UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

A.A.2020-2021

CORSO DI LAUREA in ARCHITETTURA QUINQUENNALE, 3° ANNO

INSEGNAMENTO DI FISICA TECNICA AMBIENTALE– PROFF. L.BELLIA E B.I.PALELLA

CAP. 5a

Introduzione ai meccanismi di scambio termico

CAP. 5b

La conduzione

NAPOLI, MARZO 2021

Capitolo quinto (a)
Introduzione alla trasmissione del calore

5.1.a I meccanismi di scambio termico

Due sistemi a differente temperatura hanno possibilità di scambiare energia sotto forma di calore. All'interno di un sistema il calore fluisce spontaneamente dalla regione a temperatura maggiore verso quella a temperatura minore. Nello studio della trasmissione del calore si possono distinguere tre differenti meccanismi: *conduzione, irraggiamento* e *convezione*.

Nella **conduzione** il trasferimento di energia termica avviene tra corpi posti a diretto contatto o tra zone dello stesso corpo a temperature diverse. La legge fondamentale che governa questo meccanismo è la legge di Fourier. La forma integrale più semplice, riportata nella (4.1) nella quale si particolarizza tale legge, è quella relativa al caso di una parete piana come quella mostrata in fig. 4.1

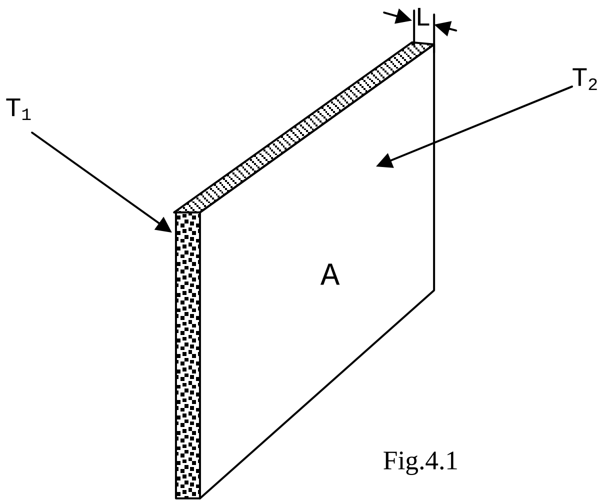


Fig.4.1

$$\dot{Q}_k = \frac{\lambda A}{L}(T_1 - T_2) \qquad (4.1)$$

dove $\dot{Q}_k$ è la potenza termica trasmessa per conduzione, misurata in watt, λ è la conduttività termica del materiale espressa in W/mK, *A* è l'area della superficie misurata in m^2 attraverso cui fluisce $\dot{Q}_k$, T_1 e T_2 sono le temperature, misurate in kelvin, delle superfici esterne della parete.

L'**irraggiamento** è un meccanismo di scambio termico che consente il trasferimento di energia tra due corpi a differenti temperature non in contatto fisico tra loro. Lo scambio di energia termica per irraggiamento avviene anche se tra i due corpi c'è il vuoto. La legge fondamentale che regola il meccanismo radiativo è la legge di Stefan-Boltzmann relativa ad un modello di radiatore ideale che viene detto *corpo nero* e del quale ci si occuperà nel seguito nello studio della Trasmissione del calore. Nella Fig. 4.2a sono rappresentate due superfici piane parallele che debbono immaginarsi indefinite, a differente temperatura, e le loro intersezioni con un piano perpendicolare ad entrambe (Fig. 4.2b). In questo semplice caso in cui le due superfici siano nere di uguale area A [m^2] con differenti temperature T_1 e T_2 [K], dalla legge di Stefan-Boltzmann si ha:

$$\dot{Q}_i = A\sigma(T_1^4 - T_2^4) \qquad (4.2)$$

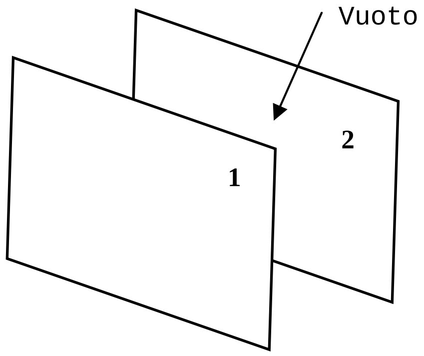


Fig. 4.2a

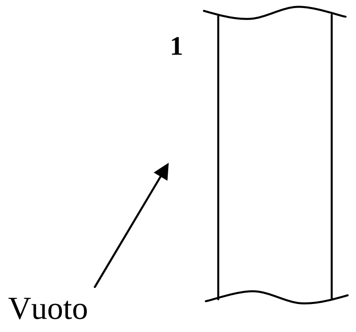


Fig.4.2b

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann [W/m^2K^4] .

La **convezione** è quel meccanismo di trasporto di energia tra un fluido ed una superficie solida, a diverse temperature. Associato al trasporto di energia termica è presente anche un trasporto di materia. In un sistema come quello mostrato in Fig.4.3 è possibile valutare la potenza termica trasferita da una superficie solida, alla temperatura T_s [K], ad un fluido a contatto con essa ed alla temperatura T_f [K] inferiore a T_s attraverso la legge di Newton:

$$Q_c = A\, h_c\, (T_1 - T_2) \qquad (4.3)$$

dove h_c è la conduttanza unitaria convettiva misurata in W/m^2K ed A è l'area della superficie di interazione misurata in m^2.

