

Prova scritta Elettrodinamica Classica – Prof. Lorenzo Marrucci – 29/6/2021

Nota: per superare lo scritto è necessario impostare la soluzione di almeno un esercizio correttamente. Per ottenere un punteggio alto è necessario risolvere tutti e tre gli esercizi correttamente o con errori minori.

Esercizio 1

Si consideri una sfera conduttrice di raggio R . Essa presenta una carica libera totale Q . L'emisfero inferiore è immerso in un liquido dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r che occupa il semispazio $z < 0$, mentre nel restante semispazio $z > 0$ c'è il vuoto. Determinare a) la densità superficiale di carica libera sulla sfera in funzione della posizione sulla superficie e b) l'energia elettrostatica del sistema.

Esercizio 2

Una sfera di raggio R presenta una densità spaziale di carica secondo l'espressione:

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \frac{z}{R}$$

dove ρ_0 è una costante dimensionale. All'esterno c'è il vuoto. Calcolare a) il potenziale generato a grande distanza dalla sfera e b) il potenziale generato in tutto lo spazio, inclusa la regione interna alla sfera.

$$[\text{MEMO: Laplaciano in coordinate sferiche: } \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}]$$

Esercizio 3

Una particella di massa m , in moto alla velocità relativistica v_0 nel sistema di riferimento del laboratorio, urta elasticamente una particella identica a riposo. Sapendo che dopo l'urto le due particelle assumono la stessa energia, determinare a) l'angolo α formato dalle rispettive traiettorie dopo l'urto, in funzione della velocità della particella incidente, verificando b) che sia correttamente ritrovato il risultato atteso nel limite non relativistico.

Soluzioni

Esercizio 1

Assumiamo che in ciascun semi-spazio, nel vuoto e nel dielettrico, valga distintamente la simmetria sferica per cui le componenti radiali del campo siano indipendenti dalla posizione angolare all'interno del semi-spazio e le componenti angolari sono nulle. Dal momento che si conserva la componente tangenziale del campo elettrico all'interfaccia vuoto-dielettrico, si ha:

$$E_v(r) = E_d(r) \equiv E(r)$$

dove E_v e E_d rappresentano la componente radiale (la sola non nulla) del campo elettrico nel vuoto e nel dielettrico, rispettivamente. Passando al vettore spostamento elettrico $\mathbf{D}$:

$$\frac{D_v(r)}{\epsilon_0} = \frac{D_d(r)}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Dal momento che la sola carica libera presente sulla sfera conduttrice è la carica Q , applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio $r > R$ (facendo attenzione a separare i due contributi al flusso derivanti da D_v e D_d per ciascuna semisfera), otteniamo:

$$D_v 2\pi r^2 + D_d 2\pi r^2 = Q$$

Le due equazioni precedenti costituiscono un sistema di equazioni nelle incognite D_v e D_d , risolvendo il quale otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v(r) &= \frac{Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{D}_d(r) &= \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)r^2} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Per $r > R$ il campo elettrico sarà dunque:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r)r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Va notato che il campo elettrico presenta simmetria sferica completa (non limitatamente ai due semi-spazi), cosa che non era affatto scontata, data la geometria del problema che non presenta simmetria sferica completa. Notiamo anche che se il problema viene affrontato mediante l'equazione di Laplace, la simmetria sferica completa del potenziale e quindi del campo elettrico risulta più immediata. Infatti, la condizione al contorno sul potenziale è costante sulla sfera (senza risentire del dielettrico). Inoltre, il piano di confine tra dielettrico e spazio vuoto, mantenendo la continuità del potenziale, rende possibile risolvere l'equazione di Laplace in tutto lo spazio esterno alla sfera come se il dielettrico non ci fosse, per cui la soluzione a simmetria sferica risulta ovvia.

