la Juve non perde. Non perderà neanche domani.
(3) Ho detto a tutti di non telefonare perché tu potessi studiare indisturbato.
(4) Gli esseri umani sono animali, infatti appartengono alla classe dei mammiferi.
(5) Gli esseri umani sono animali, quindi appartengono alla classe dei mammiferi.
(6) Certo che ci sono filosofi disonesti! Tutti i filosofi sono saggi, ma non tutte le persone sagge sono oneste.
(7) Molti statunitensi non sanno nemmeno se il loro paese sostenga la messa al bando internazionale delle mine anti-uomo o vi si opponga. Gli statunitensi sono cittadini irresponsabili.

B. Le argomentazioni seguenti hanno una premessa o una conclusione implicita. Indicare in ciascun caso di quale asserzione si tratta.

(1) I negozi sono chiusi di domenica, ma oggi è martedì.
(2) Gli uomini sono animali, e gli animali sono mortali. Quindi Socrate è mortale.
(3) Tutti i numeri positivi sono o pari o dispari, e sappiamo bene che 7 non è pari.

(4) Sandro non è a casa. Non è neanche da Francesca e non può essere in biblioteca, perché oggi è sabato e la biblioteca è chiusa. Quindi dev'essere andato al cinema.
(5) Sandro è a casa. Quindi non è in biblioteca.
(6) Gli studenti di filosofia sono terribilmente pignoli, e Beatrice detesta le persone pignole. Non c'è dubbio che Beatrice detesterà anche tuo fratello.
(7) Il cognato non ha nessun alibi. Aveva anzi ottimi motivi per uccidere la signora Rossi. E poi sono stati visti insieme pochi minuti prima dell'ora del delitto.

4. Validità di un argomento

Un argomento è valido quando le premesse implicano la conclusione, ovvero quando la verità delle premesse *garantisce* la verità della conclusione. Diciamo anche che un argomento è valido quando la conclusione *segue logicamente* dalle premesse. Caratterizzare esattamente la nozione di validità è un compito non semplice. Il metodo più comune di farlo è usare il linguaggio modale (il linguaggio del possibile e del necessario), come segue:

VALIDITÀ: Un argomento è valido sse (se e solo se) è impossibile che le premesse siano vere e la conclusione sia falsa.

Considereremo più in là qualche complicazione per questa definizione. Per ora diciamo quindi che un argomento è valido se e solo se è impossibile che ci sia un caso in cui le premesse siano vere e la conclusione invece sia falsa. Di conseguenza, inoltre, avremo che:

INVALIDITÀ: Un argomento è invalido sse è possibile che le premesse siano vere e la conclusione sia falsa.

Vediamo allora alcuni esempi di argomenti validi e di argomenti invalidi.
N.B. Affinché un argomento sia valido, ciò che conta non è che le premesse e la conclusione siano di fatto vere (o false): ciò che conta è che NELL'IPOTESI che le premesse siano vere, non possa succedere che la conclusione sia falsa.

Cominciamo con gli esempi di **argomenti validi**:

1) (1) Alessandro va alla festa
(2) Pietro va alla festa
(3) Alessandro va alla festa e Pietro va alla festa

1) è valido perché nell'ipotesi che (1) e (2) siano vere, non è possibile che (3) sia falsa. Che cosa succede, infatti, se (1) e (2) sono vere? Succede che per forza di cose anche la conclusione (3) lo è: infatti, (3) è la congiunzione di (1) e (2).

2) (1) Alessandro va alla festa e Pietro va alla festa
(2) Alessandro va alla festa

2) è valido perché nell'ipotesi che (1) sia vera, non è possibile che (2) sia falsa. Infatti, (2) è uno dei congiunti che formano (1).

3) (1) Se la Terra non è rotonda, allora la Terra è piatta
(2) La Terra non è rotonda
(3) La Terra è piatta

3) è valido perché nell'ipotesi che (1) e (2) siano vere, la conclusione (3) non può essere falsa.

Il seguente è, invece, un esempio di **argomento invalido**:

4) (1) Se la Terra non è rotonda, allora la Terra è piatta
(2) La Terra è rotonda
(3) La Terra è fatta di roccia

4) è invalido perché è possibile che le premesse (1) e (2) siano vere, ma la conclusione sia falsa. Un esempio più sottile di argomento invalido è questo

5) (1) Se piove, prendo l'ombrello
(2) Non piove
(3) Non prendo l'ombrello

Il condizionale affermato da (1) non dice niente sulla circostanza in cui non piove (torneremi su questo più avanti). Quindi, c'è la possibilità che, nel caso le premesse (1) e (2) siano vere, la conclusione sia falsa: l'argomento è invalido.

Esercizio 2: Tornate agli esercizi 1.A e 1.B svolti in precedenza. Degli argomenti che avere trovato o ricostruito valutate se sono validi o meno.

4.1 Fondatezza di un argomento

Un argomento valido è dunque un argomento che ci garantisce che, nell'ipotesi che le premesse siano vere, anche la conclusione lo è. Ad esempio, il seguente argomento:

(1) Se gli elefanti volano, allora la Terra è piatta
(2) Gli elefanti volano
(3) La Terra è piatta

è un argomento valido.

Nonostante ciò, saremmo restii a dire che questo argomento è davvero un buon argomento. Perché? Perché è sì un argomento valido, ma le sue premesse non sono tutte vere: (2) è chiaramente falsa. In filosofia però, e in qualunque campo di studi o di interesse ci si serva di argomenti, non sempre ci si può accontentare di sapere che la conclusione di un argomento segue logicamente dalle premesse; si vuole anche che la conclusione segua da premesse che sono *vere*. Si vuole cioè che un argomento sia non soltanto valido, ma anche **fondato**:

FONDATEZZA: Un argomento è fondato sse (i) è valido e (ii) ha premesse vere.

L'argomento appena visto è allora un argomento *non fondato*: è valido (soddisfa la condizione (i)) ma ha almeno una premessa falsa (non soddisfa la condizione (ii)).

A differenza dell'argomento precedente, il seguente è un esempio di argomento *fondato*:

(1) Se l'oro è un elemento, l'oro ha un numero atomico
(2) L'oro è un elemento
(3) L'oro ha un numero atomico

Questo argomento ha molte proprietà apprezzabili: è valido e ha premesse vere, dunque la sua conclusione deve necessariamente essere vera; in una parola, è un argomento fondato.

Esercizio 3: Individuare gli argomenti fondati; di quelli infondati, precisare se sono invalidi o hanno premesse false, o entrambe le cose.

1. Parigi è in Francia. La Francia non è parte della Germania. Dunque Parigi non è in Germania.
2. Ajaccio è in Corsica. La Corsica non è parte della Francia. Dunque Ajaccio non è in Francia.
3. Napoleone è nato ad Ajaccio. Dunque la Spagna è una nazione europea.
4. Napoleone è nato il 15 agosto del 1769, ed è morto il 5 maggio 1821. Dunque ha vissuto fino a 52 anni.
5. I gatti sono felini. Dunque se Mia è un gatto, allora è un felino.

6. I gatti non dormono mai. Dunque se Mia è un gatto, allora non dorme mai.
7. I gatti amano mangiare carote. I gatti hanno una buona vista. Dunque le carote fanno bene alla vista.
8. I conigli amano magiare carote. Le carote fanno bene alla vista. Dunque i conigli avranno una buona vista.

5. Enunciati atomici, complessi, e connettivi vero-funzionali (parte I)

Consideriamo ora i seguenti enunciati:

(4) Gianni ha passato l'esame
(5) Se Gianni ha passato l'esame, Maria è felice
(6) Gianni ha passato l'esame e Maria è felice

(4), (5) e (6) sono tutti enunciati dichiarativi. C'è però una differenza tra (4) da una parte e (5) e (6) dall'altra. Finora abbiamo visto solo esempi di enunciati del tipo di (4), ovvero esempi di enunciati semplici o **atomici**:

ENUNCIATO ATOMICO: Enunciato che non contiene al suo interno nessun altro enunciato

A differenza di (4), (5) e (6) sono enunciati ulteriormente scomponibili in enunciati più piccoli, sono, cioè, enunciati **complessi**:

ENUNCIATO COMPLESSO: Enunciato che contiene al suo interno uno o più enunciati

(5) e (6) contengono al loro interno i medesimi enunciati atomici, ovvero

(a) Gianni ha passato l'esame
(b) Maria è felice

La differenza tra (5) e (6) sta nel modo in cui i due enunciati (a) e (b) sono tenuti assieme: in (5), (a) e (b) sono tenuti assieme da "se…allora"; in (6), invece, (a) e (b) sono tenuti assieme dalla congiunzione "e". In logica, espressioni come "e", e "se…allora", che connettono due o più enunciati atomici a formare un enunciato complesso, sono chiamate **connettivi o operatori vero-funzionali**:

CONNETTIVI (O OPERATORI) VERO-FUNZIONALI: espressioni come "se…allora" e "e" che tengono insieme enunciati atomici a formare enunciati complessi

Ora, abbiamo visto cosa vuol dire, per un enunciato atomico, essere vero o falso: un enunciato atomico sarà vero sse le sue condizioni di verità sono soddisfatte - (4), ad esempio, sarà vero sse Gianni ha passato l'esame. Ma cosa vuol dire per un enunciato complesso essere vero o falso? Un enunciato complesso sarà **vero o falso** a seconda del valore di verità degli enunciati che lo compongono e del tipo di connettivo usato. Più precisamente, diciamo che:

> Il **valore di verità di un enunciato complesso** in un linguaggio logico è una **funzione** del valore di verità degli enunciati che lo compongono

Ad es., il valore di verità dell'enunciato complesso (6) è una funzione del valore di verità degli enunciati (a) e (b) che lo compongono.

Quale sia esattamente la funzione con cui abbiamo a che fare dipenderà dal tipo di connettivo presente nell'enunciato complesso: i connettivi vero-funzionali altro non sono, infatti, che **funzioni da valori di verità a valori di verità**, ovvero funzioni che prendono come argomenti i valori di verità degli enunciati che compongono l'enunciato complesso, e restituiscono, come valore, il valore[1] di verità dell'enunciato complesso. Ad esempio, in (6), (a) e (b) sono tenuti assieme dalla congiunzione "e". La congiunzione "e" è, come tutti gli altri connettivi, una funzione da valori di verità a valori di verità, ed è fatta in questo modo:

$f\,(V, V) = V$

$f\,(V, F) = F$

$f\,(F, V) = F$

$f\,(F, F) = F$

La congiunzione "e" è cioè una funzione (*f*) che per gli argomenti (vero, vero) dà come valore il vero, e che per gli argomenti (vero, falso); (falso, vero); e (falso, falso) dà come valore il falso.

N.B. In italiano (e in altri "linguaggi naturali", come i logici e i filosofi a volte chiamano le lingue parlate dagli esseri umani, per contrapporli ai linguaggi "formali" o "artificiali" della logica) non è chiaro se i connettivi più usati siano vero-funzionali.