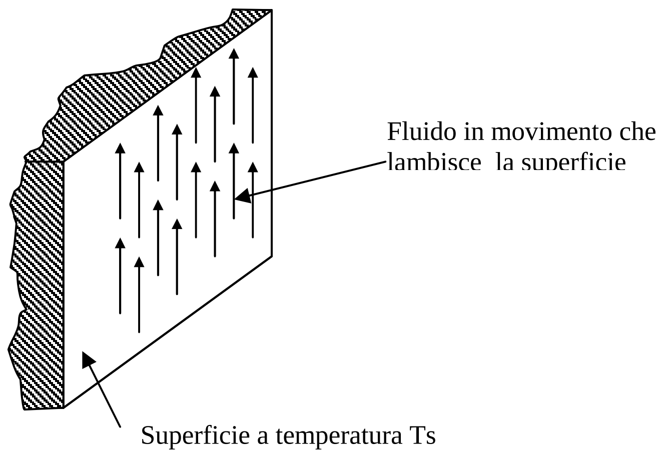


Fig. 4.3

Nello scambio per convezione il coefficiente h_c dipende in maniera complessa, a seconda del regime di moto, dalla geometria del sistema, sia per quanto riguarda le dimensioni della parete che la sua giacitura, e dalle proprietà termofluidodinamiche del fluido.

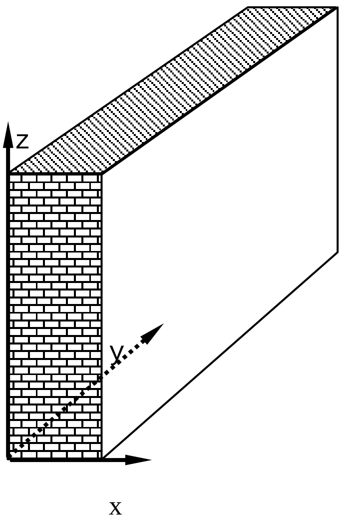
Nel seguito i tre meccanismi fondamentali della trasmissione del calore saranno, per una maggiore chiarezza, trattati separatamente. Anche se nelle applicazioni pratiche spesso uno dei meccanismi è predominante rispetto agli altri che possono talvolta essere trascurati, a rigore essi sono, nella maggior parte delle applicazioni, presenti contemporaneamente: si parla pertanto di scambio termico per *meccanismi combinati*.

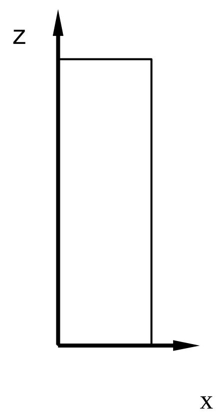
Capitolo quinto (b)

La conduzione

5.1b Introduzione

Il meccanismo conduttivo fa riferimento al trasferimento di energia termica in un mezzo o tra più mezzi in contatto fisico, unicamente a causa di una non uniforme distribuzione della temperatura nel mezzo o tra i mezzi posti a contatto. L'interpretazione del fenomeno a livello microscopico vede la conduzione come uno scambio di energia cinetica tra molecole poste in regioni a differente temperatura: tale scambio può attribuirsi principalmente agli urti elastici di molecole nei gas e nei liquidi, al moto degli elettroni liberi nei solidi metallici ed alle vibrazioni degli aggregati molecolari nei solidi non conduttori.
La parete in muratura mostrata in Fig. 5.1. rappresenta una geometria che verrà presa in considerazione nel seguito per lo studio dello scambio termico tra edificio ed ambiente esterno. Se si definisce superficie isoterma il luogo di punti aventi lo stesso valore di temperatura, le superfici 1 e 2 possono considerarsi con buona approssimazione isoterme. Se poi si fa l'ipotesi che la superficie 1 sia a temperatura più elevata della superficie 2, in accordo con l'evidenza sperimentale si può affermare che il calore fluirà spontaneamente dalla superficie 1 verso la 2 nella direzione dell'asse x, perpendicolare alle superfici isoterme.





Sezione della parete con piano perpendicolare all’asse y

Fig. 5.1

Si definisce *flusso termico* $\dot{q}_x$ l'energia termica trasmessa nell'unità di tempo attraverso una superficie isoterma di area unitaria [W/m^2] in direzione ad essa perpendicolare. Il flusso termico è un vettore avente direzione ortogonale alle superfici isoterme e verso che va dalla temperatura più elevata a quella più bassa.
La legge fondamentale della conduzione, legge di Fourier, afferma che il flusso termico è proporzionale alla derivata della temperatura valutata nella direzione perpendicolare alla superficie isoterma, ovvero che $\dot{q}_x$ è proporzionale al gradiente $\frac{\partial T}{\partial x}$ della temperatura lungo la direzione ortogonale alle superfici isoterme:

$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (5.1)$$

La presenza della derivata parziale indica che la temperatura, nel sistema che si sta esaminando, può variare nel tempo e nello spazio.

Nella relazione (5.1) $\dot{q}_x$ è diretto nel verso delle temperature decrescenti; se ad esempio è diretto in modo concorde all'asse x, ossia nel verso delle x crescenti, lungo tale asse le T risulteranno decrescenti e pertanto $\partial T < 0$ e $\partial x > 0$. Quindi il rapporto $\frac{\partial T}{\partial x}$ assume un valore negativo. E' pertanto necessario un segno negativo al secondo membro della (5.1) per ottenere un flusso $\dot{q}_x$ positivo, ossia concorde con il verso dell'asse x.

