

# Capitolo 1: Analisi matematica

# Insiemi numerici

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$  insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}$  insieme dei numeri reali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esempi di numeri irrazionali:

$\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , il numero di Nepero  $e$ ,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\dots$

# Sottoinsiemi di numeri reali

**Intervalli limitati**  $a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  intervallo chiuso

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  intervallo aperto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  intervallo chiuso a sn e aperto a ds

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  intervallo chiuso a ds e aperto a sn

**Intervalli illimitati**  $a, b \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$   $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$   $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$   $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

# Coordinate cartesiane nel piano

$O = (0, 0)$  origine degli assi

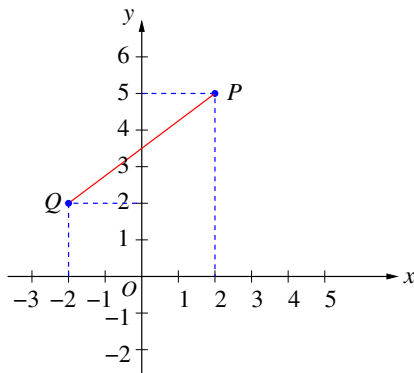
$x$  ascissa,  $y$  ordinata

sistemi monometrici:

stessa unità di misura sui due assi  $x, y$

sistemi dimetrici:

unità di misura diverse sui due assi  
(utile in alcune applicazioni)



# Coordinate cartesiane nel piano

$O = (0, 0)$  origine degli assi

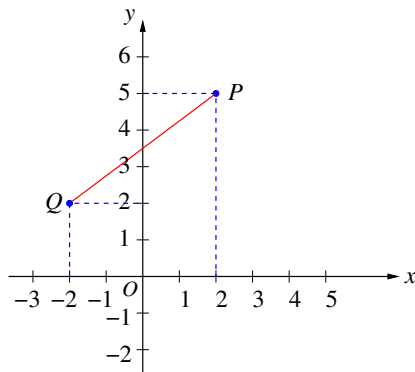
$x$  ascissa,  $y$  ordinata

sistemi monometrici:

stessa unità di misura sui due assi  $x, y$

sistemi dimetrici:

unità di misura diverse sui due assi  
(utile in alcune applicazioni)



La **distanza** tra due punti  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  è data da

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se il sistema è monometrico,  $d(P, Q)$  è la lunghezza del segmento  $PQ$ .

# Rette nel piano

Nel piano cartesiano ogni equazione di primo grado

$$ax + by + c = 0$$

con  $a$  e  $b$  non contemporaneamente nulli, rappresenta una retta e viceversa ogni retta può essere descritta con un'equazione di questo tipo.

Due equazioni con coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  **proporzionali** rappresentano la medesima retta, ad esempio:

$$2x + y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 4x + 2y + 10 = 0$$

**Casi particolari:**

- se  $a = 0$ :  $by + c = 0$  descrive una retta **orizzontale**
- se  $b = 0$ :  $ax + c = 0$  descrive una retta **verticale**

# Coefficiente angolare e intercetta

Se  $b \neq 0$ , l'equazione della retta può essere riscritta risolvendo rispetto alla variabile  $y$ :

$$y = mx + q \quad \text{dove} \quad m = -\frac{a}{b}, \quad q = -\frac{c}{b}$$

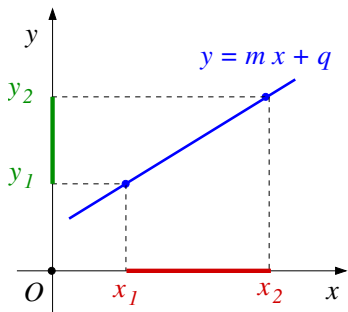
Il numero  $m$  si chiama **coefficiente angolare** e rappresenta la *pendenza*.  
Il numero  $q$  si chiama **intercetta** e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione con l'asse  $y$ .

## Osservazioni:

- una retta (con  $b \neq 0$ ) passa per l'origine se e solo se  $q = 0$
- due rette di equazioni  $y = mx + q$  e  $y = m^*x + q^*$  sono **parallele** se e solo se  $m^* = m$
- due rette di equazioni  $y = mx + q$  e  $y = m^*x + q^*$  sono **perpendicolari** se e solo se  $m \cdot m^* = -1$

# Coefficiente angolare

Il coefficiente angolare di una retta soddisfa la seguente relazione:  
consideriamo sulla retta due punti aventi coordinate  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$   
con  $x_1 \neq x_2$



$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

Sottraendo membro a membro:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## Equazione di una retta passante per due punti

L'equazione della retta passante per due punti assegnati  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  può essere scritta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{oppure} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

**Attenzione:** la prima formula vale solo se  $x_1 \neq x_2$  e  $y_1 \neq y_2$ ; la seconda formula vale solo se  $x_1 \neq x_2$

## Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (5, -1)$  e  $Q = (5, 2)$ .

## Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (5, -1)$  e  $Q = (5, 2)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione  $x = 5$ .

## Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (5, -1)$  e  $Q = (5, 2)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione  $x = 5$ .

## Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (3, 1)$  e  $Q = (\sqrt{2}, 1)$ .

## Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (5, -1)$  e  $Q = (5, 2)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione  $x = 5$ .

## Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (3, 1)$  e  $Q = (\sqrt{2}, 1)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi della retta orizzontale di equazione  $y = 1$ .

## Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (5, -1)$  e  $Q = (5, 2)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione  $x = 5$ .

## Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (3, 1)$  e  $Q = (\sqrt{2}, 1)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi della retta orizzontale di equazione  $y = 1$ .

## Esercizio 3.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (0, 1)$  e  $Q = (-1, 2)$ .

## Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (5, -1)$  e  $Q = (5, 2)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione  $x = 5$ .

## Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (3, 1)$  e  $Q = (\sqrt{2}, 1)$ .

**Soluzione:**  $P$  e  $Q$  hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi della retta orizzontale di equazione  $y = 1$ .

## Esercizio 3.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (0, 1)$  e  $Q = (-1, 2)$ .

**Soluzione:** 
$$\frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{x - 0}{-1 - 0} \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

## Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (-1, 2)$  con coefficiente angolare  $m = 2$ .

## Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (-1, 2)$  con coefficiente angolare  $m = 2$ .

**Soluzione:**  $y = 2x + 4$

## Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (-1, 2)$  con coefficiente angolare  $m = 2$ .

**Soluzione:**  $y = 2x + 4$

## Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in  $x = 5$  e l'asse delle ordinate in  $y = -1$ .

## Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (-1, 2)$  con coefficiente angolare  $m = 2$ .

**Soluzione:**  $y = 2x + 4$

## Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in  $x = 5$  e l'asse delle ordinate in  $y = -1$ .

**Soluzione:**  $y = \frac{1}{5}x - 1$

## Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (-1, 2)$  con coefficiente angolare  $m = 2$ .

**Soluzione:**  $y = 2x + 4$

## Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in  $x = 5$  e l'asse delle ordinate in  $y = -1$ .