In logica, i connettivi che interessano maggiormente sono i seguenti:

- la congiunzione "e" – indicata simbolicamente con "$\wedge$"
- la negazione "non" – indicata simbolicamente con "$\neg$" (a volte "~")
- la disgiunzione "o" – indicata simbolicamente con "$\vee$"
- il condizionale (o implicazione) "se … allora" – indicato simbolicamente con "$\rightarrow$" (a

[1] Attenzione a non confondere i due sensi diversi in cui stiamo utilizzando il termine "valore". La prima occorrenza di "valore" si riferisce genericamente all'immagine che gli elementi del dominio hanno nel codominio della funzione; la seconda occorrenza si riferisce al vero/falso.

volte “$\supset$”)

- il bicondizionale “se e solo se” – indicato simbolicamente con “$\leftrightarrow$” (a volte “$\equiv$”)

Per completare il vocabolario del nostro linguaggio logico oltre ai connettivi abbiamo bisogno solo di “lettere proposizionali”. Una qualsiasi lettera dell’alfabeto in minuscolo indicherà una proposizione arbitraria (si usa utilizzare le lettere “p”, “q”, “r”..). Oltre a queste e ai connettivi utilizzeremo a volte le parentesi, che hanno però un ruolo accessorio.

Una lettera proposizionale è di per sé una formula (una formula “ben formata”) del nostro linguaggio. Qualsiasi formula creata usando le regole dei connettivi a partire da formule ben formate è una formula ben formata. Nient’altro è una formula ben formata.

Vediamo allora il funzionamento di ciascun connettivo. Per ognuno di essi daremo la *regola semantica* corrispondente, ovvero la regola che ci descrive in cosa consiste il significato del connettivo, e la *tavola di verità* corrispondente, ovvero una rappresentazione grafica di tale significato (= rappresentazione grafica della funzione in cui consiste il significato del connettivo).

5.1 Congiunzione

Per ogni coppia di proposizioni p e q vi è una proposizione complessa che è la *congiunzione* di p e q, in simboli $p \wedge q$. Le proposizioni p e q si dicono “congiunti”. Un esempio di congiunzione in italiano è il seguente:

(6) Gianni ha passato l’esame e Maria è felice

Se proferisco un enunciato come (6), interpretando la congiunzione in modo vero-funzionale, ciò che sto facendo è impegnarmi alla verità di entrambi i congiunti, ovvero alla verità di “Gianni ha passato l’esame” e di “Maria è felice”, e solo questo. Possiamo rappresentare questa regola usando una **tavola di verità**. In generale una tavola di verità si costruisce riportando sulle colonne a sinistra tutte le possibili combinazioni di valori di verità degli enunciati atomici che compaiono nell’enunciato (usando “V” per vero e “F” per falso), e continuando a destra a calcolare, usando le regole dei connettivi rilevanti, i valori di verità degli enunciati complessi. La tavola di verità, ad esempio, della congiunzione, mostra come calcolare il valore della congiunzione partendo dai due enunciati congiunti, e facendo questo mostra visivamente, per così dire, il significato del connettivo.

Regola semantica della congiunzione: La congiunzione di due proposizioni è vera se e solo se (sse) entrambe le proposizioni sono vere.

Tavola di verità della congiunzione

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

La congiunzione viene espressa solitamente, come sappiamo, con la “e”. Per i nostri scopi, ci sono anche altre parole che esprimono la congiunzione, come “ma”, “però”, etc. La differenza di significato fra “e” e “ma” è infatti irrilevante dal punto di vista della verità dell’enunciato composto. L’enunciato (6) e l’enunciato “Gianni ha passato l’esame ma Maria è felice” sono entrambi veri solo quando i due enunciati atomici che li compongono sono veri, per quanto possano suggerire cose opposte riguardo all’atteggiamento di Maria verso Gianni. Potremmo che dire che il simbolo $\wedge$ astrae dalle differenze fra “e” e “ma” per mostrarne la struttura logica comune.

5.2 Negazione

Per ogni proposizione p c’è un’altra proposizione che è la sua negazione, e che è detta la *negazione* di p, in simboli $\neg p$. “$\neg$” (ma a volte si trova “~”) è il segno di negazione, che si legge “non” oppure “non si dà il caso che”; p è la proposizione negata. Un esempio di negazione è il seguente:

(7) Gianni non ha passato l’esame

Se proferisco un enunciato come (7), ciò che sto facendo è impegnarmi alla verità di (7), ovvero alla falsità della proposizione espressa dall’enunciato “Gianni ha passato l’esame”. Infatti:

Regola semantica della negazione: Se il valore di verità di p è il vero, allora il valore di verità di $\neg p$ è il falso. E viceversa: se il valore di verità di p è il falso, allora il valore di verità di $\neg p$ è il vero.

Tavola di verità della negazione:

p	$\neg$p
V	F
F	V

Attenzione alla negazione nel linguaggio naturale. Non sempre la negazione posta fra il soggetto e il predicato può essere rappresentata come negazione di tutto l'enunciato. Ad es. se dico:

(*) Alcuni filosofi amano la logica

la negazione non sarà:

(**) Alcuni filosofi non amano la logica

Infatti (*) e (**) possono essere entrambi veri. La negazione di (*) sarà piuttosto:

(***) Non si dà il caso che alcuni filosofi amino la logica (ovvero, nessun filosofo ama la logica)

L'uso di "non si dà il caso che" (o espressioni simili nel prendere ad oggetto tutto l'enunciato) anziché "non" ci aiuta allora a non fare confusione.

Introduciamo ora l'uso delle parentesi. Supponiamo di voler negare la formula $p \wedge q$. Potremmo tentare di farlo scrivendo questo: $\neg p \wedge q$. Ma questa formula potrebbe dire che p è falso e q è vero. Non dice quello che intendevamo dire, cioè che non si dà il caso che p e q sono entrambi veri. Dovremo allora usare questa diversa formula: $\neg(p \wedge q)$. Le parentesi indicano che la negazione opera sull'intera congiunzione (a volte si dice che la negazione in questo caso ha nel suo *ambito* l'intera congiunzione).

Possiamo considerare adesso anche come la negazione e la congiunzione si combinino. Consideriamo ad esempio la formula $p \wedge \neg q$. Per costruire la tavola di verità di questa formula partiremo ancora dai valori di verità delle formule atomiche, ma dovremo poi aggiungere una colonna per la prima formula complessa $\neg q$, come segue

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	V	V
F	F	V	F

Esercizio 4:

A. Usando le lettere p per l'enunciato "domani piove", q per "domani c'è la partita di calcetto", e s per "domani c'è il sole", formalizzare i seguenti enunciati
1. Domani non piove
2. Domani non piove e c'è la partita di calcetto
3. Domani non c'è il sole, ma c'è la partita di calcetto
4. Non si dà il caso che domani ci sia la partita di calcetto e ci sia il sole
5. Domani non c'è il sole e non c'è la partita di calcetto
6. Non si dà il caso che domani ci sia il sole ma non ci sia la partita di calcetto

B. Costruite una tavola di verità per la formula $p \wedge \neg p$ (suggerimento: c'è una sola formula atomica, dunque avrete solo due casi di partenza)

C. Costruite le tavole di verità per le formule trovate nell'esercizio 4A.

5.3 Disgiunzione

Per ogni coppia di proposizioni p e q vi è un'altra proposizione che è la *disgiunzione* di p e q, in simboli $p \vee q$. Le proposizioni p e q sono i *disgiunti*, p è il *disgiunto di sinistra* e q il *disgiunto di destra*. Un esempio di disgiunzione è il seguente:

(8) Gianni ha passato l'esame o Maria è felice

Se proferisco (8), ciò che sto facendo è impegnarmi a sostenere che *almeno* uno dei due disgiunti è vero (non importa quale, basta che ce ne sia almeno uno che è vero). Ovvero, mi sto impegnando a negare che siano entrambi falsi. Infatti:

Regola semantica per la disgiunzione: La disgiunzione di due proposizioni è vera sse almeno uno dei due disgiunti è vero, falsa altrimenti.

Tavola di verità della disgiunzione:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

La disgiunzione di cui abbiamo appena parlato è la disgiunzione *inclusiva*: p o q o entrambi (la disgiunzione è falsa solo nel caso in cui entrambi i disgiunti sono falsi). C'è però anche la disgiunzione *esclusiva*: p o q ma non entrambi. La disgiunzione esclusiva sarà falsa non solo nel caso in cui entrambi i disgiunti sono falsi, ma anche nel caso in cui sono entrambi veri. Ad esempio, se un investigatore dice "l'assassino è il maggiordomo o l'amante" intendendo che deve essere stato uno di loro, ma non possono essere stati entrambi, quella "o" verrà resa con la disgiunzione esclusiva. Se intende invece lasciare aperta la possibilità che abbiano compiuto il delitto assieme, sarà da intendere come disgiunzione inclusiva.

Esercizio 5:

A. Traducete in simboli i seguenti enunciati, usando le lettere p per "il governo cadrà", e r per "si tornerà a votare" :
1) Il governo cadrà o non cadrà
2) Il governo cadrà e si tornerà a votare
3) Il governo cadrà o non si tornerà a votare
4) Non si dà il caso che il governo cadrà o si tornerà a votare
5) Il governo cadrà, e sicuramente si tornerà a votare o il governo cadrà

B. Costruite la tavola di verità per le formule trovate nell'esercizio A.

C. Esprimendo la disgiunzione esclusiva con il simbolo •, costruite una tavola di verità per p • q.

6. Validità, contraddizione e verità logica

Riprendiamo il concetto di validità, che avevamo visto a livello intuitivo all'inizio. Alcuni argomenti validi che abbiamo visto sopra sono esempi di argomenti validi in virtù della **forma**, ovvero in virtù del rapporto sussistente tra premesse e conclusioni in virtù di certe loro caratteristiche strutturali o appunto formali, come ad esempio i connettivi che vi compaiono. Ciò significa che tutti gli argomenti che hanno la stessa forma di un argomento valido sono argomenti validi. Nei casi più semplici, se un argomento è valido in virtù della forma potrà essere accertato tramite le tavole di verità. Un argomento logicamente valido avrà infatti questa caratteristica:

Validità formale: Un argomento è valido in un determinato sistema formale (per brevità: formalmente valido) sse la congiunzione delle premesse dell'argomento con la negazione della conclusione costituisce una contraddizione logica in quel sistema formale.

Una **contraddizione logica** (per brevità: contraddizione) in logica proposizionale è un enunciato complesso che assume sempre il valore di falso, qualunque valore di verità diamo agli enunciati che lo compongono.

Ad esempio $p \wedge \neg p$ è una contraddizione (come abbiamo visto in un esercizio poco fa). A questa contraddizione corrispondono due argomenti validi, per quanto poco interessanti. Ad esempio

$$\frac{p}{\neg\neg p}$$

Vediamo un caso un po' più interessante. Prendiamo il sillogismo disgiuntivo

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$$

Per verificare la validità congiungiamo le premesse con la negazione della conclusione:
$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$

La tavola di verità di questa formula sarà (possiamo espandere leggermente la nostra regola per la congiunzione, per semplificare il calcolo – una congiunzione di tre enunciati sarà vera quando sono veri tutti e tre gli enunciati, e così ovviamente per numeri ancora maggiori):

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F

F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	F

Per esprimere la relazione di implicazione logica che si ha fra le premesse e la conclusione di un argomento valido possiamo usare il simbolo $\vdash$. Questo è un simbolo del meta-linguaggio, e va distinto dal simbolo del condizionale che studieremo fra poco. Scriviamo ad esempio: $\neg\neg p \vdash p$ per dire che $\neg\neg p$ implica logicamente p.

Alla nozione di contraddizione corrisponde, come suo contrario, quella di verità logica o tautologia. Una **tautologia** è un enunciato complesso che prende il valore vero qualsiasi sia il valore degli enunciati che lo compongono.