La costante di proporzionalità λ tra il flusso termico ed il gradiente di temperatura, è detta *conduttività termica*, ed è una proprietà fisica del materiale. Essa rappresenta il flusso termico relativo ad un gradiente unitario. Dalla (5.1) è possibile ricavare le unità di misura della conduttività termica. Infatti esplicitando λ si ha:

$$\lambda = -\dot{q}_x \cdot \frac{\partial x}{\partial T}$$

- nel ***Sistema Internazionale (SI)***

esprimendo $\dot{q}_x$ in $\frac{W}{m^2}$

∂x in m

∂T in kelvin

l'unità di misura di risulterà:

$$\frac{W}{m^2} \cdot \frac{m}{K} = \frac{W}{mK}$$

nel ***Sistema Tecnico (ST):***

esprimendo $\dot{q}_x$ in $\frac{kcal}{hm^2}$

∂x in m

∂T in kelvin

l'unità di misura di risulterà:

$$\frac{kcal}{hm^2} \cdot \frac{m}{K} = \frac{kcal}{hmK}$$

Si osservi che l'unità di misura della differenza di temperatura, che al denominatore compare espressa in kelvin (K), per quanto detto in precedenza sulla conversione dei gradi Celsius (°C) in kelvin (K), può essere espressa utilizzando una qualsiasi delle due unità senza che il valore di λ cambi.

In Tab. 5.1 sono riportati gli ordini di grandezza della conduttività termica per differenti stati di aggregazione della materia.

In Tab.5.2 vengono riportati i valori della conduttività termica di alcuni materiali molti diffusi.

Tab.5. 1 - Ordini di grandezza della conduttività per diversi stati di aggregazione

Stato di aggregazione	Conduttività
	(W/mK)
Aeriforme	10^{-2}-10^{-1}
Liquido	10^{-1}-10
Solidi non metallici	1-10
Solidi metallici	10-10^{2}

Tab. 5.2 - Valori della conduttività termica di alcuni materiali a 273 K.

Materiale	Conduttività
	W/mK
Solidi metallici	
argento	418
rame	387
alluminio	203
zinco	113
ferro	73
Solidi non metallici	
Quarzo	19
monossido di magnesio	42
marmo	3
vetro pyrex	1
Liquidi	
Mercurio	8
Acqua	5
Freon, Ca_2F_2	0,07
Gas	
Idrogeno	0,18
Elio	0,14
Aria	0,024

Sperimentalmente si riscontrano le seguenti proprietà:

a) i materiali a struttura cristallina, metallici o non, conducono il calore meglio di quelli amorfi;
b) nei materiali cristallini e in tutti gli altri a struttura orientata (ovvero i materiali fibrosi come il legno) la conduttività termica assume valori differenti a seconda della direzione strutturale del materiale, caratteristica tipica dei materiali anisotropi;
c) le impurità chimiche nel reticolo cristallino riducono il valore della conducibilità termica rispetto allo stesso materiale allo stato puro: i metalli puri hanno, pertanto, una conduttività maggiore di quella delle leghe metalliche;
d) i materiali in fase solida hanno una conduttività maggiore dei loro corrispettivi in fase liquida (il ghiaccio conduce meglio che l'acqua liquida);
e) le sostanze in fase aeriforme sono meno conduttive delle corrispettive in fase liquida.

E' da osservare che la conduttività termica è funzione della temperatura. Tuttavia, nelle applicazioni in cui le escursioni termiche non sono elevate, tale dipendenza può trascurarsi, adottando, per un determinato materiale, un opportuno valore medio. Va inoltre evidenziato che la conduttività termica è anche funzione della massa volumica (densità) del materiale: per tale motivo in Appendice B “Proprietà termofisiche dei materiali” i valori di λ vengono riportati tenendo conto di questa dipendenza. Anche se nel seguito della trattazione si farà riferimento a solidi omogenei ed isotropi (e cioè con proprietà termofisiche uguali in tutto lo spazio ed indipendenti dalle direzioni) si deve tener conto che i valori riportati nelle tabelle sono comunque valori medi. Non è infatti possibile pensare che una muratura perimetrale di un edificio sia realizzata con materiale omogeneo ed isotropo: si pensi soltanto alla presenza del legante, costituito diversamente a seconda del tipo di mattone usato, che ha certamente caratteristiche fisiche diverse dal materiale che costituisce gli stessi mattoni. Pertanto il valore di λ sarà sempre un valore medio che tiene conto della disomogeneità del materiale scelto.

Prima di proseguire nelle valutazioni quantitative sul meccanismo di scambio termico conduttivo va introdotta qualche informazione ulteriore sul modello semplificato cui si farà riferimento.

Nell'edilizia, in particolare con riferimento alle strutture verticali ed orizzontali quali le pareti perimetrali i solai di copertura e di calpestio, ci si trova a studiare sistemi che hanno una dimensione molto più piccola delle altre due. Nei moderni edifici le pareti perimetrali di un ambiente hanno in genere uno spessore che può variare tra alcuni centimetri a qualche decina di centimetri mentre l'altezza e la larghezza sono dell'ordine dei metri. Nella Fig. 5.1 è rappresentata una situazione vicina a quella cui ora si fa riferimento: la dimensione relativa all'asse x è molto inferiore rispetto alle altre due lungo gli assi y e z. In tali condizioni si può assumere con buona approssimazione, come già detto con riferimento alla stessa Fig.5.1, che le superfici limite della parete siano isoterme e che il flusso sia diretto nella direzione perpendicolare ad esse e nel verso che va dalla temperatura più elevata verso quella più bassa.

Se inoltre le temperature che caratterizzano ciascuna superficie isoterma restano costanti nel tempo si dice che il sistema è a regime stazionario. Tale ulteriore semplificazione equivale a dire che in ciascun punto della parete non si avrà, nel tempo, una variazione del valore di temperatura, ossia che la distribuzione delle temperature rimane invariata nel tempo.