**Soluzione:**  $y = \frac{1}{5}x - 1$

## Esercizio 6.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in  $y = 5$ , parallela alla retta  $y = 3x - 7$ .

# Esercizi

## Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per  $P = (-1, 2)$  con coefficiente angolare  $m = 2$ .

**Soluzione:**  $y = 2x + 4$

## Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in  $x = 5$  e l'asse delle ordinate in  $y = -1$ .

**Soluzione:**  $y = \frac{1}{5}x - 1$

## Esercizio 6.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in  $y = 5$ , parallela alla retta  $y = 3x - 7$ .

**Soluzione:**  $y = 3x + 5$

Il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze. Tale corrispondenza può essere data in svariati modi:

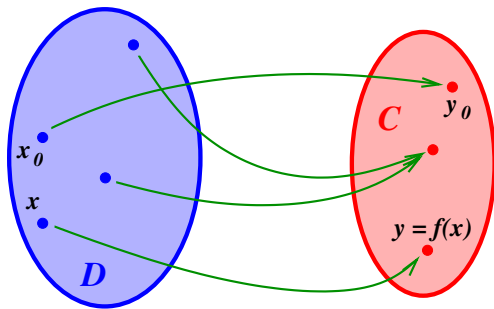
- da un rilevamento empirico
- da una formula (*legge*)

## Esempi:

- 1) la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
- 2) la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
- 3) lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:  
 $s = \frac{1}{2}g t^2$  (*moto uniformemente accelerato*)
- 4) la relazione tra i lati  $x$ ,  $y$  di un rettangolo di area unitaria:  $xy = 1$  da cui si ricava:  $y = \frac{1}{x}$

# Definizione di funzione

Una **funzione**  $f$  è una legge che ad ogni elemento  $x$  di un certo insieme  $D$  (**dominio**) fa corrispondere **uno ed un solo** elemento  $y$  di un secondo insieme  $C$  (**codominio**). Si dice che  $y$  è l'**immagine** di  $x$  tramite  $f$  e si scrive  $y = f(x)$ .



$$f : D \rightarrow C$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

# Grafico di una funzione

Sia  $A \subset \mathbb{R}$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale.

Il **grafico** di  $f$  è l'insieme delle coppie  $(x, f(x))$ .

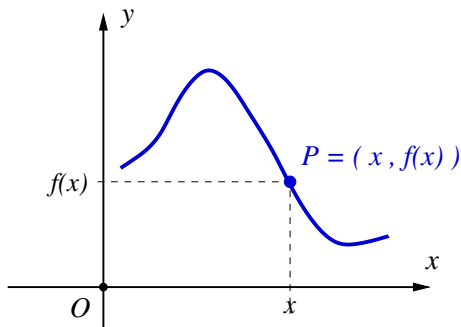


Grafico di  $f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

# Funzioni – Esempi

**Esempi** (funzioni reali di una variabile reale):

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$  il grafico è una retta
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$  il grafico è una parabola
- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$
- $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$  il grafico è l'iperbole equilatera
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Si dice che  $f(x)$  è il valore della funzione  $f$  in  $x$ .

Nell'espressione  $y = f(x)$ ,  $x$  è detta **variabile indipendente**, mentre  $y$  è detta **variabile dipendente**.

# Funzioni iniettive e suriettive

- Una funzione  $f : D \rightarrow C$  si dice **iniettiva** se elementi distinti di  $D$  hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Una funzione  $f : D \rightarrow C$  si dice **suriettiva** se ogni elemento del *codominio*  $C$  è *immagine* di qualche elemento del *dominio*. In simboli:

$$\forall y \in C \quad \exists x \in D : f(x) = y$$

- Una funzione  $f : D \rightarrow C$  contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice **biunivoca** (o **biettiva**)

# Funzioni biunivoche

Una funzione  $f : D \rightarrow C$  è **biunivoca** (o biettiva) se

ogni  $y \in C$  è immagine di **uno ed un solo** elemento  $x \in D$ .

## Esempi:

- 1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$  è biunivoca:  $y \in \mathbb{R}$  è immagine di  $x = \frac{1}{2}(y - 1)$
- 2)  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  è biunivoca:  $y \in [0, +\infty)$  è immagine di  $x = y^2$
- 3)  $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^2$  è biunivoca:  $y \in [0, +\infty)$  è immagine di  $x = -\sqrt{y}$
- 4)  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  non è biunivoca:  $y < 0$  non è immagine di alcun  $x$
- 5)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f(x) = x^2$  non è biunivoca:  $y = 4$  è immagine di  $x = \pm 2$

# Operazioni sulle funzioni

Date due funzioni  $f$  e  $g$  a valori reali, sull'**intersezione dei due domini** si possono definire

- *funzione somma*:  $s(x) = f(x) + g(x)$
- *funzione differenza*:  $d(x) = f(x) - g(x)$
- *funzione prodotto*:  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
- *funzione quoziente*:  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  definita per  $x$  tale che  $g(x) \neq 0$

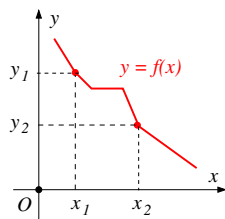
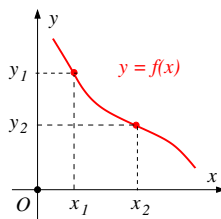
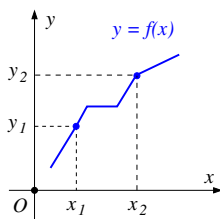
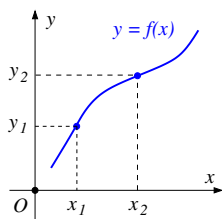
## Esempi:

- 1) *somma*:  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 5 \Rightarrow (f + g)(x) = x + 5$
- 2) *prodotto*:  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + 5 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$
- 3) *quoziente*:  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$  per  $x \neq \pm 1$
- 4)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = x - 5 \Rightarrow \frac{f - g}{h}(x) = \frac{\sqrt{x} - x^2}{x - 5}$   
Qual è il dominio?

# Funzioni monotone

Una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice

- **strettamente crescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **debolmente crescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **strettamente decrescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **debolmente decrescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



**Esercizio 1.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = 3x + 1$  è strettamente crescente per  $x \in \mathbb{R}$ .

## Esercizi sulle funzioni monotone

**Esercizio 1.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = 3x + 1$  è strettamente crescente per  $x \in \mathbb{R}$ .

**Soluzione:** per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  con  $x_1 < x_2$  si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \quad \text{cioè} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ragionando in modo analogo, si dimostra che:

la funzione  $f(x) = mx + q$  con  $m > 0$  è strettamente crescente per  $x \in \mathbb{R}$ ;

la funzione  $f(x) = mx + q$  con  $m < 0$  è strettamente decrescente per  $x \in \mathbb{R}$ .