Un esempio di tautologia è la formula $p \vee \neg p$. Possiamo indicare che una formula è una tautologia ancora con il simbolo $\vdash$. Es. $\vdash p \vee \neg p$. Non è un caso che usiamo lo stesso simbolo nei due casi. Una tautologia può anche essere definita come una formula che può essere derivata da un insieme vuoto di premesse.

Una tautologia sarà vera, per così dire, indipendentemente da come stanno le cose, o in qualsiasi possibile situazione. La **forma** dell'enunciato da sola ne garantisce la verità. Questo è sembrato ad alcuni significare che le tautologie sono verità particolarmente profonde, e ad altri che sono verità particolarmente vacue e superficiali. Per fortuna non dobbiamo decidere in proposito.

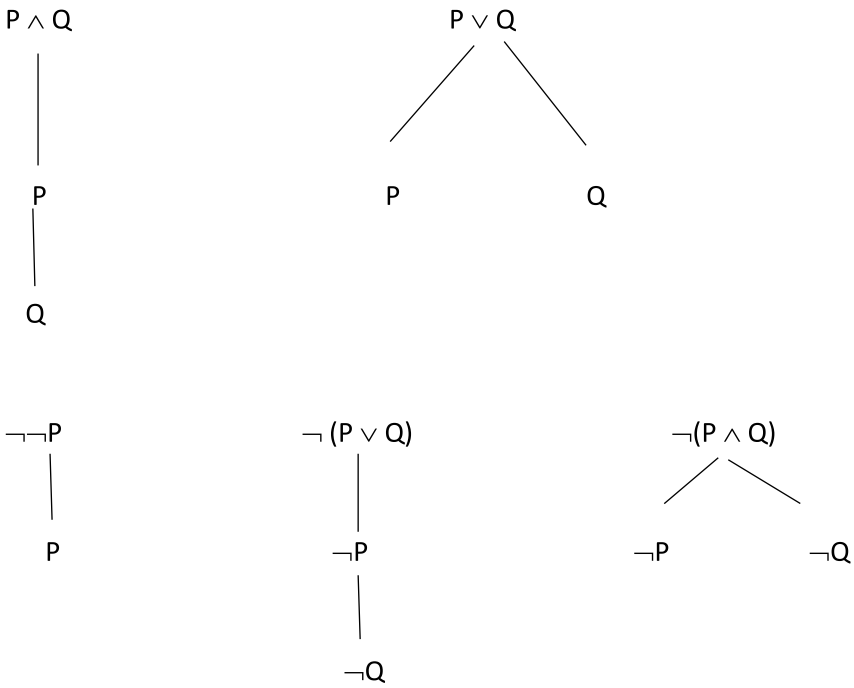
Allo stesso modo, ogniqualvolta abbiamo a che fare con un argomento che ha la stessa **forma** di uno schema di argomento valido, possiamo essere sicuri che tale argomento è valido. Ecco perché parliamo di logica **formale**: per sapere se un argomento è valido non abbiamo bisogno di andare a vedere cosa dicano esattamente le proposizioni coinvolte. Infatti, qualunque sia il contenuto di premesse e conclusioni, se il loro rapporto formale esemplifica uno degli schemi d'argomento valido, allora è certo che l'argomento è valido.

Esercizio 6: Stabilite quali delle formule trovate sono tautologie, contraddizioni, o nessuna delle due cose:

1) $(p \wedge q) \wedge \neg p$
2) $(p \vee q) \wedge \neg p$
3) $p \wedge p$
4) $(p \vee q) \vee \neg(p \vee q)$
5) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
6) $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
7) $p \wedge q \wedge \neg r$

7. Il calcolo con gli alberi di refutazione

Introduciamo ora un metodo di calcolo che rende le cose considerevolmente più semplici rispetto alle tavole di verità. Il metodo viene variamente chiamato degli alberi di refutazione, o degli alberi semantici o alberi (o tavole) di Beth, o ancora dei tableaux o dei tableaux semantici. Le regole che si applicano ai connettivi che abbiamo visto finora sono le seguenti; a partire dalla formula in alto si tracciano dei "rami" che rappresentano la formula può essere vera. I rami nel loro complesso rappresentano tutti i modi, i tipi di situazioni, nei quali la formula può essere vera. Sono incluse due regole per la negazione della congiunzione e la negazione della disgiunzione.



Le lettere maiuscole qua rappresentano formule di qualsiasi complessità, non necessariamente atomiche dunque. Il metodo richiede di applicare le regole successivamente (in qualsiasi ordine) per ciascuna formula che si trova su un "ramo" aperto dell'albero. Dove l'albero si biforca, le formule che appaiono sopra la biforcazione sono parte di entrambi i rami. **Un ramo si chiude quando, e solo quando, lungo di esso compaiono una formula e la sua negazione**. Questo significa che quel ramo non rappresenta una situazione logicamente possibile, e non è necessario continuarlo (questa può anche essere rappresentata come una regola per la negazione). **Se tutti i rami sono chiusi, la**

formula è essa stessa contraddittoria (inconsistente); non rappresenta nessuna situazione logicamente possibile.

Esempio. Prova la contraddittorietà di

$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$

$\neg p$

$\neg q$

$(p \vee q)$

p X q X

Confrontate questo albero con la tavola di verità alla sezione precedente, e la semplificazione sarà visivamente evidente. Il vantaggio del metodo degli alberi cresce in maniera esponenziale con la complessità della formula. Una formula con tre proposizioni atomiche, come $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge r)$, richiede, per essere valutata con le tavole di verità, di calcolare il valore di tutte le sotto-formule per 8 combinazioni di verità delle proposizioni atomiche. Una formula con 4 proposizioni atomiche, presenta 16 combinazioni, e così via. Al contrario, la verifica della loro consistenza può essere rapida con il metodo degli alberi; ad esempio per la formula sopra è estremamente rapida, anche perché la formula non presenta disgiunzioni o altri connettivi che richiedano di aprire nuovi rami dell'albero.

$(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge r)$

$(p \wedge q)$

$(\neg p \wedge r)$

p

q

¬p

X

Se uno dei rami dell’albero rimane aperto, possiamo solo concludere che la formula non è contraddittoria; non sappiamo ancora se è contingente o logicamente vera. Con il metodo degli alberi di refutazione, si verifica che una formula sia logicamente vera mostrando che la sua negazione è una contraddizione.

$\neg(p \vee \neg p)$

$\neg p$

$\neg\neg p$

X

Come abbiamo già detto, si verifica che un argomento è logicamente valido congiungendo le premesse con la negazione della conclusione, e mostrando che il risultato è logicamente impossibile. Una notazione alternativa, che non richiede di passare attraverso la congiunzione, consiste nell’elencare direttamente le premesse e la negazione della conclusione (come apparirebbero se avessimo già applicato la regola della congiunzione). Ad esempio, se le nostre premesse sono $p\vee q$ e $p\vee\neg q$, e la conclusione è p, possiamo formare l’albero che verifica la validità dell’argomento come segue

1) $p\vee q$

2) $p\vee\neg q$

3) $\neg p$

p   q

X   p $\neg q$

X X

Notiamo anche che abbiamo applicato prima la regola della disgiunzione per la prima premessa, e poi la regola della disgiunzione per la seconda premessa sul ramo dell'albero che era rimasto aperto. Avremmo potuto seguire l'ordine inverso arrivando allo stesso risultato (in alcuni casi, può essere praticamente conveniente per semplificare il calcolo applicare prima una regola di un'altra, ad esempio applicando prima quella che non richiede di aprire più rami dell'albero, ma il risultato non cambia). I rami dell'albero si chiudono tutti, mostrando che non c'è una situazione logicamente possibile nella quale sono vere $(p \lor q)$ e $(p \lor \neg q)$ ma non è vero p.

Esercizio 7.

Riprendete le formule dell'esercizio 6 e verificate con il metodo degli alberi di refutazione quali sono contraddittorie. Per quelle non-contradditorie, verificate se la loro negazione è contraddittoria, nel qual caso sono tautologie, o non lo è, nel qual caso sono contingenti. Confrontate i risultati con quelli ottenuti con il metodo delle tavole di verità; se ci sono incongruenze, avete sbagliato qualcosa!

8. Connettivi parte II. Condizionale e bicondizionale

8.1 Condizionale

Per ogni coppia di proposizioni p e q vi è un'altra proposizione che è il *condizionale* di p e q, in simboli $p \to q$ (letto "se p allora q"), dove p è l'*antecedente* del condizionale e q il *conseguente* del condizionale. Un esempio di enunciato condizionale è il seguente:

(C) Se Gianni ha passato l'esame, Maria è felice

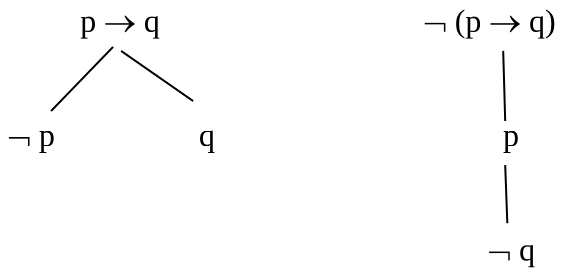
Se proferisco (C), non mi sto impegnando a sostenere che antecedente e conseguente siano entrambi veri, o anche solo a sostenere che uno dei due lo sia: non mi sto impegnando, cioè, a sostenere né che Gianni abbia passato l'esame, né che Maria sia felice. Piuttosto, almeno secondo l'interpretazione che del condizionale si dà in logica, mi sto impegnando ad escludere che Gianni abbia passato l'esame, ma Maria non sia felice.

Regola semantica del condizionale: Il condizionale $p \to q$ (a volte si trova $p \supset q$) è falso sse l'antecedente p è vero e il conseguente q è falso, vero altrimenti.

Tavola di verità del condizionale:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Regole degli alberi per il condizionale.



L’interpretazione del condizionale nelle lingue naturali è un argomento estremamente complesso e ha un grosso ruolo nella storia della logica. Cominciamo da alcune questioni relativamente semplici. I condizionali in italiano e in molte altre lingue possono essere indicativi – come nell’esempio (C) – o controfattuali. Un condizionale controfattuale è il seguente:

(CC) Se Gianni avesse passato l’esame Maria sarebbe felice

I condizionali controfattuali presuppongono solitamente che il loro antecedente sia falso. L’opinione prevalente fra gli studiosi è che essi differiscano in significato dai condizionali indicativi. Noi non ce ne occuperemo.

I termini “antecedente” e “conseguente” possono essere fuorvianti se li intendiamo in senso temporale o ortografico; il conseguente infatti può apparire prima dell’antecedente, come in questi enunciati:

(C1) Sabato vado al concerto, se trovo i biglietti
(C2) Maria sarà felice, se Gianni ha passato l’esame

Si potrebbe pensare che possiamo formulare una norma per cui l’antecedente è sempre quello che segue immediatamente il “se”. Ma non sarebbe esatto. Possiamo dire che però che spesso l’antecedente è quello che segue immediatamente il se, ma questa generalizzazione non vale nei casi in cui compare l’espressione “solo se”. Questa espressione presenta un certo interesse

indipendente, ma ce ne occuperemo parlando del bi-condizionale.
Il condizionale in italiano può anche essere espresso senza usare il "se" in nessun modo. Ad esempio i seguenti enunciati saranno equivalenti a (C1) e (C2)

(C1)* Sabato vado al concerto, purché trovi i biglietti
(C2)* Posto che Gianni abbia passato l'esame, Maria sarà felice

In generale dunque, dobbiamo cercare di individuare antecedente e conseguente riflettendo sul significato dell'enunciato.