Ora, per calcolare la carica libera sulla sfera dal lato del vuoto ($\sigma_{LIB,v}$) e dal lato del dielettrico ($\sigma_{LIB,d}$) basta applicare il teorema di Coulomb per lo spostamento elettrico, considerando rispettivamente lo spostamento elettrico $\mathbf{D}_v$ e $\mathbf{D}_d$:

$$\begin{aligned} \sigma_{LIB,v} = D_v(r = R) &= \frac{Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)R^2} \\ \sigma_{LIB,d} = D_d(r = R) &= \frac{\epsilon_r Q}{2\pi(1 + \epsilon_r)R^2} \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'energia elettrostatica richiesto per il punto b), un possibile approccio è di calcolare l'integrale esteso a tutto lo spazio della densità di energia $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_{\substack{r>R \\ 0<\theta<\pi/2}} \frac{1}{2} \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{E} d^3r + \int_{\substack{r>R \\ \pi/2<\theta<\pi}} \frac{1}{2} \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{E} d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int_R^{+\infty} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_R^{+\infty} r^2 dr \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{2\pi(1+\epsilon_r)r^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Risolvendo gli integrali otteniamo:

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)R}$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto calcolando il potenziale della sfera e moltiplicando per la carica diviso due.

Esercizio 2

Per trovare il campo a grande distanza dalla sfera possiamo utilizzare un'espansione in multipoli. Il termine di monopolo è proporzionale alla carica totale Q contenuta nella distribuzione assegnata, che si annulla come si vede da un calcolo esplicito (o anche dalla simmetria della distribuzione):

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \int \rho_0 \frac{r' \cos \theta'}{R} r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\phi' = 0$$

dove l'integrale precedente è ovviamente esteso all'intero volume della sfera.

Passiamo dunque a valutare il termine di dipolo in $\mathbf{r} = (x, y, z)$, ricordando che:

$$V_{DIP}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

dove $\hat{\mathbf{r}} = (x/r, y/r, z/r) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

Eseguendo esplicitamente il calcolo integrale richiesto per le componenti di $\mathbf{p}$ (oppure ragionando semplicemente sulla simmetria della distribuzione di carica assegnata), troviamo che l'unica componente non nulla del momento di dipolo è quella diretta lungo l'asse z :

$$p_z = \int z' \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{\rho_0}{R} \int_0^R r'^4 dr' \int_0^{\pi} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{4\pi}{15} \rho_0 R^4$$

da cui risaliamo al termine di dipolo dell'espansione multipolare:

$$V_{DIP}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 R^4 \cos \theta}{15\epsilon_0 r^2}$$

che concludiamo essere dunque il termine dominante dell'espansione per il potenziale a grandi distanze.

Per calcolare adesso il potenziale in tutto lo spazio dobbiamo risolvere il problema di Poisson associato. Quest'ultimo può essere matematicamente formulato come segue:

$$\nabla^2 V = \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = -\frac{\rho_0 r \cos \theta}{\epsilon_0 R}, & r \leq R \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0, & r > R \end{cases}$$

dove abbiamo ignorato il termine del Laplaciano legato alla dipendenza dalla variabile angolare ϕ , osservando che la distribuzione di carica assegnata presenta simmetria azimutale. Per risolvere il problema in $r \leq R$, possiamo avanzare l'ipotesi che la soluzione sia della forma $V(r, \theta, \phi) = V(r, \theta) = f(r) \cos \theta$, dove $f(r)$ è una funzione radiale da determinare (nota: equivalentemente al posto del $\cos \theta$ si può usare l'armonica sferica Y_{10}). Sostituendo l'ansatz proposto nell'equazione di Poisson, siamo ricondotti immediatamente all'equazione differenziale (ordinaria) seguente per la funzione $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{2f}{r^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 R} r$$

L'equazione non è omogenea: la soluzione generale sarà pertanto una combinazione lineare della soluzione dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare. Per l'omogenea:

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - 2f = 0$$

facciamo l'ipotesi che la soluzione sia della forma $f(r) = r^\alpha$. Sostituendo nell'equazione:

$$r^2 \alpha(\alpha - 1) r^{\alpha-2} + 2r \alpha r^{\alpha-1} - 2r^\alpha = 0$$

dalla quale siamo ricondotti all'equazione algebrica per α : $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$, da cui discendono subito le due soluzioni $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -2$:

$$f(r) = f_{OMOG}(r) + f_{PART}(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r^2} + f_{PART}(r)$$

dove le costanti c_1 e c_2 vanno determinate dalle condizioni del problema (va notato che l'equazione omogenea è la parte radiale dell'equazione di Laplace con parte angolare Y_{10} e le soluzioni sono le solite). Per determinare la soluzione particolare $f_{PART}(r)$ possiamo utilizzare il metodo della variazione delle costanti, che suggerisce:

$$f_{PART}(r) = C_1(r)r + \frac{C_2(r)}{r^2}$$

dove le funzioni $f_1(r) = r$ e $f_2(r) = 1/r^2$ sono le due soluzioni dell'omogenea associata appena trovate e le funzioni $C_1(r)$ e $C_2(r)$ vanno determinate risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dr} f_1 + \frac{dC_2}{dr} f_2 = 0 \\ \frac{dC_1}{dr} \frac{df_1}{dr} + \frac{dC_2}{dr} \frac{df_2}{dr} = g(r) \end{cases}$$

dove la funzione $g(r) = -\frac{\rho_0 r}{\epsilon_0 R}$ rappresenta il termine noto dell'equazione differenziale completa.

Risolvendo il sistema precedente, otteniamo immediatamente:

$$\begin{cases} C_1(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0 R} \\ C_2(r) = \frac{\rho_0 r^5}{15\epsilon_0 R} \end{cases}$$

Da queste otteniamo $f_{PART}(r) = -\frac{\rho_0}{10\epsilon_0 R} r^3$. Notiamo che lo stesso risultato può essere ottenuto (più rapidamente ma meno “meccanicamente”) anche con un metodo “per tentativi”, partendo dall’equazione differenziale non omogenea e assumendo per la soluzione particolare una dipendenza radiale del tipo Ar^α con le costanti A e α da determinare.

La soluzione generale sarà dunque: $f(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r^2} - \frac{\rho_0}{10\epsilon_0 R} r^3$. Notiamo tuttavia che il termine $\propto \frac{1}{r^2}$ darebbe luogo ad una divergenza nell’origine, ragione per cui $c_2 = 0$. La soluzione completa per il potenziale elettrico nella regione $r \leq R$ risulta in definitiva:

$$V(r \leq R, \theta) = \left(c_1 r - \frac{\rho_0}{10\epsilon_0 R} r^3 \right) \cos \theta$$

Nella regione $r > R$ (fuori dalla sfera carica) non c’è carica e il problema di Poisson si riduce ad un semplice problema di Laplace di cui già conosciamo la soluzione generale:

$$V(r > R, \theta) = \sum_{\ell} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell 0}(\theta)$$

dove abbiamo escluso tutte le armoniche sferiche $Y_{\ell m}$ con $m \neq 0$ in virtù della simmetria azimutale della configurazione. La richiesta di continuità della soluzione in $r = R$ ci fa concludere che l’unica armonica da considerare sia $Y_{10} = N \cos \theta$, dove N è un opportuno coefficiente di normalizzazione che può essere calcolato riferendosi alla normalizzazione delle armoniche sferiche sull’intero angolo solido (calcolo qui non richiesto e non necessario). Imponendo la continuità, troviamo:

$$c_1 R - \frac{\rho_0 R^2}{10\epsilon_0} = \frac{B_1}{R^2} N$$

L’equazione precedente offre una relazione tra le costanti c_1 e B_1 , ma da sola non basta a determinare entrambe. L’altra condizione è fornita dalla continuità della derivata del potenziale in $r = R$ (poiché in questo caso non vi è carica distribuita sulla superficie):

$$\frac{\partial V}{\partial r}(R^+) = \frac{\partial V}{\partial r}(R^-)$$

da cui otteniamo:

$$c_1 R - \frac{3\rho_0 R^2}{10\epsilon_0} = -2 \frac{B_1}{R^2} N$$

Combinando opportunamente le due equazioni per c_1 e B_1 , troviamo: $c_1 = \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0}$ e $B_1 = \frac{\rho_0 R^4}{15\epsilon_0 N}$