## Esercizi sulle funzioni monotone

**Esercizio 2.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = x^2$  è strettamente crescente per  $x \geq 0$ .

## Esercizi sulle funzioni monotone

**Esercizio 2.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = x^2$  è strettamente crescente per  $x \geq 0$ .

**Soluzione:** per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \geq 0$  con  $x_1 < x_2$  abbiamo, in particolare, che

$$0 \leq x_1 < x_2.$$

Moltiplicando per  $x_1$  (che è non negativo), si ottiene

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per  $x_2$  (che è strettamente positivo), si ottiene

$$x_1 x_2 < (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2 < (x_2)^2, \quad \text{cioè } f(x_1) < f(x_2).$$

## Esercizi sulle funzioni monotone

**Esercizio 3.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = x^2$  è strettamente decrescente per  $x \leq 0$ .

## Esercizi sulle funzioni monotone

**Esercizio 3.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = x^2$  è strettamente decrescente per  $x \leq 0$ .

**Soluzione:** per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \leq 0$  con  $x_1 < x_2$  abbiamo, in particolare, che

$$x_1 < x_2 \leq 0.$$

Moltiplicando per  $x_1$  (che è strettamente negativo), si ottiene

$$(x_1)^2 > x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per  $x_2$  (che è non positivo), si ottiene

$$x_1 x_2 \geq (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 > x_1 x_2 \geq (x_2)^2, \quad \text{cioè } f(x_1) > f(x_2).$$

# Minimi assoluti e relativi di una funzione

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in A$ .

- **minimo assoluto (o globale):**

$x_0$  è punto di minimo assoluto se  $f(x) \geq f(x_0)$  per ogni  $x \in A$

- **minimo relativo (o locale):**

si dice che in  $x_0$  la funzione ha un punto di minimo relativo se “vicino” a  $x_0$  assume solo valori *maggiori o uguali* di  $f(x_0)$ ,  
cioè,

$x_0$  è punto di minimo relativo se

esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) \geq f(x_0)$  per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

# Massimi assoluti e relativi di una funzione

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in A$ .

- **massimo assoluto (o globale):**

$x_0$  è punto di massimo assoluto se  $f(x) \leq f(x_0)$  per ogni  $x \in A$

- **massimo relativo (o locale):**

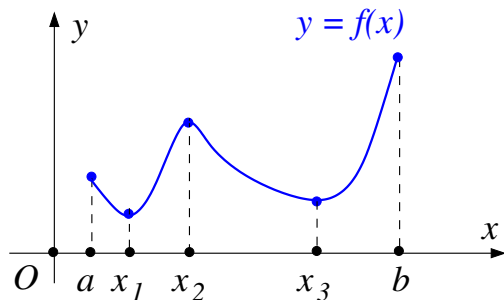
si dice che in  $x_0$  la funzione ha un punto di massimo relativo se “vicino” a  $x_0$  assume solo valori *minori o uguali* di  $f(x_0)$

cioè,

$x_0$  è punto di massimo relativo se

esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) \leq f(x_0)$  per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

# Minimi e massimi di funzione



- $x_1$  punto di minimo assoluto,  $f(x_1)$  valore minimo assoluto;
- $x_2$  punto di massimo relativo,  $f(x_2)$  valore massimo relativo;
- $x_3$  punto di minimo relativo,  $f(x_3)$  valore minimo relativo;
- $b$  punto di massimo assoluto,  $f(b)$  valore massimo assoluto.

**Esercizio 1.** Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione  $f(x) = 3x - 2$  nell'intervallo  $[1, 2]$ .

**Esercizio 1.** Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione  $f(x) = 3x - 2$  nell'intervallo  $[1, 2]$ .

**Soluzione:** la funzione ha come grafico una retta il cui coefficiente angolare è positivo e dunque è strettamente crescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto  $x = 2$  e il valore del massimo è  $f(2) = 4$ , mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto  $x = 1$  e il valore del minimo è  $f(1) = 1$ .

**Esercizio 2.** Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione  $f(x) = -x^2$  nell'intervallo  $[0, 5]$ .

**Esercizio 2.** Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione  $f(x) = -x^2$  nell'intervallo  $[0, 5]$ .

**Soluzione:** la funzione in  $[0, 5]$  è strettamente decrescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto  $x = 0$  e il valore del massimo è 0, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto  $x = 5$  e il valore del minimo è  $-25$ .

**Esercizio 3.** Dire se la funzione  $f(x) = x^2 + 1$  ha massimo assoluto su tutto  $\mathbb{R}$ . Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Dire se la funzione  $f(x) = x^2 + 1$  ha massimo assoluto su tutto  $\mathbb{R}$ . Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su  $\mathbb{R}$ .

**Soluzione:** la funzione non ha massimo assoluto; il minimo assoluto è assunto nel punto  $x = 0$  e il suo valore è  $f(0) = 1$ .

**Esercizio 4.** Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su  $\mathbb{R}$  della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su  $\mathbb{R}$  della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

**Soluzione:** il massimo assoluto è assunto nel punto  $x = -1$  e per  $x > 2$ , il valore del massimo è 3. Il minimo assoluto è assunto nel punto  $x = 2$  e il valore del minimo è 0.

# Funzione composta

Date due funzioni  $g : A \rightarrow B$  e  $f : B \rightarrow C$  si può definire la **funzione composta**:

$$f \circ g : A \rightarrow C \quad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Il campo di esistenza della funzione composta è costituito dai soli valori di  $x$  per i quali la composizione funzionale ha senso. La composizione **ha senso se**:  $x$  appartiene al dominio di  $g$  e il valore  $g(x)$  appartiene al dominio di  $f$ .

## Esempi:

- $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$   
con  $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x - 7 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{x - 7}$   
con  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 7\}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  con  $D = \mathbb{R}$

# Esercizi sulla funzione composta

**Esercizio 1.** Date le funzioni  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = 2x + 1$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

## Esercizi sulla funzione composta

**Esercizio 1.** Date le funzioni  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $g(x) = 2x + 1$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Soluzione:**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x + 1} \quad \text{definita per } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{x} + 1 \quad \text{definita per } x \geq 0$$

## Esercizi sulla funzione composta

**Esercizio 2.** Date le funzioni  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

## Esercizi sulla funzione composta

**Esercizio 2.** Date le funzioni  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Soluzione:**

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1$$

Entrambe le funzioni sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

# Funzione inversa

Una funzione **biunivoca** è sempre **invertibile**, cioè:

se  $f : D \rightarrow C$  è biunivoca, possiamo definire la **funzione inversa**  $f^{-1}$

$$f^{-1} : C \rightarrow D, \quad x = f^{-1}(y)$$

per ogni  $y \in C$ ,  $x$  è l'unico punto di  $D$  tale che  $f(x) = y$

**Nota bene:** un tale  $x$  esiste ed è unico perché la funzione  $f$  è biunivoca

## Esempi:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$$

- $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

# Proprietà della funzione inversa

Sia  $f : D \rightarrow C$  invertibile e sia  $f^{-1} : C \rightarrow D$  la sua funzione inversa.