8.1.1 Pregi e difetti del condizionale materiale dal punto di vista della rappresentazione del linguaggio naturale

Quello che qua chiamiamo 'condizionale' è spesso indicato come "condizionale materiale" (e a volte "condizionale filoniano", dal nome del primo a proporre questa interpretazione del condizionale, il filosofo Filone di Megara). Il condizionale materiale, come si può vedere sopra, esclude un solo caso, quello in cui il suo antecedente è vero e il conseguente è falso. Negli altri casi il condizionale è vero. Dunque in particolare è sufficiente che il conseguente sia vero, o l'antecedente falso, perché il condizionale sia vero. Questo fa sorgere alcuni problemi. Se interpretassimo il "se..allora" del nostro linguaggio comune filonianamente, alcuni enunciati bislacchi sarebbero veri. Prendiamo il caso in cui l'antecedente è falso. Ad esempio, sia p la proposizione (falsa) che l'Italia ha più abitanti della Germania, e q la proposizione che la Terra è piatta: $p \rightarrow q$ sarà vero. Oppure prendiamo un caso in cui il conseguente è vero. Sia p la proposizione che il mondo sta per finire, e q la proposizione (vera) che domani ci sarà il sole; $p \rightarrow q$ sarà ancora vero.

Vari argomenti sono stati offerti per difendere il condizionale materiale. Ci sono casi in cui è sorprendentemente intuitivo. Ad esempio, a volte affermiamo un condizionale per affermare enfaticamente la falsità del suo antecedente, come nella frase "Se Matteo è innocente, allora io sono Brad Pitt". Per rendere conto invece dei casi in cui il condizionale materiale dà risultati bizzarri, si fa a volte appello alla distinzione fra semantica e **pragmatica**. La pragmatica è la disciplina che studia le condizioni di appropriatezza degli atti linguistici, come l'asserzione di un enunciato; le condizioni di verità di un enunciato non sono sufficienti a stabilire quando è appropriato pragmaticamente asserirlo. Anche assumendo che un enunciato falso non vada mai asserito, non è sufficiente che un enunciato sia vero perché sia appropriato asserirlo, esso deve anche essere un contributo significativo nel contesto della comunicazione. Per esempio, tornando al condizionale, il filosofo inglese Grice notava come si possa in generale attendersi che abbia poco senso affermare un condizionale a meno che non siamo incerti sul valore di verità dell'antecedente e del conseguente; altrimenti sarebbe più semplice e più informativo asserire direttamente questi.

Nonostante l'ingegnosa difesa di Grice, l'opinione prevalente (ma non universalmente accettata) oggi fra gli studiosi di semantica è che il condizionale dell'italiano e delle altre lingue naturali non sia reso adeguatamente dal condizionale materiale, e da nessun altro connettivo vero-funzionale; esso indicherebbe piuttosto una relazione fra le due proposizioni che dipende dal loro contenuto, e non solo dal loro valore di verità nella situazione attuale. In particolare, molti pensano che dobbiamo guardare al valore di verità degli enunciati in varie situazioni possibili. Questo significa che per studiare il condizionale dovremmo ricorrere alla logica modale, la logica che si occupa del modo – tipicamente, possibile, contingente, necessario – in cui gli enunciati sono veri. La logica modale presuppone però uno studio preliminare della logica che trattiamo qua.

8.1.2 Vantaggi logici del condizionale materiale

Quello che c'interessa qua non è che il condizionale materiale sia una rappresentazione fedele del condizionale nelle lingue naturali. Se anche non funziona da quel punto di vista, esso può rivelarsi adeguato dal punto di vista della logica e della teoria dell'argomentazione. Ad esempio, il condizionale materiale rende valide queste forme di argomento:

Modus (ponendo) ponens

1) $p \rightarrow q$
2) p

---

3) q

Modus (tollendo) tollens

1) $p \rightarrow q$
2) $\neg q$

---

3) $\neg p$

Sillogismo ipotetico

1) $p \rightarrow q$
2) $q \rightarrow r$

---

3) $p \rightarrow r$

Invece sono invalidi i seguenti argomenti, che costituiscono comuni fallacie, ovvero argomenti invalidi che si confondono comunemente con argomenti validi (il nome deriva dalla seconda premessa):

Affermazione del conseguente

1) $p \rightarrow q$
2) q

---

3) p

Negazione dell'antecedente

1) $p \rightarrow q$
2) $\neg p$

---

3) $\neg q$

Inoltre, il condizionale materiale ha un'interessante relazione con le nozioni di implicazione e verità logica. Un condizionale $p \rightarrow q$ è una verità logica esattamente quando p implica logicamente q (abbiamo $\vdash (p \rightarrow q)$ se e solo se $p \vdash q$). Questo è noto anche come teorema di deduzione. Abbiamo perciò un ulteriore criterio, equivalente a quello spiegato nella sezione 6, per definire (e calcolare) la validità formale: un argomento è formalmente valido esattamente quando il condizionale che ha per antecedente la congiunzione delle sue premesse e per conseguente la sua conclusione è una tautologia.

Esercizio 8.

A. Traducete i seguenti enunciati in notazione simbolica, usando le lettere p, q, r ed s rispettivamente per le proposizioni espresse dagli enunciati "Pina andrà alla festa", "qualcuno andrà alla festa", "Rino andrà alla festa" e "Samuele andrà alla festa".

1. Se qualcuno andrà alla festa, Pina ci andrà.
2. Se Pina andrà alla festa, qualcuno ci andrà
3. Se Rino e Samuele andranno alla festa, qualcuno ci andrà
4. Pina andrà alla festa, se qualcuno ci andrà
5. Se Rino andrà alla festa, allora non ci andrà Samuele
6. Se Pina non andrà alla festa, allora non ci andrà neanche Rino
7. Se Pina andrà alla festa, allora almeno uno fra Rino e Samuele andrà
8. Se né Rino né Samuele andranno alla festa, allora se qualcuno andrà alla festa, Pina ci andrà.
9. Rino andrà alla festa, a patto che Pina ci vada
10. Pina andrà alla festa, purché uno fra Samuele e Rino ci vada.

B. Mostrate, usando gli alberi di refutazione, quali di queste formule sono contraddizioni, tautologie, o nessuna delle due cose (se volete un aiuto vedete sotto*)

1. $(p \rightarrow s) \wedge s$*
2. $(p \wedge s) \rightarrow p$
3. $p \rightarrow (p \vee s)$
4. $(p \rightarrow s) \vee (p \rightarrow \neg s)$
5. $(p \rightarrow s) \wedge p \wedge \neg s$
6. $(p \wedge \neg p) \rightarrow s$
7. $p \rightarrow p$
8. $p \rightarrow s \wedge (s \wedge \neg p)$*
9. $((p \rightarrow s) \wedge p) \rightarrow s$
10. $((p \rightarrow s) \wedge \neg s) \rightarrow \neg p$

C. Mostrate, usando gli alberi di refutazione, la validità delle forme di argomentazione *modus ponens, mudus tollens,* e sillogismo ipotetico.

D. Lo psicologo Peter C. Wason ha ideato una serie di esperimenti ormai classici sul ragionamento condizionale. In uno di questi, il soggetto ha davanti quattro carte, di cui sa che ciascuna ha un numero su un lato e una lettera sull'altro. Le quattro carte mostrano questi lati "4, 7, R, A". Il soggetto deve verificare, girando il minor numero possibile di carte, se vale il seguente condizionale: "se una carta ha un numero dispari su un lato, allora ha una vocale sull'altro". Cercate la risposta a questa domanda, e cercate di associare le risposte errate alla fallacia dell'affermazione del conseguente o a quella della negazione dell'antecedente.

*Nell'esercizio B le formule con asterisco sono contingenti. Delle altre 8, solo una è una contraddizione.

8.2 Bicondizionale

Per ogni coppia di proposizioni p e q vi è un'altra proposizione che è il *bicondizionale* di p e q, in simboli $p \leftrightarrow q$, dove p è il *lato sinistro*, q il *lato destro* del bicondizionale.

(BC) Gianni andrà al mare se e solo se ci sarà il sole

Proferire (BC) significa impegnarsi a sostenere che le due proposizioni espresse dagli enunciati "Gianni andrà al mare" e "ci sarà il sole" hanno lo stesso valore di verità. Equivalentemente, proferire (BC) significa impegnarsi ad escludere il caso in cui Gianni vada al mare e non ci sia il sole, e il caso in cui Gianni non vada al mare e ci sia il sole. Infatti:

Regola semantica del bicondizionale: $p \leftrightarrow q$ è vero sse p e q hanno lo stesso valore di verità, falso altrimenti.

Tavola di verità del bicondizionale:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Alberi di verità per il bicondizionale

Avevamo lasciato da parte nella sezione precedente, l'espressione "solo se", che ritroviamo nell'enunciato (BC), assieme al primo "se". Possiamo ricavare il significato del "solo se" ragionando su quello che aggiunge rispetto al primo. Supponiamo di dire

(BC1) Gianni andrà al mare se ci sarà il sole

A questo punto dovremmo sapere che BC1 dice la stessa cosa di "se ci sarà il sole, Gianni andrà al mare", e cioè ci dice solo che non si darà il caso che ci sia il sole e Gianni non vada al mare. Ma non esclude il caso che non ci sia il sole e Gianni vada comunque al mare. Questo è invece escluso da:

(BC2) Gianni andrà al mare solo se ci sarà il sole

Quindi BC2, ripetiamo, esclude il caso in cui Gianni va al mare ma non c'è il sole. Ma allora BC2 dice la stessa cosa di "se Gianni andrà al mare, allora ci sarà il sole" (ecco perché in questo caso è il conseguente ad apparire subito dopo il "se"). In generale, questo ragionamento mostra che il bi-condizionale $p \leftrightarrow q$ dice la stessa cosa della congiunzione dei due condizionali $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$. Questo può essere constatato facilmente (o almeno più facilmente che seguendo il ragionamento appena svolto) confrontando le tavole di verità.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Abbiamo detto sopra che il condizionale ha una interessante relazione con le nozioni di implicazione logica e tautologia. Il bicondizionale, come prevedibile, ha lo stesso tipo di relazione. Un bicondizionale è una tautologia esattamente quando ciascun lato implica logicamente l'altro; in questo caso possiamo anche dire che le due formule sono **logicamente equivalenti**.

Esercizio 9.

A. (da Varzi, Nolt e Rohatyn, *Logica* (2ª ed.), McGraw Hill, 2007) Formalizzare le asserzioni seguenti nel linguaggio della logica proposizionale usando le lettere s, d ed a rispettivamente per gli enunciati "Oggi è sabato", "Oggi è domenica", e "Oggi i negozi sono aperti".

1) Se oggi è sabato, allora non è domenica e i negozi sono aperti.
2) Se i negozi non sono aperti, allora oggi è domenica.
3) Oggi i negozi sono aperti solo se non è domenica.
4) Oggi non è né sabato né domenica.
5) Oggi è domenica, ma i negozi sono aperti.
6) Oggi non è domenica, ma i negozi sono chiusi.
7) Oggi i negozi sono aperti, purché non sia domenica.
8) È domenica se e solo se i negozi non sono aperti.
9) I negozi sono chiusi se e solo se è o sabato o domenica.
10) O è sabato e i negozi sono aperti, oppure è domenica e i negozi sono chiusi, ma non si dà il caso che sia sabato e i negozi chiusi.