Una ulteriore ipotesi semplificativa consente di considerare la conduttività λ indipendente dalla temperatura, il che, a rigore, non si verifica. Tuttavia facendo riferimento alle applicazioni che interessano l'edilizia ed alla maggior parte dei materiali impiegati in questo settore ai fini degli errori di calcolo indotti, l'ipotesi risulta accettabile.

Infine, si supporrà che non siano presenti all'interno del sistema generazioni di energia.

Riepilogando, lo studio della conduzione si effettua assumendo le seguenti ipotesi:

1. sistemi caratterizzati da geometrie piane in cui una delle dimensioni risulti molto inferiore alle altre due;
2. materiali omogenei ed isotropi;
3. conduttività termica λ indipendente dalla temperatura;
4. regime stazionario;
5. assenza di generazioni di energia all'interno del sistema;
6. flusso termico monodimensionale.

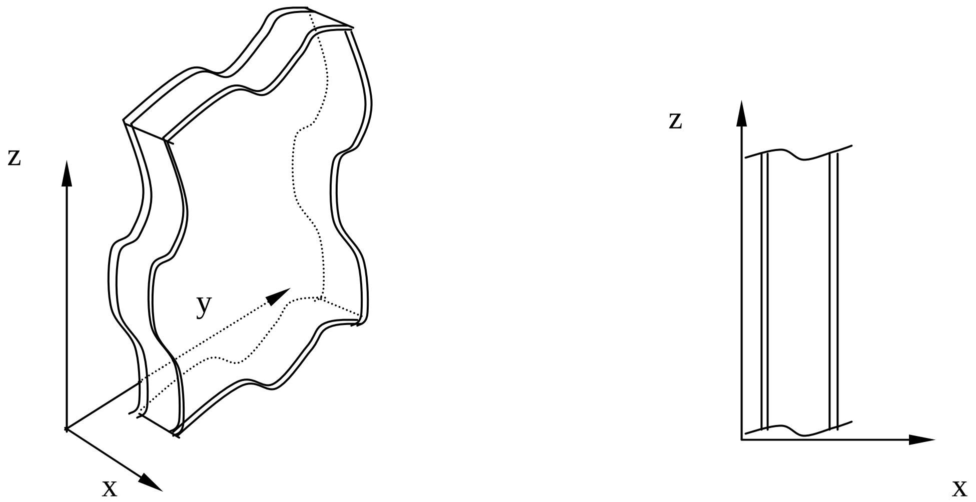
Ciò consente di riscrivere la (5.1) nella seguente forma:

$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad (5.2)$$

in cui la presenza dalla derivata totale conferma la dipendenza della temperatura dalla solo ascissa x, in base alle ipotesi di regime stazionario e di flusso termico monodimensionale.

5.2.b Lastra piana indefinita: andamento delle temperatura, flusso e potenza termica, conduttanza e resistenza termica.

Nelle ipotesi già introdotte nel paragrafo precedente di materiale omogeneo ed isotropo con conduttività termica indipendente dalla temperatura, si consideri la geometria che rispetti inoltre la condizione 1. del precedente paragrafo. Si parla in tal caso di lastra piana indefinita, schematizzata in Fig.5.2. Il flusso termico è definito dalla (5.2).



Sezione della parete con un piano perpendicolare all’asse delle y

Fig. 5.2 - Lastra piana indefinita.

Come già osservato in precedenza le superfici limite della parete piana sono isoterme ed il flusso termico è orientato nella direzione x ad esse ortogonale e nel verso delle temperature decrescenti. Inoltre, essendo il campo di temperatura monodimensionale, ogni piano parallelo alle superfici estreme risulta anch'esso isotermo. In tali condizioni il flusso termico definito dalla (5.2) è costante nel tempo ed in ogni punto della sezione della parete mostrata in Fig.5.2. La potenza termica $\dot{Q}_x$ che attraversa la parete piana indefinita è, in tali condizioni, costante nel tempo. Essa risulta, dalla (5.2), pari a:

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{dT}{dx} \qquad (5.3)$$

$\dot{Q}_x$ è espressa in watt nel Sistema Internazionale o in kcal/h nel Sistema Tecnico. Con A viene indicata l'area delle superfici isoterme, tutte di uguale estensione pari a quella delle superfici limite della parete. E' evidente come l'aggettivo “indefinita” riferito alla parete deve essere interpretato nel senso che le dimensioni y e z sono molto maggiori della dimensione x, altrimenti l'area A sarebbe anch'essa “indefinita” e quindi non calcolabile.

Nell'ipotesi che siano note le temperature T_1 e T_2 delle due superfici limite della parete, è possibile ricavare l'andamento delle temperature all'interno di essa, al variare di dell'ascissa x. Nella Fig.5.3 che mostra la sezione retta della parete già riportata in Fig.5.2, l'asse z coincide con l'asse delle temperature T:

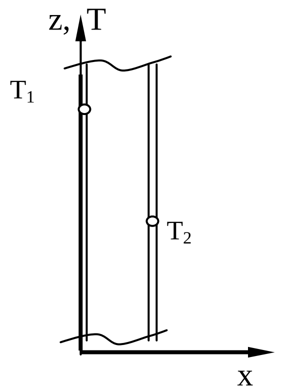


Fig. 5.3

Separando le variabili dell'equazione differenziale (5.3), si ha:

$$\frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot dx = -dT \qquad (5.4)$$

ed integrando tra i valori, T_1 in corrispondenza di x = 0, e T_x, temperatura generica corrispondente all'ascissa corrente x, si ottiene:

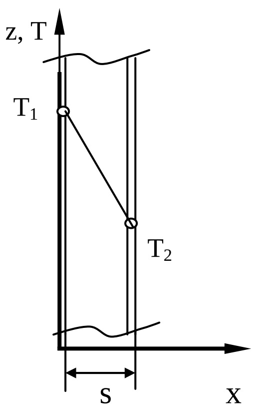


Fig.5.4

$$\frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot \int_0^x dx = -\int_{T_1}^{T} dT$$

$$\frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot (x - 0) = (T_1 - T_x)$$

$$\frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot x = T_1 - T_x$$

$$T_x = T_1 - \frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot x \qquad (5.5)$$

Come si deduce dalla (5.5), l'andamento della temperatura in una parete piana indefinita nelle ipotesi poste, è lineare: nel piano (x, T), la (5.5) rappresenta infatti l'equazione di una retta. In Fig.5.4 la temperatura va decrescendo linearmente dal valore maggiore T_1, in corrispondenza di x =

0, fino al valore T_2, in corrispondenza di x = s, con una pendenza o inclinazione (coefficiente angolare) pari a: $-\frac{\dot{Q}_x}{\lambda A}$

Se ora si integra la (5.4) tra le temperature delle superfici limite della parete si ottiene l'espressione della potenza termica:

$$\frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot \int_0^s dx = -\int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\frac{\dot{Q}_x}{A \cdot \lambda} \cdot (s - 0) = (T_1 - T_2)$$

$$\dot{Q}_x = \frac{A \cdot \lambda}{s} \cdot (T_1 - T_2) \qquad (5.6)$$

La relazione (5.6) mostra che la potenza termica trasmessa per conduzione è direttamente proporzionale:

- alla conduttività termica λ del materiale di cui è costituita la parete;
- all'area della parete, A;
- alla differenza tra le temperature delle superfici esterne, T_l-T_2;

ed inversamente proporzionale:

- allo spessore della parete, s.

Nella (5.6) la grandezza $\lambda A/s$ rappresenta la ***conduttanza termica (conduttiva)*** che, nel Sistema Internazionale si esprime in W/K e nel Sistema Tecnico in kcal/h°C essa nel seguito verrà indicata con C. Il suo inverso

$$R = \frac{1}{C} = \frac{s}{\lambda \cdot A} \qquad (5.7)$$

viene detta ***resistenza termica (conduttiva)*** e, nel SI, viene espressa in K/W, mentre nel ST è espressa in h°C/kcal. Dividendo tali grandezze per l'area A della parete si ottengono rispettivamente ***la conduttanza e la resistenza termiche unitarie***, rispettivamente espresse da:

$$c = \frac{\lambda}{s} \qquad (5.8)$$

$$r = \frac{s}{\lambda} \qquad (5.9)$$

Dalla (5.6), per la (5.7), si ha dunque:

$$\dot{Q} = C \cdot \Delta T = \frac{\Delta T}{R} \qquad (5.10)$$

Dividendo entrambi i membri della (5.10) per l’area della parete, si ottiene:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = c \cdot \Delta T = \frac{\Delta T}{r} \qquad (5.11)$$

Se la conduttività non è costante con la temperatura, ipotesi alla base della presente trattazione, l'andamento della temperatura all'interno della parete non è più lineare. In particolare per valori di λ crescenti con la temperatura, il diagramma delle temperatura sarà rappresentato da una curva con la concavità rivolta verso il basso; per valori di λ decrescenti con la temperatura la curva avrà la concavità verso l'altro. Un esempio qualitativo è mostrato in Fig.5.5 a) e b).

Fig. 5.5 - Andamento della temperatura in lastra piana con λ crescente [a)] e decrescente[b)] con la temperatura.

5.3.b Pareti composte da più strati disposti in serie

E' molto frequente il caso di trasmissione di calore per conduzione in una parete piana composta da più strati di materiale diverso, ciascuno omogeneo ed isotropo, caratterizzati, in generale, da spessori e conduttività diversi. Esempio classico in edilizia è la parete costituita da uno strato esterno di intonaco, da una muratura ed uno strato d'intonaco interno, come mostrato in Fig. 5.6. Nelle ipotesi definite al termine del paragrafo 5.1, il flusso termico attraversa perpendicolarmente in *successione*, uno dopo l'altro i tre strati, ed è orientato dall'esterno all'interno o viceversa a seconda dell'andamento delle temperature. In generale in estate il flusso è diretto dall'esterno della parete verso l'interno degli ambienti, mentre il contrario accade durante l'inverno. La disposizione dei tre strati mostrata in figura è detta *in serie*.