Consideriamo la funzione composta  $f^{-1} \circ f$ :

$$f^{-1} \circ f : x \in D \mapsto f(x) \in C \mapsto f^{-1}(f(x)) = x \in D$$

In altre parole,  $f^{-1} \circ f : D \rightarrow D$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  è la **funzione identità** su  $D$ .

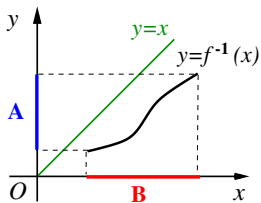
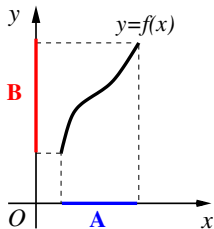
Analogamente vale per  $f \circ f^{-1}$ :

$$f \circ f^{-1} : y \in C \mapsto f^{-1}(y) \in D \mapsto f(f^{-1}(y)) = y \in C$$

In altre parole,  $f \circ f^{-1} : C \rightarrow C$ ,  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  è la **funzione identità** su  $C$ .

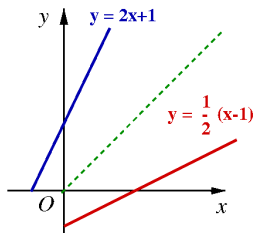
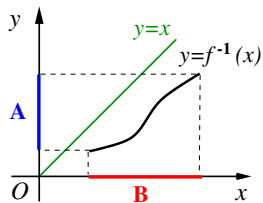
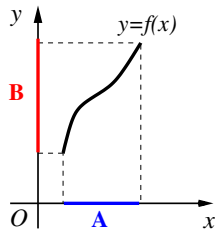
# Grafico della funzione inversa

Il grafico di  $f^{-1}$  si ottiene per simmetria rispetto alla retta  $y = x$ .



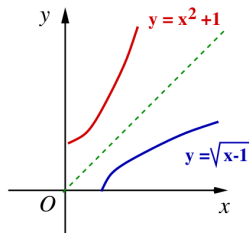
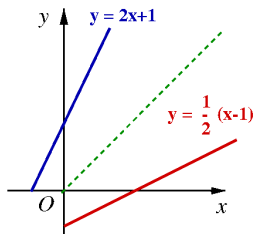
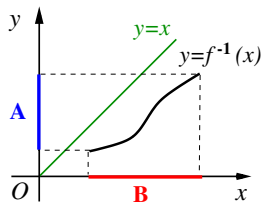
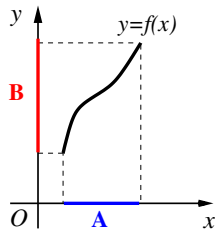
# Grafico della funzione inversa

Il grafico di  $f^{-1}$  si ottiene per simmetria rispetto alla retta  $y = x$ .



# Grafico della funzione inversa

Il grafico di  $f^{-1}$  si ottiene per simmetria rispetto alla retta  $y = x$ .



## Ancora sulla funzione inversa

**Attenzione:** non confondere la funzione inversa  $f^{-1}$  con la funzione reciproco  $\frac{1}{f}$  !!!

**Esempio 1.** Consideriamo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x$ .

La funzione inversa è  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(y) = \frac{y}{3}$ .

La funzione reciproco è  $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x}$ .

**Esempio 2.** Consideriamo  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = x^2$ .

La funzione inversa è  $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ .

La funzione reciproco è  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$ .

# Criterio di invertibilità

Le funzioni strettamente monotone sono iniettive.

## **Criterio di invertibilità:**

se  $f$  è strettamente monotona e suriettiva, allora  $f$  è invertibile.

Inoltre, se  $f : D \rightarrow C$  è invertibile, allora

$$f \text{ crescente} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ crescente}$$

$$f \text{ decrescente} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ decrescente}$$

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = -x + 3$ . Stabilire se  $f$  è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = -x + 3$ . Stabilire se  $f$  è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

**Soluzione:** la funzione  $f$  è biunivoca, quindi invertibile, e l'inversa è  $f^{-1}(y) = -y + 3$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ . Stabilire se  $f$  è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

## Esercizi sulle funzioni inverse

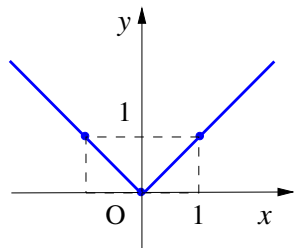
**Esercizio 2.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ . Stabilire se  $f$  è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

**Soluzione:** la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva, né suriettiva.

Osserviamo che per renderla suriettiva basta considerare  $\mathbb{R}_+$  come codominio. Invece, per renderla iniettiva si può ad esempio restringere il dominio a  $[-1, +\infty)$ . La funzione  $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  definita da  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1.$$

# Funzione valore assoluto



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

## Proprietà:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$  se e solo se  $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ con } x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

## disuguaglianza triangolare:

- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se  $\delta > 0$ ,  $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$

Analogamente:

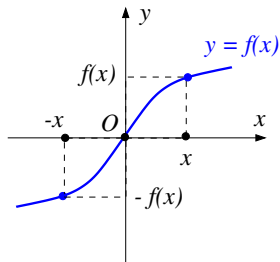
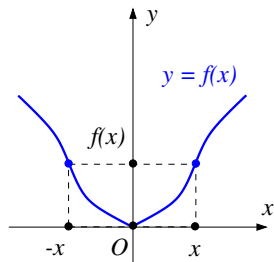
$$|x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$$

# Funzioni pari e dispari

- Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **pari**: se  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
In questo caso il grafico di  $f$  è simmetrico rispetto all'asse  $y$
- Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **dispari**: se  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
In questo caso il grafico di  $f$  è simmetrico rispetto all'origine  $O$

**Esempi:**  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^{2n}$ ,  $f(x) = |x|$  funzioni pari

$f(x) = x$ ,  $f(x) = x^{2n+1}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  funzioni dispari



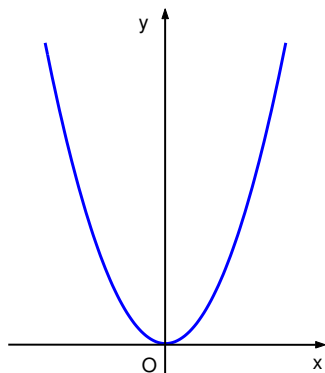
**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti disequazioni:

- $|2x + 3| \leq 1$

- $|2x + 3| \leq -2$

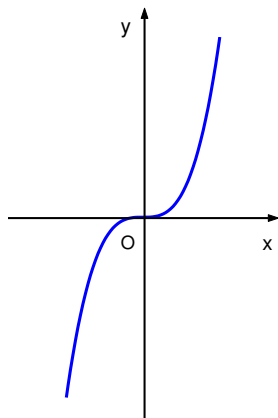
- $|4x + 1| > 2$

# Potenze con esponente intero positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione dispari

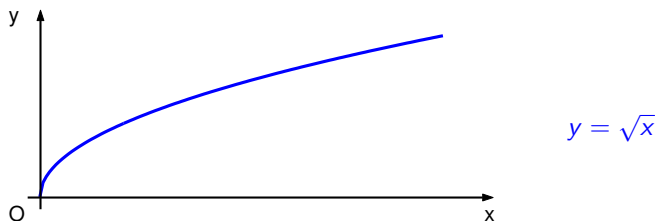
Il grafico di  $x^n$  è qualitativamente simile a quello di  $x^2$  se  $n$  è **pari** o a quello di  $x^3$  se  $n$  è **dispari**.

# Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

- Se  $n = 1$ , la funzione  $f(x) = x$  è l'**identità**, con inversa uguale a se stessa.
- Se  $n = 2$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  **non** è invertibile, ma lo è da  $[0, +\infty)$  in  $[0, +\infty)$ . Chiamiamo **radice quadrata** la sua inversa:

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$



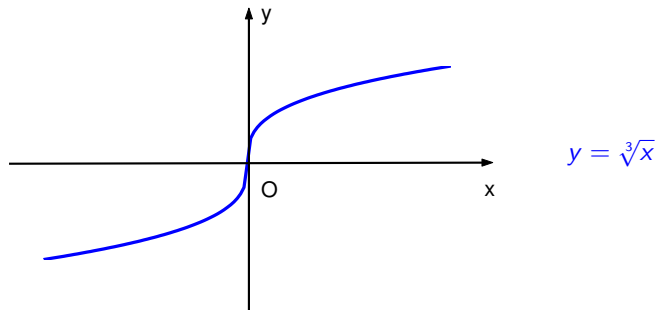
In generale, se  $n$  è pari, la funzione  $f(x) = x^n$  è invertibile da  $[0, +\infty)$  in  $[0, +\infty)$ . Chiamiamo l'inversa **radice n-sima**  $\sqrt[n]{x}$  definita da  $[0, +\infty)$  in  $[0, +\infty)$ .

# Radici

- Se  $n = 3$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  è invertibile.

Chiamiamo **radice cubica** la sua inversa:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



In generale, se  $n$  è dispari, la funzione  $f(x) = x^n$  è invertibile da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

Chiamiamo l'inversa **radice n-sima**  $\sqrt[n]{x}$  definita da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

# Funzioni potenza

## Potenze ad esponente intero:

- se  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x^n$  è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

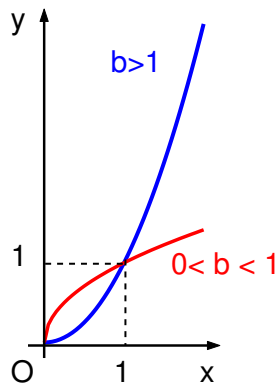
## Potenze ad esponente razionale: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{definita per ogni } x > 0.$$

## Potenze ad esponente reale: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

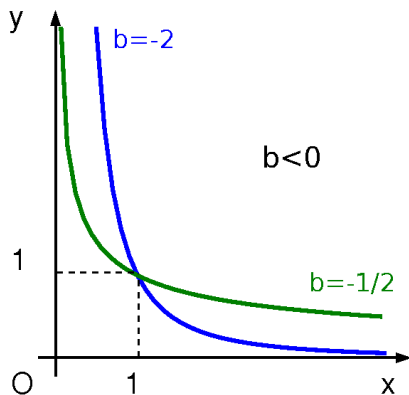
$$f(x) = x^b \quad \text{definita per ogni } x > 0 \quad (\text{resta indefinito } 0^0 \text{ !!!})$$

# Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$$y = f(x) = x^b \text{ per } b > 0$$

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



$$y = f(x) = x^b \text{ per } b < 0$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

## Ancora sulle potenze

**Polinomi:** con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i **polinomi**, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

$P_n$  è detto polinomio di grado  $n$ .

**Funzioni Razionali:** facendo il quoziente di due polinomi  $P$  e  $Q$  si ottengono le **funzioni razionali**, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Come **caso particolare** ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$

# Legge di Caduta di un grave

Il moto di un corpo che cade è un moto uniformemente accelerato.

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dove

- $t$  è il tempo;
- $s(t)$  e' la funzione che descrive la variazione della coordinata verticale del corpo in funzione del tempo;
- $v_0$  la velocità iniziale nella direzione dell'asse  $y$ ;
- $s_0$  è la posizione iniziale;
- $g = 8.9ms^{-2}$  l'accelerazione di gravità.

**Esercizio 2.** Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{per } x \leq -1 \\ |x| & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo  $(-\infty, 3]$ .

**Esercizio 3.** (compito d'esame del 26/09/2013)

Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ 2|x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4x - x^2 & \text{per } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo  $[-2, 4]$ .

**Esercizio 4.** (compito d'esame del 26/09/2013)

Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - x^2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ |x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4 - x & \text{per } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo  $[-2, 3]$ .

# Campo di esistenza

Il campo di esistenza di una funzione  $f$  è il dominio più grande su cui ha significato la funzione  $f$ .

**Esercizio.** Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

1)  $f(x) = 9 + 2x$

2)  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$

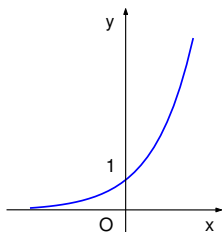
3)  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$

4)  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x+3}}$

## Soluzioni:

- 1)  $\mathbb{R}$
- 2) Affinché le due radici abbiano significato, i radicandi devono essere entrambi non negativi:  $x - 2 \geq 0$  e  $-x \geq 0$ , cioè  $x \geq 2$  e  $x \leq 0$ .  
Segue che la funzione non è definita per alcun valore di  $x$ .
- 3) Il denominatore deve essere diverso da zero, cioè  $x \neq 2$  e  $x \neq -2$ .  
L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè  $9 - x^2 \geq 0$  e quindi  $-3 \leq x \leq 3$ . Dunque il campo di esistenza è  $[-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3]$ .
- 4) L'unica condizione da imporre è che il denominatore sia diverso da 0. Quindi il campo di esistenza è  $\mathbb{R} - \{-3\}$ .

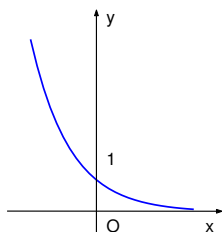
# Funzione esponenziale



$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 1$$

- $a^0 = 1$ ,  $a^1 = a$ ,  $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **strettamente crescente:**  
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se  $x$  tende a  $+\infty$ ,  $a^x$  tende a  $+\infty$
- se  $x$  tende a  $-\infty$ ,  $a^x$  tende a  $0$



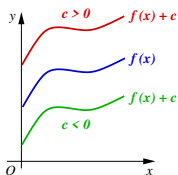
$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$f(x) = a^x \text{ con } 0 < a < 1$$

- $a^0 = 1$ ,  $a^1 = a$ ,  $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **strettamente decrescente:**  
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se  $x$  tende a  $+\infty$ ,  $a^x$  tende a  $0$
- se  $x$  tende a  $-\infty$ ,  $a^x$  tende a  $+\infty$

Proprietà:  $a^x a^y = a^{x+y}$        $(a^x)^y = a^{xy}$        $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

## Esempio 1: Riproduzione



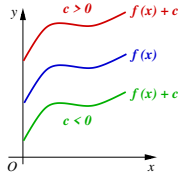
La divisione batterica per scissione binaria determina la moltiplicazione del microrganismo in maniera esponenziale, così che, dopo tre divisioni, da una cellula batterica se ne formano otto. Al tempo  $t$  si avranno:  $N(t) = 2^t$  batteri.