B. Mostrate usando gli alberi di refutazione che le seguenti formule sono tautologie:

1. $p \leftrightarrow \neg\neg p$
2. $p \leftrightarrow (p \wedge s) \vee (p \wedge \neg s)$
3. $(p \vee s) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow s)$
4. $(p \rightarrow s) \leftrightarrow (\neg p \vee s)$
5. $p \rightarrow (s \rightarrow (p \wedge s))$
6. $p \rightarrow ((p \rightarrow s) \rightarrow s)$
7. $(p \leftrightarrow s) \leftrightarrow ((p \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg s))$

8. $(p \leftrightarrow s) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg s)$
9. $(p \leftrightarrow s) \leftrightarrow ((p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow p))$
10. $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg (p \vee \neg p)$

C. Interpretando la lettera p come la proposizione espressa dall'enunciato "Il popolo ama Cesare" e la lettera r come la proposizione espressa dall'enunciato "La repubblica deve essere superata dall'impero", traducete in italiano le seguenti formule:
1. $p \rightarrow r$
2. $p \leftrightarrow r$
3. $\neg p \wedge \neg r$
4. $p \wedge (p \rightarrow r)$
5. $\neg p \rightarrow \neg r$
6. $r \vee \neg r$
7. $\neg(p \wedge r)$
8. $\neg(r \vee p)$
9. $(p \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow r$

D. Valutate la validità dei seguenti argomenti

1. Se la borsa sale, allora l'economia non sta andando male. L'economia sta andando male, ma la borsa sale. Dunque gli asini volano
2. Se i contagi salgono, salirà anche il numero dei morti. O rispettiamo le misure di prevenzione, o i contagi saliranno. Quindi, se non rispettiamo le misure di prevenzione, salirà il numero dei morti
3. Se Dio è onnisciente, Dio sa tutto ciò che faremo. Se Dio sa cosa faremo, non abbiamo il libero arbitrio. Se Dio è buono, allora abbiamo il libero arbitrio. Dunque Dio non è sia buono che onnisciente.
4. La squadra vincerà solo se l'allenatore cambia schema. Se giochiamo contro una squadra debole, l'allenatore non cambierà schema. Se giochiamo contro una squadra forte, l'allenatore cambierà schema. Perciò se giochiamo contro una squadra forte vinceremo.
5. Il colpevole è il maggiordomo o il figlio della vittima. Le impronte ritrovate sull'arma sono di entrambi. Se fosse stato il maggiordomo, non avremmo trovato le sue impronte sull'arma. Dunque il colpevole è il figlio.

9. Logica predicativa. Il linguaggio

La parte della logica formale di cui ci siamo occupati finora è chiamata logica **proposizionale**. La logica proposizionale studia quelle condizioni di validità di argomenti che dipendono dal rapporto sussistente tra le proposizioni che formano premesse e conclusioni.

La logica proposizionale non è però sufficiente per gli scopi della logica formale, che mira a individuare le condizioni di validità di qualsiasi tipo di argomento. Considerate, infatti, il seguente argomento (a cui ci riferiremo di qui in poi come "argomento di Fido"):

(1) Tutti i cani sono belli

<u>(2) Fido è un cane</u>

(3) Fido è bello

Se volessimo formalizzare l'argomento di Fido con gli strumenti della logica proposizionale, al fine di controllarne la validità, tutto ciò che riusciremmo ad ottenere sarebbe:

(1) p

<u>(2) q</u>

(3) r

Con una tale formalizzazione, è chiaro che non faremmo molta strada: tra p, q ed r non emerge alcun legame che possa parlare a favore della validità dell'argomento in questione.

Ciò di cui abbiamo bisogno per formalizzare un argomento come quello di Fido è un metodo per riuscire ad "entrare" nella struttura interna delle proposizioni: un metodo, cioè, che ci consenta di tradurre a livello logico anche le parti delle proposizioni. L'argomento di Fido infatti è valido in virtù del rapporto sussistente tra le varie parti delle proposizioni che compongono premesse e conclusioni: "cane" ricorre sia in (1) che in (2); "Fido" ricorre nella premessa (2) e nella conclusione; "bello" nella premessa (1) e nella conclusione. Inoltre, nella prima premessa abbiamo la parola "tutti", mentre nella seconda premessa e nella conclusione abbiamo a che fare con un cane particolare, Fido. Quella parte della logica formale che ci permette di analizzare il tipo di struttura interna degli enunciati, e quindi di formalizzare un argomento come quello di Fido, è la logica **predicativa** (a volte anche chiamata logica "del primo ordine"). La logica predicativa si occupa allora di studiare le condizioni di validità di argomenti che sono validi in virtù del tipo di struttura interna degli enunciati che compongono premesse e conclusioni.

9.1 Nota storica

Il primo pensatore della storia occidentale a prendere la logica come oggetto di studio in quanto tale fu Aristotele. Aristotele prese proprio argomenti come l'argomento di Fido come oggetto di studio primario; questo tipo di argomento è anche chiamato **sillogismo**.[2] La logica aristotelica è dunque una logica predicativa- Aristotele elaborò una serie di principi con i quali

[2] Il termine greco che traduciamo *sillogismo* in realtà significava semplicemente "ragionamento"; questo uso più ampio sopravvive anche per il termine moderno. Per questo abbiamo visto che possiamo usare il termine "sillogismo" anche per forme di argomento che non sono "sillogismi" in senso stretto, come il sillogismo ipotetico o il sillogismo disgiuntivo.

distinguere i sillogismi validi da quelli invalidi. Ma tali principi riguardavano appunto solo gli argomenti di tipo sillogistico, che dipendono per la loro validità dal rapporto fra i termini che compaiono nelle diverse premesse. I principi aristotelici non potevano spiegare la validità di forme di argomento che abbiamo visto finora, come *modus ponens*, *modus tollens*, etc. I filosofi della scuola stoica, a cominciare dal già menzionato Crisippo (280-207 A.C.), elaborarono una logica proposizionale. Ma con una logica proposizionale, come abbiamo visto, non si riesce a rendere conto della validità dei sillogismi. Gli stoici e i seguaci di Aristotele consideravano i propri approcci alla logica come rivali e incompatibili. A prevalere fu l'approccio aristotelico, e la logica proposizionale degli stoici venne prevalentemente trascurata, fino al XIX sec. Il passo decisivo fu fatto dal grande logico e filosofo tedesco Gottlob Frege, che mostrò come si potessero combinare armoniosamente logica predicativa e logica proposizionale. Infatti nel sistema di logica predicativa che studieremo, che è nella sostanza, anche se non nella notazione, quello ideato da Frege, tutti i principi di logica proposizionale che abbiamo studiato restano validi, e anzi spesso servono a spiegare la validità di argomenti espressi in logica predicativa.

9.2 Predicati e costanti individuali.

Per cominciare a entrare, come si è detto, nella struttura di un enunciato, introduciamo due tipi di nuovi simboli

COSTANTI INDIVIDUALI : l'esempio tipico di una costante individuale in italiano sono i nomi. Indichiamo questi con lettere minuscole (come quelle con cui indicavamo prima gli enunciati); a, b, c..

PREDICATI : in questa categoria rientreranno termini italiani che designano proprietà degli individui, come "essere rosso", "avere i capelli biondi", "correre" ma anche quelli che indicano relazioni, come "essere più alto di" "colpire", "amare (qualcuno)" . Esprimeremo questi con lettere Maiuscole: C, F, P etc.

Dunque ad esempio possiamo tradurre un enunciato come "Fido è un cane" usando la lettera f come costante individuale per Fido e la lettera C per il predicato essere un cane, come segue: Cf. Se invece vogliamo tradurre Giovanni è più alto di Antonio dobbiamo introdurre i nomi g ed a come costanti individuali, e il predicato relazionale A, e scriveremo A(g, a) – notate che l'ordine in cui appaiono le costanti non è irrilevante.

Come dicevamo prima, le regole della logica proposizionale continueranno a valere, e in particolare possiamo continuare ad usare i nostri simboli per i connettivi. Se dunque introduciamo un nuovo nome, a (ad esempio per "Antonio"), possiamo scrivere $Cf \wedge \neg Ca$ per tradurre "Fido è un cane e Antonio non è un cane". Questa congiunzione implicherà logicamente ciascuno dei due congiunti.

Fin qua non abbiamo però fatto progressi nell'analisi del sillogismo costituito dall'argomento di Fido. Ora il problema è come tradurre "tutti i cani"; se lo traduciamo con una costante individuale, continuiamo a non avere una spiegazione della validità dell'argomento. Ma la funzione di questa espressione non è neanche quella di un predicato.

Uno dei fondamentali contributi di Frege è l'introduzione della nozione di **quantificatore**, che risolverà questo problema.

9.3 Quantificatori

Vediamo anzitutto quali espressioni italiane possiamo tradurre come quantificatori.

QUANTIFICATORI: parole come "ogni", "tutti", "qualche", "alcuni", "nessuno"

Inoltre, distinguiamo tra:

QUANTIFICATORE UNIVERSALE: "tutti", "ogni", "ciascuno", "qualsiasi".. Si usa il simbolo $\forall$

e

QUANTIFICATORE ESISTENZIALE: "alcuni", "qualche", "certi", "degli", "un"... Si usa il simbolo $\exists$

Vediamo ora come tradurre queste espressioni nel linguaggio della logica predicativa. Cominciamo dal quantificatore universale. Considerate l'enunciato:

(9) Tutti i cani sono belli

Dire che tutti i cani sono belli equivale a dire che tutti gli oggetti che hanno una certa proprietà (la proprietà di essere un cane) hanno anche un'altra proprietà, ovvero la proprietà di essere belli. In logica, cioè, dire che tutti i cani sono belli equivale a dire che:

(9') Per tutti gli oggetti x, se x è un cane, allora x è bello

Per esprimere questo in simboli (posto che C = essere cane e B = essere bello), abbiamo dovuto introdurre un nuovo tipo di simbolo, la **variabile**. La variabile non è una costante individuale, ma tiene il posto, per così dire di una. Se dobbiamo cercare un corrispettivo nelle lingue naturali, la variabile funziona un po' come un pronome (lui, lei, questo..). Esprimiamo le variabili, per distinguerle dalle costanti individuali, con una lettera minuscolo in corsivo (è consuetudine partire dalla x: *x*, *y*, *z*..). Dunque (9) diventa

(9'') $\forall x \mathrm{C}x \rightarrow \mathrm{B}x$

Il simbolo $\forall$, come detto, esprime il quantificatore universale. (9'') si legge "Per ogni x (o per tutti gli x) se C di x allora B di x". Un enunciato universalmente quantificato come (9) sarà vero sse è vero che tutti gli oggetti x che hanno la proprietà di essere un cane, hanno anche la proprietà di essere belli, falso altrimenti (se c'è anche un solo cane che non è bello, (9) è falso). A questo punto si può già intuire come la nostra analisi renderà valido l'argomento di Fido. La prima premessa dice vale per qualsiasi cosa che, se quella cosa è un cane, allora è bella. Dunque varrà in particolare per Fido, che, se Fido è un cane, allora è bello. La seconda premessa ci dice appunto che Fido è un cane. Possiamo dunque procedere per *modus ponens* alla conclusione. Vedremo tutto ciò molto più approfonditamente elaborando un sistema di calcolo per la logica predicativa più avanti.