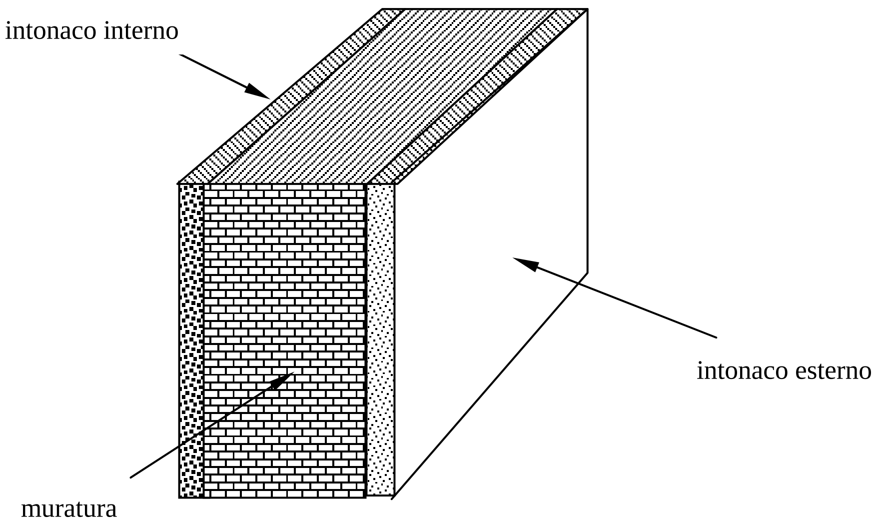


Fig.5.6 - Parete costituita da tre strati disposti in serie

Con riferimento alla Fig.5.6 essendo, nell'ipotesi di regime stazionario, l'andamento delle temperature in parete costante nel tempo ed in assenza di generazione interna, la potenza termica $\dot{Q}_x$, che attraversa ogni superficie isoterma, parallela alle superfici limite della parete, è costante. Il verso, nel caso indicato in figura va dalla superficie a temperatura T_1 a quella a temperatura T_2 Indicando con λ', λ'', λ''' le conduttività termiche dei materiali e con s', s'' ed s''' gli spessori dei singoli strati della parete composta schematizzata di Fig.5.7, applicando a ciascuno degli strati la (5.6) si può scrivere:

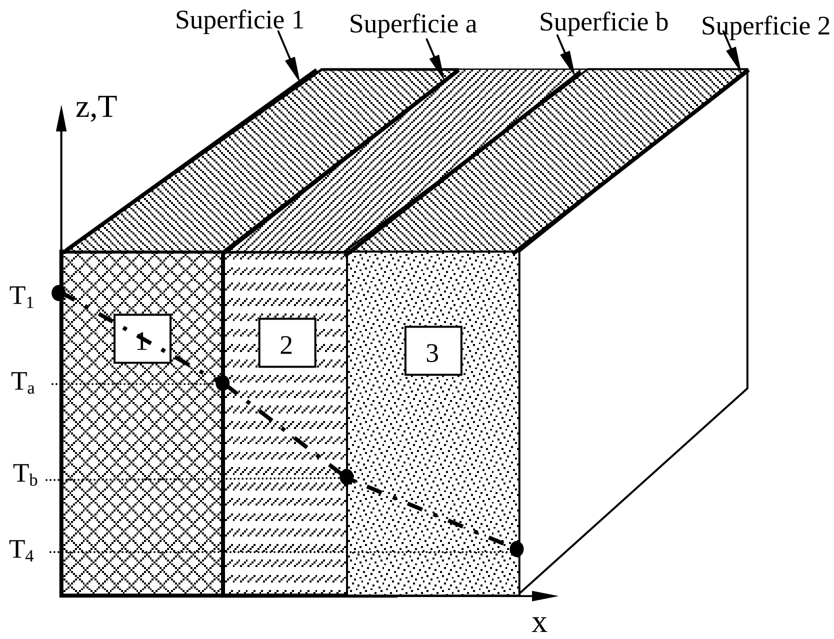


Fig. 5.7 - Parete piana composta da più strati disposti in serie.

- per lo strato 1

$$\dot{Q}_x = \frac{\lambda' \cdot A}{s'} \cdot (T_1 - T_a)$$

- per lo strato 2

$$\dot{Q}_x = \frac{\lambda'' \cdot A}{s''} \cdot (T_a - T_b)$$

- per lo strato 3

$$\dot{Q}_x = \frac{\lambda''' \cdot A}{s'''} \cdot (T_b - T_2)$$

La $\dot{Q}_x$, per le ipotesi poste, è costante in ogni punto della parete e quindi in ciascuno dei tre strati. Ricavando ora da ognuna delle precedenti relazioni le differenze di temperatura si ottiene:

$$(T_1 - T_a) = \frac{\dot{Q}_x}{\frac{\lambda' \cdot A}{s'}}$$

$$(T_a - T_b) = \frac{\dot{Q}_x}{\frac{\lambda'' \cdot A}{s''}}$$

$$(T_b - T_2) = \frac{\dot{Q}_x}{\frac{\lambda''' \cdot A}{s'''}}$$

Sommando membro a membro le relazioni precedenti si ottiene:

$$T_1 - T_a + T_a - T_b + T_b - T_2 = \dot{Q}_x \left(\frac{1}{\frac{\lambda' A}{s'}} + \frac{1}{\frac{\lambda'' A}{s''}} + \frac{1}{\frac{\lambda''' A}{s'''}} \right)$$

$$T_1 - T_2 = \dot{Q}_x \left(\frac{1}{\frac{\lambda' A}{s'}} + \frac{1}{\frac{\lambda'' A}{s''}} + \frac{1}{\frac{\lambda''' A}{s'''}} \right)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q}_x}{A} \left(\frac{1}{\frac{\lambda'}{s'}} + \frac{1}{\frac{\lambda''}{s''}} + \frac{1}{\frac{\lambda'''}{s'''}} \right)$$

La potenza termica che attraversa la parete risulta quindi:

$$\dot{Q}_x = A \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{\frac{\lambda'}{s'}} + \frac{1}{\frac{\lambda''}{s''}} + \frac{1}{\frac{\lambda'''}{s'''}} \right)}$$

Tenendo conto delle (5.6), (5.7) e (5.8) la precedente relazione si può scrivere:

$$\dot{Q}_x = A \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{1}{c'} + \frac{1}{c''} + \frac{1}{c'''} \right)} \qquad (5.12)$$

oppure, utilizzando le resistenze termiche:

$$\dot{Q}_x = A\frac{T_1 - T_2}{\left(r' + r'' + r'''\right)} = A\frac{T_1 - T_2}{r_{tot}} \qquad (5.13)$$

La potenza termica $\dot{Q}_x$ che attraversa una parete costituita da più strati disposti in serie può essere calcolata con le relazioni (5.12) o (5.13). Per la parete con più strati disposti in serie è più immediato l'uso della resistenza termica. Nella (5.13) si è posto:

$$r_{tot} = r' + r'' + r''' \qquad (5.14)$$

La resistenza termica unitaria della parete costituita da più strati in serie è pari alla somma delle resistenze termiche unitarie dei singoli strati.