Se partiamo da  $N_0$  batteri al tempo  $t$  si avranno:  $N(t) = N_0 2^t$  batteri

## Esempio 2: Decadimento radioattivo

Per tempo di dimezzamento  $T$  di un materiale radioattivo si intende il periodo passato il quale la metà del materiale è decaduta (cioè si è trasformata).

Azoto:  $T=10$  minuti, Carbonio:  $T=5730$  anni  
Data una certa quantità iniziale  $Q_0$  di materiale, dopo un tempo  $t$  la quantità di sostanza radioattiva si riduce a  $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^t$

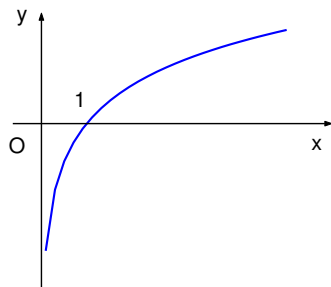


# Funzione logaritmo

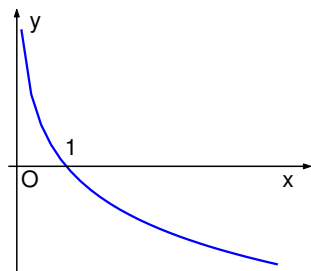
La funzione esponenziale  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$  è strettamente monotona e suriettiva, quindi invertibile.

$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(x) = \log_a x$     logaritmo in base  $a$  di  $x$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$



$y = \log_a x$  con  $a > 1$



$y = \log_a x$  con  $0 < a < 1$

# Proprietà del logaritmo

Il logaritmo  $\log_a x$  è l'esponente a cui bisogna elevare la base  $a$  per ottenere  $x$ .

- $a^{\log_a x} = x$  per ogni  $x > 0$
- $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$  per ogni  $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$  per ogni  $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$  per ogni  $x > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$
- **cambio di base:**  $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$  per ogni  $x > 0$  e  $a, b > 0$

# Il pH

Acidi e sali in soluzioni acquose formano ioni di idrogeno.

La concentrazione di questi ioni permette di quantificare il grado di **acidità** o **alcalinità** della soluzione.

Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25 gradi C, in cui si hanno  $10^{-7}$  moli/l di ioni. Si parla di:

- **soluzioni acide**, se la concentrazione di ioni è maggiore di  $10^{-7}$
- **soluzioni basiche o alcaline**, se la concentrazione di ioni è minore di  $10^{-7}$
- **soluzioni neutre**, se la concentrazione di ioni è pari a  $10^{-7}$

Si definisce pH

$$\text{pH} = -\log_{10} \text{H}^+$$

dove  $\text{H}^+$  è la concentrazione di ioni idrogeno.

## Il pH – Esercizio

sostanza	pH
acqua pura	7
sangue	7.4
pioggia	6.5

Il pH della pioggia e quello del sangue differiscono di poco; tuttavia,

$$H_{\text{pioggia}}^+ = 10^{-6.5}, \quad H_{\text{sangue}}^+ = 10^{-7.4},$$

da cui

$$\frac{H_{\text{pioggia}}^+}{H_{\text{sangue}}^+} = 10^{0.9} \simeq 8,$$

cioè la concentrazione di ioni nella pioggia è circa 8 volte quella del sangue.

**Esercizio.** Verificare che la concentrazione di ioni idrogeno nel sangue è circa il 40% di quella nell'acqua.

# Esercizi

**Esercizio 1.** Sapendo che  $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$  e che  $\log_{10} e \simeq 0.43429$ , calcolare i valori di  $\log_{10} 4$ ,  $\log_{10} \frac{1}{5}$ ,  $\log_e 2$ .

# Esercizi

**Esercizio 1.** Sapendo che  $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$  e che  $\log_{10} e \simeq 0.43429$ , calcolare i valori di  $\log_{10} 4$ ,  $\log_{10} \frac{1}{5}$ ,  $\log_e 2$ .

**Soluzione:** basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

# Esercizi

**Esercizio 1.** Sapendo che  $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$  e che  $\log_{10} e \simeq 0.43429$ , calcolare i valori di  $\log_{10} 4$ ,  $\log_{10} \frac{1}{5}$ ,  $\log_e 2$ .

**Soluzione:** basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

**Esercizio 2.** Determinare le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  in modo che il grafico della funzione  $f(x) = \alpha e^{\beta x}$  passi per i punti  $(0, 5)$  e  $(4, 15)$ .

# Esercizi

**Esercizio 1.** Sapendo che  $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$  e che  $\log_{10} e \simeq 0.43429$ , calcolare i valori di  $\log_{10} 4$ ,  $\log_{10} \frac{1}{5}$ ,  $\log_e 2$ .

**Soluzione:** basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

**Esercizio 2.** Determinare le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  in modo che il grafico della funzione  $f(x) = \alpha e^{\beta x}$  passi per i punti  $(0, 5)$  e  $(4, 15)$ .

**Soluzione:** poiché  $f(0) = \alpha$ , si ha immediatamente che  $\alpha = 5$ . Si ottiene quindi che  $f(4) = 5e^{4\beta} = 15$ , da cui  $e^{4\beta} = 3$ , cioè  $\beta = \frac{1}{4} \ln 3$ .

**Esercizio 3.** Determinare l'insieme dei valori di  $x$  per cui si ha  $\log_{10}(2x + 3) < 1$ .

**Esercizio 3.** Determinare l'insieme dei valori di  $x$  per cui si ha  $\log_{10}(2x + 3) < 1$ .

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $2x + 3 > 0$ . Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione  $\log_{10}(2x + 3) < 1$  è equivalente a  $2x + 3 < 10$ . Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo  $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ .

**Esercizio 3.** Determinare l'insieme dei valori di  $x$  per cui si ha  $\log_{10}(2x + 3) < 1$ .

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $2x + 3 > 0$ . Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione  $\log_{10}(2x + 3) < 1$  è equivalente a  $2x + 3 < 10$ . Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo  $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ .

**Esercizio 4.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 5x + 6).$$

**Esercizio 3.** Determinare l'insieme dei valori di  $x$  per cui si ha  $\log_{10}(2x + 3) < 1$ .

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $2x + 3 > 0$ . Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione  $\log_{10}(2x + 3) < 1$  è equivalente a  $2x + 3 < 10$ . Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo  $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ .

**Esercizio 4.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 5x + 6).$$

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $x^2 - 5x + 6 > 0$ , quindi il campo di esistenza è  $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ .

**Esercizio 5.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

**Esercizio 5.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $x^2 - 5x + 7 > 0$ . L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè  $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$ , quindi  $x^2 - 5x + 7 \geq 1$ . La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ .

**Esercizio 5.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $x^2 - 5x + 7 > 0$ . L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè  $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$ , quindi  $x^2 - 5x + 7 \geq 1$ . La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ .

**Esercizio 6.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

**Esercizio 5.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

**Soluzione:** l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè  $x^2 - 5x + 7 > 0$ . L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè  $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$ , quindi  $x^2 - 5x + 7 \geq 1$ . La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è  $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ .

**Esercizio 6.** Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

**Soluzione:** l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè  $e^x - 1 \geq 0$  e quindi  $x \geq 0$ . Il campo di esistenza è  $[0, +\infty)$ .

**Esercizio 7.** Date le funzioni  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln(x - 2)$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Esercizio 7.** Date le funzioni  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln(x - 2)$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Soluzione:**  $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$  definita per  $x > 2$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$  definita per  $x > \ln 2$

**Esercizio 7.** Date le funzioni  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln(x - 2)$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Soluzione:**  $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$  definita per  $x > 2$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$  definita per  $x > \ln 2$

**Esercizio 8.** Date le funzioni  $f(x) = -x^3$  e  $g(x) = \ln x$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Esercizio 7.** Date le funzioni  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = \ln(x - 2)$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Soluzione:**  $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$  definita per  $x > 2$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$  definita per  $x > \ln 2$

**Esercizio 8.** Date le funzioni  $f(x) = -x^3$  e  $g(x) = \ln x$ ,

- (a) determinare il campo di esistenza di  $f \circ g$  e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di  $g \circ f$  e scriverne l'espressione.

**Soluzione:**  $(f \circ g)(x) = -(\ln x)^3$  definita per  $x > 0$

$(g \circ f)(x) = \ln(-x^3)$  definita per  $x < 0$

**Esercizio 9.** Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}; \quad f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}.$$

**Esercizio 9.** Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}; \quad f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}.$$

**Esercizio 10.** Date le funzioni

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = \sqrt{1 + x},$$

scrivere le espressioni di  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , precisandone il campo di esistenza.

**Esercizio 9.** Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}; \quad f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}.$$

**Esercizio 10.** Date le funzioni

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = \sqrt{1 + x},$$

scrivere le espressioni di  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , precisandone il campo di esistenza.

**Esercizio 11.** Date le funzioni

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = x^2,$$

scrivere le espressioni di  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , precisandone il campo di esistenza.

### Soluzione Esercizio 9:

La funzione  $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}$  è definita per  $x \neq \frac{5}{3}$

La funzione  $f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}$  è definita per  $x \neq 0$

### Soluzione Esercizio 10:

$(f \circ g)(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$  definita per  $x \in (0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 + \ln(x-1)}$  definita per  $x \in [1 + \frac{1}{e}, +\infty)$

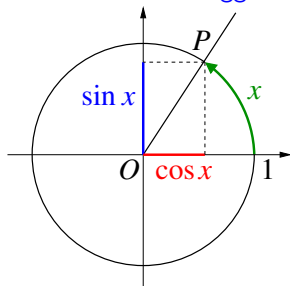
### Soluzione Esercizio 11:

$(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 1)$  definita per  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = (\ln(x-1))^2$  definita per  $x \in (1, +\infty)$

# Funzioni seno e coseno

Circonferenza di raggio 1



Dato  $x \in \mathbb{R}$  si costruisce il punto  $P$  partendo da  $(1,0)$  e percorrendo un arco di lunghezza  $|x|$

- in senso *antiorario* se  $x > 0$
- in senso *orario* se  $x < 0$

Per definizione  $P = (\cos x, \sin x)$ .

**Relazione fondamentale:**

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di  $\sin x$ :

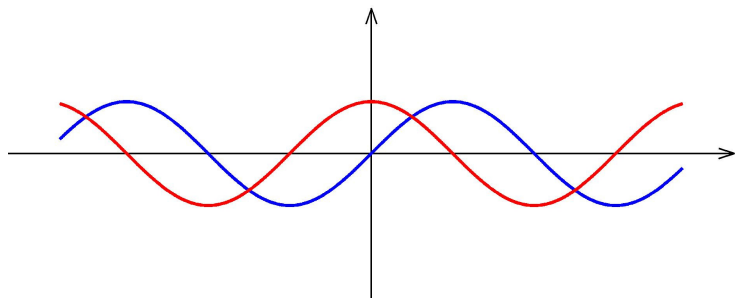
- periodica:  
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x > 0$  per  $x \in (0, \pi)$   
 $\sin x < 0$  per  $x \in (\pi, 2\pi)$
- è crescente in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  e in  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
- è decrescente in  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- dispari:  $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- alcuni valori notevoli:  
 $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$   
 $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

# Funzioni seno e coseno

Dalle proprietà precedenti si ottiene il seguente grafico per  $y = \sin x$ .

Il grafico  $y = \cos x$  si ottiene per traslazione poiché si ha

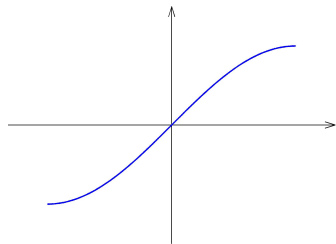
$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



# Funzione arcoseno

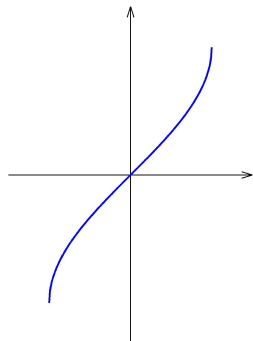
La funzione  $f(x) = \sin x$  definita per  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  a valori in  $[-1, 1]$  è biunivoca.

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  è la sua funzione inversa.



$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$



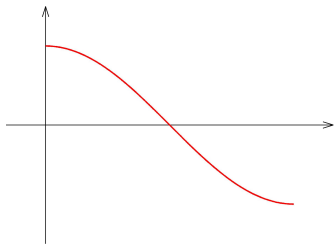
$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$

# Funzione arcocoseno

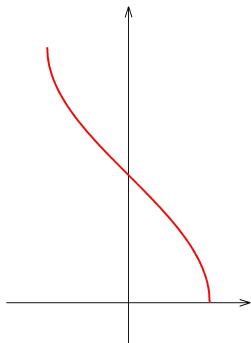
La funzione  $g(x) = \cos x$  definita per  $x \in [0, \pi]$  a valori in  $[-1, 1]$  è biunivoca.

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  è la sua funzione inversa.



$$g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$g(x) = \cos x$$



$$g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$g^{-1}(x) = \arccos x$$

# Funzione tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

È una funzione periodica di periodo  $\pi$  e dispari.