Una conseguenza contro-intuitiva di questa traduzione è che l'enunciato risulta vero anche se non esistono cani; (9) non implicherebbe dunque l'esistenza di cani. Anche se avrebbe poco senso affermare (9) in una situazione in cui non ci fossero cani, esso sarebbe comunque vero.

Vediamo ora il quantificatore esistenziale. Considerate un enunciato come:

(10) Qualche cane è bello

Dire che qualche cane è bello equivale a dire, nell'interpretazione che priviligeremo, che c'è *almeno un* oggetto che ha sia la proprietà di essere un cane, sia la proprietà di essere bello. In logica, cioè, dire che qualche cane è bello equivale a dire che:

(10') Per qualche oggetto x, x è un cane e x è bello

In simboli:

(10'') $\exists x \mathrm{C}x \wedge \mathrm{B}x$

Il simbolo $\exists$ esprime appunto il quantificatore esistenziale; (10'') si legge "per qualche x, C di x e B di x", o anche "esiste un x tale che C di x e B di x". Un enunciato esistenzialmente quantificato come (10) sarà vero sse esiste almeno un oggetto che ha sia la proprietà di essere cane che la proprietà di essere bello, falso altrimenti: sarà vero, cioè, sse esistono uno o più oggetti che hanno entrambe le proprietà, falso se non esiste alcun oggetto che abbia entrambe le proprietà.

Notiamo l'importanza di usare il connettivo appropriato. Se cercassimo di tradurre "alcuni cani sono belli” usando il condizionale, come “$\exists x \mathrm{C}x \rightarrow \mathrm{B}x$”, staremmo dicendo che esiste qualcosa che, se è un cane, allora è bello. Dato il significato del condizionale materiale, questo sarebbe automaticamente vero se non esistesse nessun cane. Per cui questo tipo di traduzione renderebbe automaticamente vero un enunciato come “alcuni zombie sono belli”. Peggio ancora sarebbe cercare di rendere una frase come “tutti i cani sono belli” usando la congiunzione. Se scrivessimo infatti “$\forall x \mathrm{C}x \wedge \mathrm{B}x$” staremmo dicendo che ogni cosa nell’universo è un cane ed è bella. In connessione a questa ultima osservazione, va chiarito che se queste traduzioni funzionano per gli enunciati della logica aristotelica, i quantificatori possono essere seguiti da qualsiasi connettivo, o anche da nessun connettivo. Ad esempio, se voglio esprimere il pensiero che ogni cosa è bella, basterà scrivere “$\forall x\ \mathrm{B}x$” e per dire che esistono cose belle “$\exists x\ \mathrm{B}x$”. Se invece voglio dire che ogni cosa è bella o è brutta, usando la lettera R per “brutto”, scriverò “$\forall x \mathrm{B}x \vee \mathrm{R}x$” e per dire che alcune cose sono sia belle che brutte “$\exists x \mathrm{B}x \wedge \mathrm{R}x$”. E così via.

Notate anche che gli enunciati (9’’) e (10’’) sono enunciati semplici, nonostante le apparenze. Infatti le formule a destra dei quantificatori, pur comprendendo dei connettivi non sono né contengono enunciati. Sarebbero enunciati (complessi) se alle variabili sostituissimo delle costanti. Così come sono, essi dipendono dal quantificatore per la loro interpretazione. Possiamo anche esprimere questo dicendo che la formula $\mathrm{C}x \rightarrow \mathrm{B}x$ in $\forall x \mathrm{C}x \rightarrow \mathrm{B}x$ è nell’**ambito** del quantificatore. Si dice anche che la variabile è **vincolata** dal quantificatore. Senza un quantificatore davanti la variabile è invece **libera**; ma la libertà in questo caso impedisce alla variabile di prendere la strada di un significato determinato. La formula in cui la variabile è libera non dice niente di alcuna cosa, non è una formula ben formata.

Nella logica aristotelica, “tutti i cani sono belli” e “alcuni cani sono belli” erano comunque enunciati semplici, della forma soggetto-predicato. Nella logica fregeana, non hanno più la forma soggetto-predicato, ma restano enunciati semplici perché il quantificatore opera su entrambi i predicati al tempo stesso; esso esprime, si può dire, una relazione fra l’insieme dei cani e l’insieme delle cose belle. Ma le due relazioni espresse sono diverse. Il quantificatore universale esprime un rapporto di inclusione: l’insieme dei cani è incluso nell’insieme delle cose belle; niente può essere un cane senza essere anche bello. Il quantificatore esistenziale esprime una intersezione. Ci sono cose che stanno sia nell’insieme dei cani che in quello delle cose belle (ne segue anche che “alcuni C sono B” implica “alcuni B sono C” mentre “Tutti i C sono B” non implica “Tutti i B sono C”; in termini di logica aristotelica la particolare affermativa, ma non la universale affermativa, è equivalente alla sua conversa).

Notiamo infine che i due quantificatori sono interdefinibili, come segue

$\forall x \mathrm{F}x$ sse $\neg\exists x \neg \mathrm{F}x$

$\exists x Fx$ sse $\neg\forall x\neg Fx$

Ad esempio, è intuitivo che “tutti amano i cani” e “nessuno non ama i cani” saranno equivalenti, e così “qualcuno ama i cani” e “non tutti non amano i cani”.

Esercizio 10. Traducete nel linguaggio della logica predicativa i seguenti enunciati, usando le lettere poste fra parentesi per costanti e predicati
1) Maria è bella (m, B)
2) Maria è bella e Giovanni non è bello (m, g, B)
3) Alcune cose non sono belle (B)
4) Tutto è perfetto se è bello (P, B)
5) Tutte le cose belle sono perfette (P, B)
6) Gli amici di Daniele sono tutti belli (d, A, B) [suggerimento: A è un predicato relazionale]
7) Dio ha creato ogni cosa (d, C) [come sopra, C è un predicato relazionale)
8) Se Dio ha creato ogni cosa, allora Dio ha creato Napoli (d, n, C)
9) Non tutti sono amici di Daniele (d, A)
10) Alcuni amici di Daniele sono bizzarri (d, A, B)

9.4 Alcune interessanti ambiguità

Vediamo ora alcuni casi in cui compaiono diversi quantificatori in un solo enunciato. Cominciamo con un caso relativamente semplice, pur trattandosi di un enunciato complesso

(11) Alcuni greci fumano e alcuni italiani fumano

Renderemo (11) come segue, usando G per “essere greco”, I per “essere italiano” e F per “fumare”

(11’) $\exists x(Gx \wedge Fx) \wedge \exists x(Ix \wedge Fx)$

Notate che le variabili nei due congiunti possono essere espresse dalla stessa lettera la stessa proprio perché i due congiunti sono enunciati indipendenti. Non si dice che le persone di cui parla un congiunto siano le stesse di cui parla l’altro (né che siano diverse).

Vediamo invece un caso in cui abbiamo bisogno più di una variabile.

(12) Alcuni greci amano tutti gli italiani

Renderemo (11) come segue, usando A per “amare”

(12') $\exists x(Gx \wedge (\forall y\ (Iy \rightarrow A(xy))$

Come negli esempi sopra, nonostante le apparenze, (12') è un enunciato semplice. Infatti $(Gx \wedge (\forall y\ (Iy \rightarrow A(xy))$ è nell'ambito del quantificatore. Nei casi in cui ci sono diversi quantificatori, non sempre è chiaro quale sia il quantificatore principale, quello nel cui ambito l'altro è compreso. In questi casi, l'enunciato è sintatticamente ambiguo. Vediamo un esempio

(13) Tutti gli esseri umani hanno un sogno

Possiamo immaginare due significati di (13); uno è quello in cui si dice che abbiamo tutti uno stesso sogno. Un altro è quello in cui si dice che ciascuno ha un qualche sogno, ma non intendiamo dire che sia lo stesso per tutti. Se usiamo U per "essere umano", A per "avere" e S per "essere un sogno", vediamo che la traduzione di (13) nel linguaggio della logica predicativa ci costringe a distinguere le due interpretazioni:

(13a) $\exists x\ (Sx \wedge \forall \mathrm{y} \mathrm{U}y \rightarrow A(yx))$
(13b) $\forall \mathrm{x}(Ux \rightarrow \exists y(Sy \wedge A(xy))$

(13a) dice che c'è un particolare x che è un sogno e tutti gli esseri umani lo hanno, mentre (13b) dice che per ciascun essere umano c'è un qualche x che è un sogno che quell'essere umano ha. La lettura nella quale il quantificatore esistenziale appare prima, e dunque prende l'ambito più ampio, è detta a volte *de re*; l'altra lettura è detta *de dicto*.

Esercizio 11.
A. (da Varzi, Nolt e Rohatyn, *Logica* (2ª ed.), McGraw Hill, 2007): Formalizzare le asserzioni seguenti nel linguaggio della logica predicativa usando l'interpretazione indicata.

Simbolo Interpretazione
m Marta
g Gianni
O è all'ospedale (predicato a un posto)
V è andato/a in vacanza (predicato a un posto)
A è amico/a di (predicato a due posti)

(1) Marta e Gianni sono andati in vacanza.
(2) Marta è all'ospedale, ma Gianni è andato in vacanza.
(3) Marta è all'ospedale, ma tutti i suoi amici sono andati in vacanza.
(4) Tutti gli amici di Marta che non sono all'ospedale sono andati in vacanza.
(5) Gli amici di Marta sono in vacanza ma quelli di Gianni sono tutti all'ospedale.

(6) Ogni amico di Marta che è andato in vacanza ha un amico che è all’ospedale.
(7) Marta ha degli amici all’ospedale i cui amici sono anche amici di Gianni.
(8) Gianni ha degli amici che non sono amici di Marta.
(9) Gianni non ha amici che non siano anche amici di Marta.
(10) Nessuno degli amici di Gianni è amico di Marta.
(11) Gianni e Marta hanno un amico in comune che si trova all’ospedale.
(12) Marta ha degli amici in vacanza che sono all’ospedale.
(13) Tutti gli amici di Marta hanno un amico in comune con Gianni.
(14) Tutti gli amici di Marta hanno un amico in comune con un amico di Gianni.
(15) Tutti gli amici di Marta che sono all’ospedale hanno un amico in comune con qualche amico di Gianni che si trova in vacanza.

B. Trovate le due letture dei seguenti enunciati e formalizzatele usando le lettere predicative fra parentesi. Se una delle due letture è più plausibile, indicatela.
1) Tutte le difficoltà sono create da qualcosa (D, C)
2) Ogni marinaio ama una ragazza bruna (M, A, R, B)
3) Qualcuno è amico di tutti (A)
4) Ogni rivoluzione è ispirata da un sogno (R, I, S)
5) Un cane è il miglior amico di ogni uomo (C, A, U)

9.5 Identità

Aggiungiamo ora al nostro linguaggio un ulteriore simbolo, che esprime l’uguaglianza, o identità. Considerate il seguente enunciato

(14) Anita Raja è Elena Ferrante

In (14) compaiono due costanti individuali, ma nessun predicato, nel senso almeno nel quale abbiamo parlato qua di predicati. Quello che l’enunciato ci dice, in un certo senso, è che i due nomi si riferiscono alla stessa persona. Non diciamo di due persone che sono simili, come due gemelli (questo è un senso di “uguaglianza” o “identità”), ma che vi è una sola persona; si parla in questo caso di identità *numerica*. Usando le costanti individuali a ed e, possiamo formalizzare dunque (14) come segue

(14’) $a=e$

Che sarà vero se e solo Elena Ferrante è, appunto, Anita Raja. In generale, un enunciato della forma $a=b$ è vero sse a e b si riferiscono allo stesso individuo.