$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\left(r' + r'' + r'''\right)} = \frac{T_1 - T_2}{r_{tot}} \qquad (5.15)$$

Nel caso in cui la parete sia costituita da n strati disposti in serie, le precedenti relazioni possono essere generalizzate come segue:

$$r_{tot} = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

in cui il termine al secondo membro rappresenta la somma delle resistenze degli n strati che costituiscono la parete. Per il flusso termico si ha:

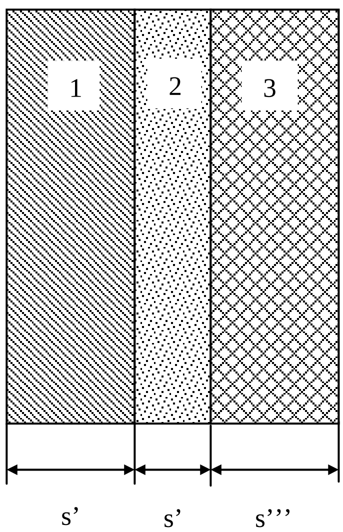
$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_n r_n} \qquad (5.16)$$

Esempio
Si calcolino la resistenza e la conduttanza termica unitaria e totale della parete la cui sezione è mostrata in figura, che ha un'area $A = 10\ m^2$ ed è costituita dai seguenti strati:

1- Calcestruzzo cellulare
s' = 20cm = 0,20m
ρ' = 800 kg/m^3
λ' = 0,25 W/mK

2 - Lastra di acciaio inox
s" = 3,0 mm = 0,0030 m
ρ'' = 8000 kg/m^3
λ " = 17 W/mK

3 - Muratura in mattoni pieni
s'''= 12cm = 0,12m
ρ'''= 1200 kg/m^3
λ'''= 0,43 W/mK



Supponendo di voler aumentare del 50% la resistenza termica unitaria (o ridurre del 50% la conduttanza termica unitaria) della parete, utilizzando lastre di poliuretano espanso di massa volumica, ρ_{is}, pari a 40 kg/m^3, e di conduttività termica, λ_{is}, pari a 0,032 W/mK, si calcoli lo spessore dello strato isolante e si dica se vi è una collocazione di tale strato che, al fine dell'aumento della resistenza termica, risulti più conveniente.

Dalla relazione (5.14) la resistenza termica unitaria totale della parete risulta pari a:

$$r_{tot} = r' + r'' + r'''$$

dove ciascuna delle singole resistenze può essere calcolata impiegando la (5.9). Si ha quindi

$$r_{tot} = \frac{s'}{\lambda'} + \frac{s''}{\lambda''} + \frac{s'''}{\lambda'''} = \frac{0,20}{0,25} + \frac{0,0030}{17} + \frac{0,12}{0,43} = 1,1\frac{m^2K}{W}$$

La conduttanza unitaria risulta:

$$c_{tot} = \frac{1}{r_{tot}} = 0,91\frac{W}{K}$$

La parete così realizzata trasmetterà una potenza termica di 0,91 W per ogni m^2 di area e per una differenza unitaria di temperatura.

Relativamente all'area totale di 10 m^2, la resistenza termica risulta:

$$R_{tot} = \frac{r_{tot}}{A} = \frac{1,1}{10} = 0,11\frac{K}{W}$$

e la conduttanza termica totale è:

$$C_{tot} = \frac{1}{R_{tot}} = 9,1\frac{W}{K}$$

Per incrementare del 50% la resistenza unitaria di tale parete, indicando con r_{tot}* il nuovo valore della resistenza, deve risultare:

$$r_{tot}^* = 1,5 \cdot r = r_{rot} + r_{is}$$

e quindi

$$r_{is} = 0,50 \cdot r_{tot}$$

Da tale relazione si ricava il valore di r_{is}:

$$r_{is} = 0,5 \cdot 1,1 = 0,55\ \frac{m^2K}{W}$$

E' quindi possibile ricavare lo spessore dello strato isolante che risulta

$$s_{is} = R_{is}\lambda_{is} = 0{,}55 \cdot 0{,}032 = 0{,}018 \text{ m}$$

Per quanto riguarda la disposizione dello strato isolante, non vi è alcuna collocazione che, al fine di un aumento della resistenza termica o riduzione della conduttanza, risulti più conveniente.

ESERCIZI DI TRASMISSIONE DEL CALORE IN REGIME STAZIONARIO

CONDUZIONE

Esercizio 1

Calcolare la conduttanza, la resistenza termica e la potenza termica attraverso una parete (6 m x 3 m) di mattoni pieni, spessa 12 cm ed avente una massa volumica di 1000 kg/m^3 le cui superfici estreme sono rispettivamente alla temperatura di 15°C e 6°C.

SOLUZIONE

La conduttanza è pari a:

$$C = \frac{\lambda \cdot A}{s}$$

Essendo l'area della parete pari a 6 x 3 = 18 m^2, lo spessore 12 cm = 0,12 m e la conduttività termica λ = 0,36 W/mK, avendo ricavato tale dato dalla tabella riportata in Appendice B relativamente ai laterizi con massa volumica pari a 1000 kg/m^3, pareti interne protette, si ha:

$$C = \frac{0{,}36 \cdot 18}{0{,}12} = 0{,}54 \frac{W}{K}$$

La resistenza termica, essendo l'inverso della conduttanza, è:

$$R = \frac{1}{C} = \frac{1}{0{,}54} = 1{,}85 \frac{K}{W}$$

La potenza termica attraverso la parete si valuta mediante la (5.10), essendo ΔT pari a 15-6 = 9°C = 9K:

$$\dot{Q} = C \cdot \Delta T = \frac{\Delta T}{R}$$

$$\dot{Q} = 0{,}54 \cdot 9 = 4{,}86 \, W$$

.