In definitiva, troviamo che all’esterno della sfera il potenziale assume l’espressione:

$$V(r > R, \theta) = \frac{\rho_0 R^4}{15\epsilon_0 N r^2} N \cos \theta = \frac{\rho_0 R^4 \cos \theta}{15\epsilon_0 r^2}$$

che eguaglia esattamente il termine V_{DIP} determinato al punto a), che quindi risulta essere esatto anche a distanza piccola dalla sfera (purché all'esterno). All'interno della sfera, invece, il potenziale assume l'espressione:

$$V(r \leq R, \theta) = \frac{\rho_0 R r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \frac{r^2}{R^2} \right) \cos \theta$$

Esercizio 3

Siccome le due particelle hanno la stessa massa ed assumono la stessa energia dopo l'urto, concludiamo subito che anche il loro impulso sarà uguale (in modulo):

$$p_1 = p_2 \equiv p$$

Se indichiamo con $\mathbf{p}_0$ l'impulso della prima particella prima dell'urto, per la conservazione dell'impulso si avrà:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Prendendo il quadrato dell'equazione precedente:

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \alpha = 2p^2(1 + \cos \alpha)$$

Ricordando che $p = \gamma m v$, la precedente equazione ci fornisce una relazione tra le velocità (e quindi tra i fattori di Lorentz) finali e la velocità della particella incidente:

$$\gamma_0^2 v_0^2 = 2\gamma^2 v^2(1 + \cos \alpha)$$

Notiamo innanzitutto che l'angolo α che compare nell'equazione precedente è proprio l'angolo richiesto. Può risultare conveniente riscrivere l'uguaglianza precedente nella forma $\gamma_0^2 \beta_0^2 = 2\gamma^2 \beta^2(1 + \cos \alpha)$, dove abbiamo semplicemente introdotto il parametro relativistico $\beta = v/c$. Infatti, ricordando che $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, si ottiene facilmente $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 (v/c)^2 = \gamma^2 - 1$.

La conservazione dell'energia impone:

$$\gamma_0 m c^2 + m c^2 = 2\gamma m c^2$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\gamma_0 + 1 = 2\gamma$$

Siamo dunque ricondotti al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \gamma_0^2 - 1 = 2(\gamma^2 - 1)(1 + \cos \alpha) \\ \gamma_0 + 1 = 2\gamma \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $\gamma = (\gamma_0 + 1)/2$, che, sostituita nella prima equazione, porta a:

$$\gamma_0^2 - 1 = 2 \left(\frac{\gamma_0^2 + 2\gamma_0 + 1}{4} - 1 \right) (1 + \cos \alpha) = (\gamma_0 - 1)(\gamma_0 + 3) \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$\frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 + 3}$$

da cui discende immediatamente il risultato cercato dell'angolo in funzione della velocità iniziale:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 3}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + 3\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\right)$$

Per la risposta al punto b), occorre valutare l'espressione precedente nel limite classico $\gamma_0 \rightarrow 1$. In tal caso si ha $\cos \alpha = 0$, e quindi $\alpha = \pi/2$. Questo è proprio il risultato che ci aspetteremmo nel caso di un urto elastico non relativistico di una particella incidente su una particella identica a riposo. Infatti:

$$\begin{cases} p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \alpha = 2p^2(1 + \cos \alpha) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo subito $v_0^2 = 2v^2$, da cui anche $p_0^2 = 2p^2$. Quest'ultima uguaglianza, sostituita nella prima equazione del sistema, conferma proprio che deve essere $\alpha = \pi/2$.