Si potrebbe pensare che i contesti nei quali abbiamo bisogno di usare l’identità per formalizzare un enunciato siano comunque limitati. Ma consideriamo il caso seguente

(15) Sergio Mattarella è il presidente della repubblica

Se usiamo la costante s come nome di Sergio Mattarella e il predicato P per essere presidente della repubblica, potremmo pensare di formalizzare 15 come "Ps". Ma questo non è sufficiente, perché pur dicendo che s ha la proprietà P, è compatibile con la presenza di molti altri individui che hanno quella proprietà; ci dice, in altre parole, che Sergio Mattarella è un presidente della repubblica, non che è il presidente della repubblica. Se vogliamo che l'unicità presupposta dall'articolo determinativo sia espressa dalla nostra formalizzazione, possiamo ricorrere ad esempio a quanto segue:

(15') $\mathrm{Ps} \wedge \forall x \mathrm{P}x \rightarrow x = \mathrm{s}$

Questa formula ci dice che Sergio Mattarella è un presidente della repubblica, e ogni cosa che sia presidente della repubblica è identica a lui. Può sembrare convoluto, ma questo equivale a dire che Mattarella è il solo presidente della repubblica.

Se la formalizzazione dell'enunciato (15) ci ha mostrato come esprimere tramite i quantificatori l'esistenza di esattamente un individuo che possiede una certa caratteristica, con un metodo analogo, aumentando la complessità, si può esprimere l'esistenza di un numero arbitrario di individui. Ad esempio consideriamo

(16) Ci sono due forze fondamentali

Usando la lettera predicativa F per il predicato "essere una forza fondamentale", avremo

(16') $\exists x \exists y \mathrm{F}x \wedge \mathrm{F}y \wedge \neg x = y \wedge \forall z \mathrm{F}z \rightarrow (z = x \vee z = y)$

La formalizzazione dice che esistono un x ed un y tali che x e y sono F, x e y sono distinti, e qualsiasi cosa sia F è identica a x o è identica a y. Anche in questo caso, la traduzione può sembrare convoluta. Ma è filosoficamente interessante. Il principale scopo per il quale Frege ha pensato la logica predicativa era la riduzione della matematica alla logica, che avrebbe, nelle sue intenzioni, superato il punto di vista kantiano sulla matematica. La posizione di Frege era molto più complessa di questa osservazione, ma (16') esprime il contenuto di (16) pur non contenendo alcun termine che indichi il numero 2, ma solo termini logici e predicati. Si può vedere qua dunque in forma embrionale una piccola parte del progetto, straordinariamente ambizioso dal punto di vista sia tecnico che concettuale, di riduzione del linguaggio matematico al linguaggio logico.

Esercizio 12.
A. Considerate la seguente formula, che dice che ci sono esattamente due F. Eliminando parti della formula, trovate la formula che dice che ci sono *almeno* due F, e quella che dice che ci sono *al massimo* due F
$\exists x\exists y \mathrm{F}x\wedge \mathrm{F}y\wedge\neg x=y\wedge\forall z \mathrm{F}z\rightarrow(z=x\vee z=y)$

B. Traducete i seguenti enunciati nel linguaggio della logica predicativa con identità

1. Il dottor Jekyll è Mr Hyde (j, h)
2. Solo il dottor Jekyll può sconfiggere Mr Hyde (P per "può sconfiggere")
3. Tutti gli amici del dottor Jekyll sono amici di Mr Hyde (A)
4. Il dottor Jekyll ha alcuni amici, Mr Hyde nessuno
5. Solo chi conosce il dottor Jekyll conosce Mr Hyde (C)
6. L'unico che conosce il dottor Jekyll è Mr Hyde

10. Logica predicativa. Calcolo

Dobbiamo ora estendere le regole che abbiamo usato per formare gli alberi di refutazione in logica proposizionale alla logica predicativa. Notiamo anzitutto che queste regole continuano a valere. Ad esempio, supponiamo di voler valutare la validità del seguente argomento:

$\mathrm{Fa}, \mathrm{Fa} \rightarrow\exists x\mathrm{F}x \vdash \exists x\mathrm{F}x$

Le regole della logica proposizionale saranno in questo caso sufficienti. Infatti l'albero di refutazione che comprende le premesse e la negazione della conclusione si presenterà come segue:

Fa

$\mathrm{Fa} \rightarrow\exists x\mathrm{F}x$

$\neg \exists x\mathrm{F}x$

$\neg\mathrm{Fa}$ $\exists x\mathrm{F}x$

X   X

Ma nella maggior parte dei casi avremo bisogno appunto di integrare le regole che già conosciamo con delle regole specifiche per i quantificatori. Ad esempio il condizionale $\mathrm{Fa} \rightarrow\exists x\mathrm{F}x$ costituisce una verità logica, ma questo non è dimostrabile con la sola regola del condizionale.

Cominciamo dal quantificatore universale. La regola ci dice di sostituire alla formula in cui esso appare una formula priva di tale quantificatore (a meno che non vi siano altri quantificatori universali nell'ambito del primo) nella quale la variabile che è associata ad esso viene sostituita in ogni sua occorrenza con una singola costante a nostra scelta. Intuitivamente, quello che facciamo è esemplificare la x, sostituendola con una costante. Ad esempio, se la nostra affermazione è che ogni cosa è stata creata da Dio, prendiamo una cosa qualsiasi, che abbia un nome, e diciamo che essa è stata creata da Dio. Dunque, ad esempio, la formula $\forall x \mathrm{C}x,\mathrm{d}$ verrà seguita nell'albero da Ca,d; la formula $\forall x \mathrm{C}x \rightarrow \mathrm{B}x$ verrà seguita nell'albero da Ca→Ba; la formula $\forall x \exists \mathrm{y}(x=y)$ verrà seguita da $\exists y(\mathrm{a}=y)$, e così via (nell'ultimo caso, notiamo, la variabile y non viene esemplificata perché è nell'ambito del secondo quantificatore). Per esprimere l'idea in maniera più generale introduciamo una meta-variabile Φ che sta per una formula di complessità arbitraria; Φx starà per una formula in cui compare la variabile *x* (in una o più occorrenze). Allora la regola sarà espressa come segue:

Se abbiamo nell'albero una formula della forma $\forall x \Phi x$ si deve inserire in ogni ramo aperto che discende da essa Φa, dove Φa è il risultato della sostituzione uniforme di *x* con una costante arbitraria a in Φ.

La regola può essere facilmente visualizzata come segue:

$\forall x \Phi x$
|
$\Phi \mathrm{a}$

Vediamo un esempio della sua applicazione. Supponiamo di voler valutare il seguente argomento:
Tutti gli italiani sono pigri
Daniele è italiano
dunque
Daniele è pigro
La formalizzazione sarà la seguente: $\forall x \mathrm{I}x \rightarrow \mathrm{P}x$, Id $\vdash$ Pd
L'albero di refutazione può essere rappresentato come segue

1. $\forall x \mathrm{I}x \rightarrow \mathrm{P}x$
2. Id
3. ¬Pd

Id→Pd (1)

¬Id Pd

X X

La formula Id→Pd è ricavata per esemplificazione di 1. L'albero si chiude, mostrando la validità dell'argomento.

Prima di vedere la regola del quantificatore esistenziale, notiamo che la regola del quantificatore esistenziale negato è ricavabile da quella del quantificatore universale. Infatti una formula della forma $\neg\exists x\Phi x$ è equivalente ad una della forma $\forall x\neg\Phi x$. Dunque la regola per il quantificatore esistenziale negato, in breve, è la seguente. **Esemplificare $\neg\exists x\Phi x$ con una formula della forma $\neg\Phi$a**, che possiamo visualizzare cosi:

$\neg\exists x\Phi x$

|

$\neg\Phi$a

Quindi ad esempio da $\neg\exists x\mathrm{F}x\wedge\mathrm{G}x$ discenderà $\neg(\mathrm{Fa}\wedge\mathrm{Ga})$; e così via. Abbiamo accennato sopra al fatto che non potevamo dimostrare la verità logica di $\mathrm{Fa}\rightarrow\exists x\mathrm{F}x$ con la sola regola del condizionale. Ora siamo in grado invece di farlo. Mostriamo la contraddittorietà della negazione del condizionale attraverso l'albero di refutazione:

$\neg(\mathrm{Fa}\rightarrow\exists x\mathrm{F}x)$

|

Fa

|

$\neg\exists x\mathrm{F}x$

|

$\neg$ Fa

X

La negazione di Fa è ricavata per esemplificazione tramite la regola del quantificatore esistenziale negato.

Il quantificatore esistenziale, senza negazione, ha invece una regola che è solo apparentemente simile a quella del quantificatore universale. Anche in questo caso, possiamo parlare di esemplificazione, e anche in questo caso, sostituiremo la variabile che dipende dal quantificatore con una costante individuale, in un certo senso arbitraria. Ma la nostra scelta di una costante in questo caso dev'essere limitata. Si deve trattare infatti di una costante nuova, che non appariva precedentemente nell'albero. Intuitivamente, quando esemplifichiamo un esistenziale, noi sappiamo che esiste un qualche oggetto che rende la formula vera, ma non sappiamo quale, e perciò non possiamo assumere che si tratti di uno di quelli di cui stavamo già parlando. Usando ancora la meta-variabile Φ, possiamo dunque esprimere la regola come segue

Se abbiamo nell'albero una formula della forma $\exists x\Phi x$ si deve inserire in ogni ramo aperto che discende da essa Φa, dove Φa è il risultato della sostituzione uniforme di *x* con una costante arbitraria a in Φ che non appare in alcuna formula dell'albero dalla quale Φ discende.

La regola può essere facilmente visualizzata come segue:

$\exists x\Phi x$

Φa Per a non *precedentemente* usato nell'albero

Vediamo un esempio più complesso dei precedenti, considerando il seguente sillogismo, per dimostrare la cui validità si devono usare le tre regole di esemplificazione che abbiamo introdotto fin qua:

Tutte le donne sono coraggiose
Alcuni italiani sono donne
Dunque
Alcuni italiani sono coraggiosi

La formalizzazione sarà

$\forall x Dx \rightarrow Cx,\ \exists x Ix \wedge Dx \vdash \exists x Ix \wedge Cx$

L'albero di refutazione sarà il seguente:

1 $\forall x Dx \rightarrow Cx$

2. $\exists x Ix \wedge Dx$

3. $\neg \exists x Ix \wedge Cx$

4. $Ia \wedge Da$ (2)

5. $Da \rightarrow Ca$ (1)

6. $\neg (Ia \wedge Ca)$ (3)

Ia (4)

Da (4)

¬Da   Ca   (5)

X   ¬ Ia   ¬Ca (6)

X   X

Notiamo che si è scelto di esemplificare prima il quantificatore esistenziale, in modo che la costante individuale scelta fosse poi disponibile per l'esemplificazione del quantificatore universale e del quantificatore esistenziale negato, che possono prendere appunto anche costanti già usate nella prova per la loro esemplificazione.