Esercizio 2

Determinare la temperatura della superficie fredda di una parete in calcestruzzo (di sabbia e ghiaia) avente una massa volumica di 2000 kg/m^3 ed uno spessore di 25 cm, attraversata da una potenza termica per unità di superficie di 93 W/m^2, ed avente la superficie calda a 35°C.

SOLUZIONE

Dalla (5.11) si ricava che $\Delta T = \frac{\dot{q}}{c} = \dot{q} \cdot r$.

La conduttività del calcestruzzo in sabbia e ghiaia si ricava dall'Appendice B (calcestruzzo confezionato con aggregati naturali) per pareti interne o protette: λ= 1,16 W/mK. Pertanto per la (5.9) si ha:

$$r = \frac{s}{\lambda} = \frac{0,25}{1,16} = 0,216\frac{m^2K}{W},$$

e quindi:

$$\Delta T = 93 \cdot 0,216 = 20,1K = 20,1°C$$

La temperatura sulla superficie fredda della parete vale:

$$T_f = T_c - \Delta T = 35 - 20,1 = 14,9°C$$

Esercizio 3

Determinare la potenza termica dispersa per unità di superficie attraverso una parete costituita (esterno - interno) dai seguenti strati disposti in serie:

- intonaco di malta di cemento: spessore = 20mm
- muratura di mattoni forati (ρ = 800 kg/m^3): spessore 120 mm
- intonaco di gesso: spessore 20 mm;

le temperature sulle superfici estreme sono di 18°C e 4°C.

SOLUZIONE

Il flusso termico, ossia la potenza termica per unità di superficie, nel caso di parete composta da più strati disposti in serie si calcola mediante la (5.15):

$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = \frac{T_1 - T_2}{(r' + r'' + r''')} = \frac{T_1 - T_2}{r_{tot}},$$

in cui le resistenze conduttive relative a ciascuno strato si valutano mediante la (5.9):

$$r_{tot} = r' + r'' + r''' = \frac{s'}{\lambda'} + \frac{s''}{\lambda''} + \frac{s'''}{\lambda'''} = \frac{0,02}{1,4} + \frac{0,12}{0,30} + \frac{0,02}{0,35} =$$

$$= 0,014 + 0,400 + 0,057 = 0,471\frac{m^2K}{W}$$

Avendo ricavato i valori delle conduttività termiche dei materiali, espressi in W/mK, dalla tabella riportata in Appendice B. Si ha pertanto:

$$\dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{r_{tot}} = \frac{18 - 4}{0,471} = 29,7\frac{W}{m^2}$$

Esercizio 4

Una parete multistrato è costituita (esterno - interno) da:

- intonaco di malta di cemento: spessore = 40 mm
- muratura di mattoni pieni (ρ = 1600 kg/m^3): spessore 120 mm
- intonaco di gesso: spessore 20 mm;

le temperature sulle superfici estreme sono rispettivamente di 15,0°C e 5,0°C.

Si calcolino:

a) la potenza termica dispersa per unità di superficie, attraverso la parete.

b) lo spessore di materiale isolante costituito da un pannello rigido di cloruro di polivinile espanso (ρ = 30 kg/m^3, λ = 0,039 W/mK), da aggiungere alla struttura perché la potenza termica dispersa sia un decimo del valore precedentemente calcolato, a parità di temperatura sulle superfici estreme.

SOLUZIONE

a) Il flusso termico si calcola mediante la (5.15):

$$\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A} = \frac{T_1 - T_2}{\left(r' + r'' + r'''\right)} = \frac{T_1 - T_2}{r_{tot}},$$

in cui la resistenza totale unitaria è la somma delle resistenze unitarie relative a ciascuno strato:

$$r_{tot} = r' + r'' + r''' = \frac{s'}{\lambda'} + \frac{s''}{\lambda''} + \frac{s'''}{\lambda'''} = \frac{0,04}{1,4} + \frac{0,12}{0,59} + \frac{0,02}{0,35} =$$

$$= 0,028 + 0,203 + 0,057 = 0,288 \frac{m^2K}{W}$$

Avendo ricavato i valori delle conduttività termiche dei materiali, espressi in W/mK, dalla tabella riportata in Appendice B. Si ottiene:

$$\dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{r_{tot}} = \frac{15 - 5}{0,288} = 34,7 \frac{W}{m^2}$$

aggiungendo lo strato di isolante di resistenza unitaria pari a $r_{is} = \frac{s_{is}}{\lambda_{is}}$, il flusso termico della parete composta da 4 strati, $\dot{q}_x$ si riduce ad un decimo di quello precedentemente calcolato:

$$\dot{q}_x^* = \frac{\dot{q}_x}{10} = \frac{T_1 - T_2}{10 \cdot r_{tot}} = \frac{T_1 - T_2}{r_{tot} + r_{is}},$$

da cui:

$$10 \cdot r_{tot} = r_{tot} + r_{is} \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot r_{tot} = r_{is} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_{is}}{\lambda_{is}} = 9 \cdot r_{tot}$$

Lo spessore dello strato di isolante vale quindi:

$$s_{is} = 9 \cdot r_{tot} \cdot \lambda_{is} = 9 \cdot 0,288 \cdot 0,039 = 0,10 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$