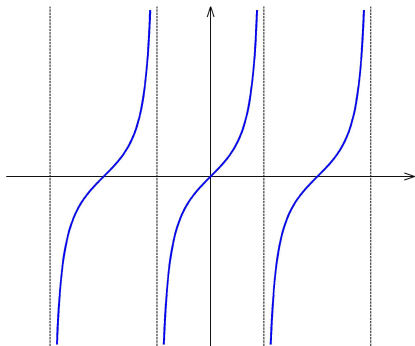
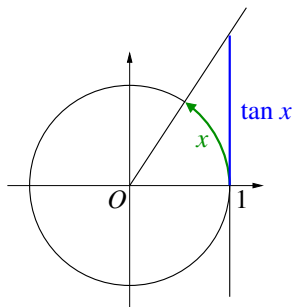
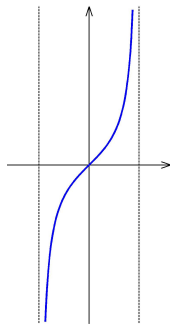


grafico di  $f(x) = \tan x$

# Funzione arcotangente

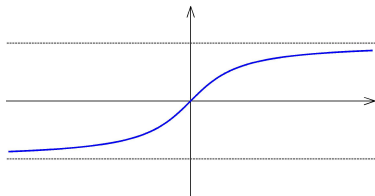
La funzione  $f(x) = \tan x$  definita per  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  a valori in  $\mathbb{R}$  è biunivoca.

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  è la sua funzione inversa.



$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

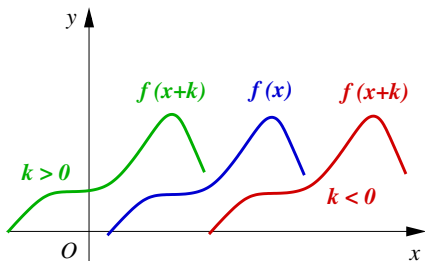
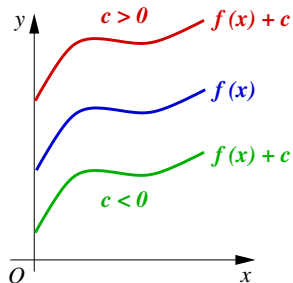
$$f(x) = \tan x$$



$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$f^{-1}(x) = \arctan x$$

# Traslazioni



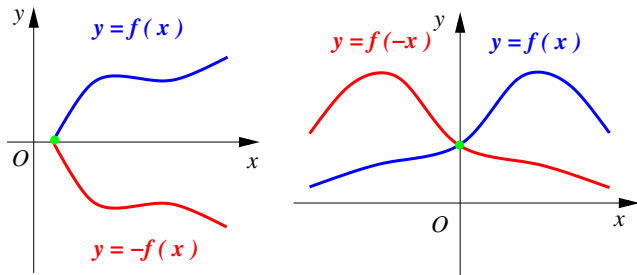
## Traslazioni verticali:

$y = f(x) + c$  traslazione verticale verso l'alto se  $c > 0$ , verso il basso se  $c < 0$

## Traslazioni orizzontali:

$y = f(x + k)$  traslazione orizzontale verso sinistra se  $k > 0$ , verso destra se  $k < 0$

**Esercizio:** disegnare il grafico delle funzioni  $y = 1 + \ln x$ ,  $y = |x| - 3$ ,  
 $y = e^x + 1$ ,  $y = x^2 - 1$ ,  $y = \ln(x - 1)$ ,  $y = |x + 2|$ ,  $y = e^{x+3}$



## Riflessione rispetto all'asse $x$ :

$y = -f(x)$  i punti di intersezione con l'asse  $x$  restano invariati

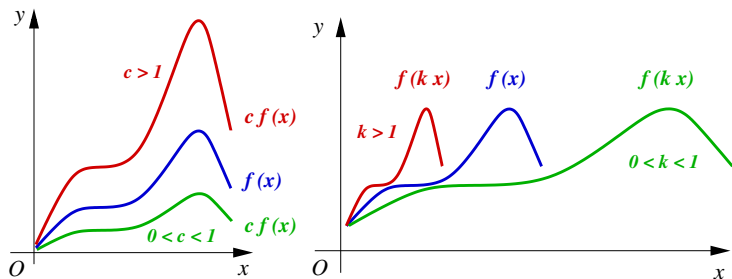
**Esercizio:** disegnare il grafico di  $y = -|x|$ ,  $y = -\frac{1}{x}$ ,  $y = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$

## Riflessione rispetto all'asse $y$ :

$y = f(-x)$  i punti di intersezione con l'asse  $y$  restano invariati

**Esercizio:** disegnare il grafico di  $y = e^{-x}$ ,  $y = \sqrt{-x}$

# Dilatazioni



## Cambio di scala sull'asse $y$ :

$y = c \cdot f(x)$  compressione per  $0 < c < 1$ , dilatazione per  $c > 1$

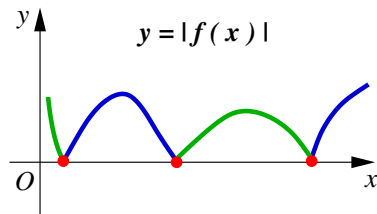
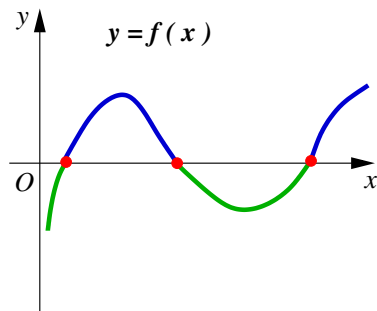
**Esercizio.** Disegnare i seguenti grafici:  $y = 2 \sin(x)$ ,  $y = \frac{1}{2} \sin(x)$ ,  $y = 5e^x$

## Cambio di scala sull'asse $x$ :

$y = f(k \cdot x)$  dilatazione per  $0 < k < 1$ , compressione per  $k > 1$

**Esercizio.** Disegnare i seguenti grafici:  $y = \sin(2x)$ ,  $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ ,  $y = e^{2x}$

# Valore assoluto



$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{riflessione})$$

**Nota:** gli zeri della funzione restano invariati

**Esercizio:** disegnare il grafico di  $y = |2x + 1|$ ,  $y = |x^3|$ ,  $y = |\ln x|$

**Esercizio 1.** Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 0, \\ |x - 1| & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per  $x \in (-\infty, 4]$ .

**Esercizio 2.** Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{per } x \leq 1, \\ \ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per  $x \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{per } x \leq 2, \\ \ln\left(\frac{1}{2}x\right) & \text{per } x > 2. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per  $x \in [-3, +\infty)$ .

**Esercizio 4.** Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{per } x \leq \frac{1}{2}, \\ \ln(2x) & \text{per } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per  $x \in [-1, +\infty)$ .

**Esercizio 5.** Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{per } x \leq 1, \\ -\ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per  $x \in [-2, +\infty)$ .