Vediamo ora la regola del quantificatore universale negato. Così come la regola per il quantificatore esistenziale negato è ricavabile da quella del quantificatore universale, la regola del quantificatore universale negato è ricavabile da quella del quantificatore esistenziale. Infatti le formule della forma $\neg\forall x\Phi x$ sono equivalenti a quelle della forma $\exists x\neg\Phi x$. Dunque la regola ci dirà di **esemplificare $\neg\forall x\Phi x$ con una formula della forma ¬Φa, con una costante a che non appare in alcuna formula dalla quale $\neg\forall x\Phi x$ discende nell'albero**.

$\neg\forall x\Phi x$

¬Φa Per a non precedentemente usato nell'albero

Vediamo un esempio nel quale si usano sia la regola del quantificatore universale che quella del quantificatore universale negato:

Tutte le donne sono mortali

Tutte le italiane sono donne

Dunque

Tutte le italiane sono mortali

La formalizzazione sarà

$\forall x Dx\rightarrow Mx$, $\forall x Ix\rightarrow Dx \vdash \forall x Ix\rightarrow Mx$

L'albero di refutazione si avvierà come segue:

1 $\forall x Dx\rightarrow Mx$

2 $\forall x Ix\rightarrow Dx$

3¬ $\forall x Ix\rightarrow Mx$

¬ (Ia→Ma)   (3)

$$\begin{array}{ll} Da \rightarrow Ma & (1) \\ | & \\ Ia \rightarrow Da & (2) \end{array}$$

A questo punto si potrà completare l'albero usando le sole regole della logica proposizionale e verificare che ogni ramo dell'albero è chiuso, dunque l'argomento è valido. Notiamo che conviene esemplificare prima la quantificazione universale negata, in maniera che la costante individuale scelta sia poi utilizzabile per l'esemplificazione dei quantificatori universali, mentre l'opposto sarebbe scorretto.

Introduciamo infine la regola del segno di identità per gli alberi di refutazione. Cominciamo in questo caso dalla identità negata. L'idea incorporata da tale regola è che sia una verità logica che ogni cosa è identica a se stessa. Dire di qualcosa che non è identico a se stesso, pertanto, è una contraddizione. Come a livello proposizionale il ramo di un albero viene chiuso quando vi appaiono una formula e la sua negazione, pertanto, così il ramo si chiuderà quando vi appare la negazione dell'identità di un oggetto con se stesso: **una formula della forma ¬ a=a chiude il ramo sul quale appare**:

$$\begin{array}{c} \neg\, a=a \\ X \end{array}$$

Vediamo come questa regola ci permette di dimostrare appunto che ogni cosa è identica a se stessa. Tale affermazione può essere espressa come $\forall x(x=x)$. Per mostrare che una verità logica, mostriamo che la sua negazione è contraddittoria

$$\begin{array}{c} \neg\forall x(x=x) \\ | \\ \neg(a=a) \\ X \end{array}$$

La regola che invece si applica a un'affermazione di identità non negata incorpora l'idea che due nomi che si riferiscono ad uno stesso oggetto sono sempre sostituibili l'uno all'altro. Se a=b, qualsiasi cosa possiamo dire di a la possiamo dire anche di b, e viceversa (questo potrebbe anche essere visto come derivante dal principio leibniziano dell'indiscernibilità degli identici). Per esprimere la regola, abbiamo bisogno di considerare dunque anche un'altra formula in cui appare una delle costanti, in qualsiasi posizione e in qualsiasi numero di occorrenze; ricorriamo dunque ancora alla meta-variabile Φ, e scriviamo Φa per indicare una formula in cui appare la costante a.

Dunque la regola sarà: **Se abbiamo su un ramo una formula della forma a=b e una della forma Φa, scriviamo sotto Φb, ovvero la formula che risulta dalla sostituzione della costante a con la costante b in Φa in ogni sua occorrenza.**

La regola può essere rappresentata visivamente come segue:

a=b
Φa
|
Φb

Vediamo l'applicazione di questa regola, ad esempio, nel dimostrare che l'identità è simmetrica: se a=b, allora b=a. La formalizzazione di questa tesi sarà $\forall x \forall y\ (x=y) \rightarrow (y=x)$. Come al solito mostriamo che la negazione di questa formula è contraddittoria

1. $\neg\forall x\forall y\ (x=y)\rightarrow(y=x)$
2. $\neg\forall x(x=a)\rightarrow(a=x)$
3. $\neg(b=a\rightarrow a=b)$
4. b=a
5. ¬a=b
6. ¬a=a [da 4 e 5]

X

Esercizio 13.

A. Verificate quali di queste formule sono tautologie, contraddizioni o nessuna delle due, usando gli alberi di refutazione
1. $\forall x\ (Fx \wedge Gx) \rightarrow (Fx \vee Gx)$
2. $\forall x\ (Fx \vee Gx) \rightarrow (Fx \wedge Gx)$
3. $\forall x\ (Fx \vee \neg Fx)$
4. $\exists x\ (Fx \wedge \neg Fx)$
5. $\forall x \exists y (y=x)$
6. $\forall x\ \neg(Fx \wedge \neg Fx)$
7. $(Fa \wedge a=b) \rightarrow Fb$
8. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x\ (\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$
9. $\exists x\ (Fx \wedge Gx) \wedge \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$

10. $(\forall x(Fx \lor Gx) \land \neg Ga) \rightarrow Fa$
11. $\exists x(Fx \land Gx) \rightarrow \neg \forall x \neg Fx$
12. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x(Fx \land Gx)$
13. $(\forall x(Fx \rightarrow Gx) \land \exists x Fx) \rightarrow \exists x(Fx \land Gx)$

B. Formalizzate i seguenti enunciati in logica predicativa e valutate se sono tautologie, contraddizioni o nessuna delle due, usando gli alberi di refutazione

1. Tutto quello che è alto e non alto è anche basso
2. Chi ama tutti ama anche se stesso
3. Alcuni uomini sono cattivi, ma altri non lo sono
4. Se tutti hanno un amico, allora tutti sono amici di tutti
5. Se gli amici dei miei amici sono miei amici, allora ho degli amici
6. Se Dio ha creato ogni cosa, Dio ha creato se stesso
7. Se Dio ha creato ogni cosa, qualcosa è stato creato da Dio
8. Alcuni uomini sono cattivi e non sono cattivi
9. Se Bud Spencer è Carlo Pedersoli, allora se Bud Spencer è stato un attore Carlo Pedersoli è stato un attore
10. Se Bud Spencer è Carlo Pedersoli, allora chi conosce Bud Spencer conosce Carlo Pedersoli
11. O tutti amano Bud Spencer, o nessuno lo ama
12. Tutti amano Bud Spencer o non lo amano
13. O qualcuno ama Bud Spencer o nessuno lo ama
14. C'è un barbiere che rade tutti e solo quelli che non radono se stessi

C. Quelle che seguono sono, espresse schematicamente, alcune delle forme di sillogismo riconosciute valide nella logica aristotelica. Stabilite se sono forme di argomento valide anche nella nostra logica predicativa

1. Ogni S è M; ogni L è S; dunque ogni L è M [Barbara]
2. Nessun M è L; ogni S è M; dunque nessun S è L [Celarent]
3. Ogni M è L; alcuni S sono M; dunque alcuni S sono L [Darii]
4. Nessun M è L; alcuni S sono M; dunque alcuni S non sono L [Ferio]
5. Nessun L è M; ogni S è M; dunque nessun S è L [Cesare]
6. Ogni L è M; nessun S è M; dunque nessun S è L [Camestres]
7. Nessun L è M; alcuni S sono M; dunque alcuni S non sono L [Festino]
8. Ogni L è M; qualche S non è M; dunque qualche S non è L [Baroco]
9. Ogni M è L; ogni M è S; dunque alcuni S sono L [Darapti]
10. Nessun M è L; ogni M è S; dunque alcuni S non sono L [Felapton]
11. Alcuni M sono L; Ogni M è S; dunque alcuni S sono L [Disamis]
12. Ogni M è L; alcuni M sono S; dunque alcuni S sono L [Datisi]
13. Alcuni M non sono L; ogni M è S; dunque alcuni S non sono L [Bocardo]

D. Formalizzate le seguenti argomentazioni e mostratene la validità

1. Niente di coerente mi sorprende. Questo corso mi sorprende. Perciò questo corso è incoerente
2. Giorgio odia tutti quelli che odiano Maria. Maria odia tutti. Perciò Giorgio e Maria si odiano a vicenda
3. Una persona è famosa solo se tutti la conoscono. Perciò tutte le persone famose si conoscono a vicenda
4. A Giorgio piacciono tutti quelli a cui piacciono tutte le persone che piacciono a lui. Perciò a Giorgio piace qualcuno

5. Tutti i cattolici hanno paura dei socialisti, e i socialisti hanno paura solo dei comunisti. Perciò ogni socialista cattolico è comunista
6. Tutti sospettano qualcuno, e nessuno sospetta se stesso. Perciò ognuno sospetta qualcun altro
7. Federer ha giocato nel torneo, e ha vinto. Fognini ha giocato nel torneo, ma non ha vinto. Perciò almeno due persone hanno giocato nel torneo.
8. Un centometrista è più veloce di chiunque in questa classe. Poiché nessuno in questa classe è più veloce di se stesso, nessuno in questa classe è un centometrista.
9. Le tartarughe sono rettili e non sono carnivore. I coccodrilli sono rettili e sono carnivori. Esistono tartarughe e coccodrilli. Perciò alcuni rettili sono carnivori e altri no.
10. Una persona umile non ammira se stessa. Perciò chi ammira tutte le persone umili non è umile.
11. Tutti hanno paura di Mr. Hyde, e Mr. Hyde ha paura solo del dottor Jekyll. Perciò il dottor Jekyll è Mr. Hyde
12. C'è un barbiere che rade se stesso se e solo se non rade se stesso. Perciò esiste un Dio.

E. Un predicato a due posti esprime una relazione. Alcune relazioni hanno proprietà interessanti dal punto di vista logico-matematico, che possiamo codificare nel linguaggio della logica predicativa. Ad esempio:
R è riflessiva: $\forall x \mathrm{R}xx$ (esempio: essere alto tanto quanto)
R è simmetrica: $\forall x\forall y \mathrm{R}xy\rightarrow \mathrm{R}yx$ (esempio; essere fratello di)
R è irriflessiva: $\forall x\neg \mathrm{R}xx$ (esempio: essere più alto di)
R è asimmetrica: $\forall x\forall y \mathrm{R}xy\rightarrow\neg \mathrm{R}yx$ (esempio: essere madre di)
R è transitiva: $\forall x\forall y\forall z(\mathrm{R}xy \wedge \mathrm{R}yz)\rightarrow \mathrm{R}xz$ (esempio: essere più alto di)
Sapendo questo, mostrate che

1. è logicamente possibile che esistano relazioni né riflessive né irriflessive
2. è logicamente possibile che esistano relazioni né simmetriche né asimmetriche
3. Se una relazione è asimmetrica è anche irriflessiva
4. Se una relazione è transitiva e irriflessiva è anche asimmetrica
5. è logicamente possibile che esistano relazioni transitive, simmetriche, ma non riflessive