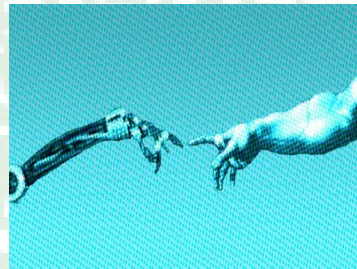


Valutazione dell'INCERTEZZA di misura



Outline

- **La misurazione come processo aleatorio**
- **Istogrammi e pdf**
- **Momenti di una variabile aleatoria**
- **Media e varianza campionarie**
- **Valutazione Incertezza cat. A e cat. B**
- **Legge di propagazione delle incertezze nelle misure indirette**

La misurazione come processo aleatorio

La misurazione è un processo sperimentale e intervengono diversi fattori che fanno sì che, ripetendo la misurazione sullo stesso misurando più volte, si ottengono risultati diversi.

Pertanto al risultato di misura è indispensabile associare un certo grado di indeterminazione.

Tale grado di indeterminazione è definito come **incertezza di misura**

I fattori che influenzano la misurazione si distinguono in:

- **Effetti sistematici**

Questi si presentano sempre con lo stesso segno, possono essere valutati e compensati, correggendo opportunamente il risultato della misurazione.

- **Effetti aleatori**

Questi agiscono come un contributo casuale, di segno qualunque, in dipendenza da fattori non prevedibili.

Essi non possono essere stimati a priori, ma si può stimare un intervallo all'interno del quale ricade il misurando a causa dell'intervento di tali effetti.

La misurazione come processo aleatorio

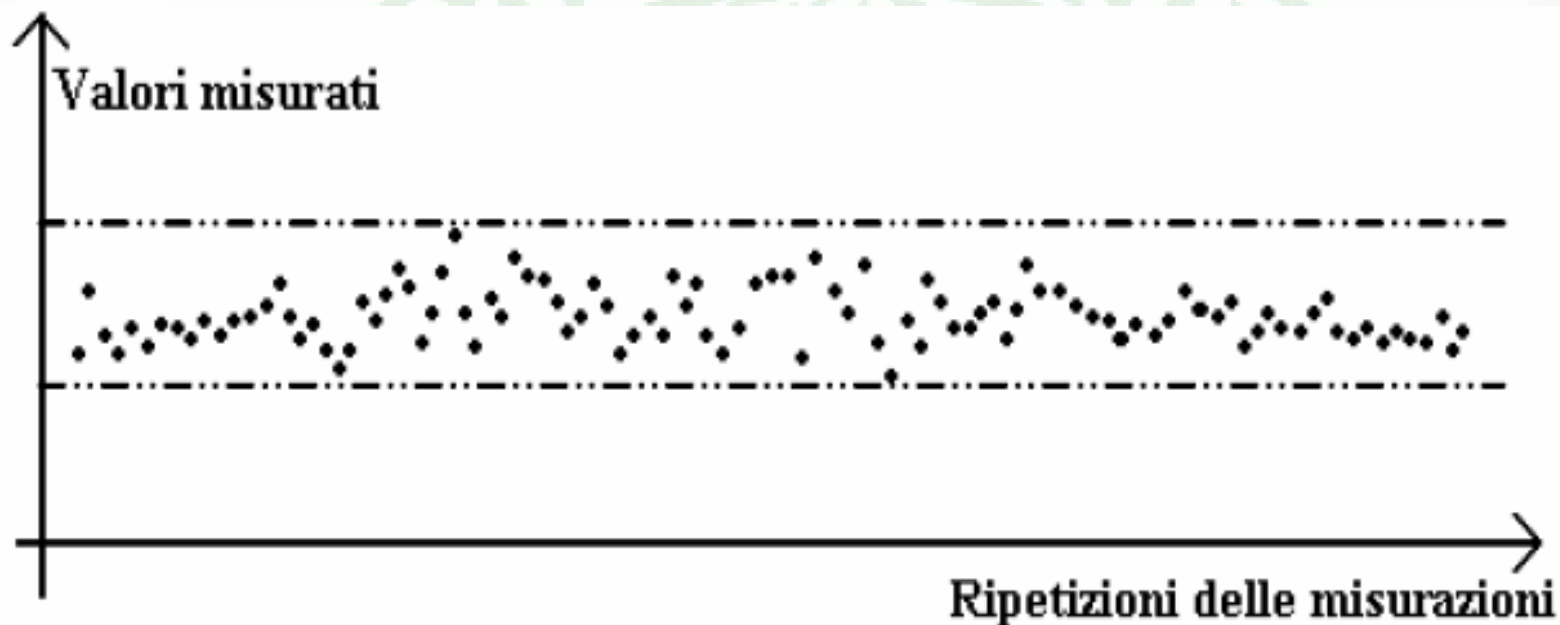
Poiché gli effetti sistematici possono essere compensati, dobbiamo considerare solo gli effetti aleatori.

Il risultato di un processo di misurazione può essere visto come una variabile aleatoria.

Se si effettuano misurazioni ripetute su di una stessa grandezza, si verifica sperimentalmente che le misurazioni non producono sempre gli stessi risultati. Però ci accorgeremmo che le letture ottenute sono comprese all'interno di una fascia di valori.

Maggiore è il numero di misurazioni eseguite, maggiore è il grado di fiducia che si può porre nell'ipotesi che valore del misurando ricada all'interno di questa fascia di valori

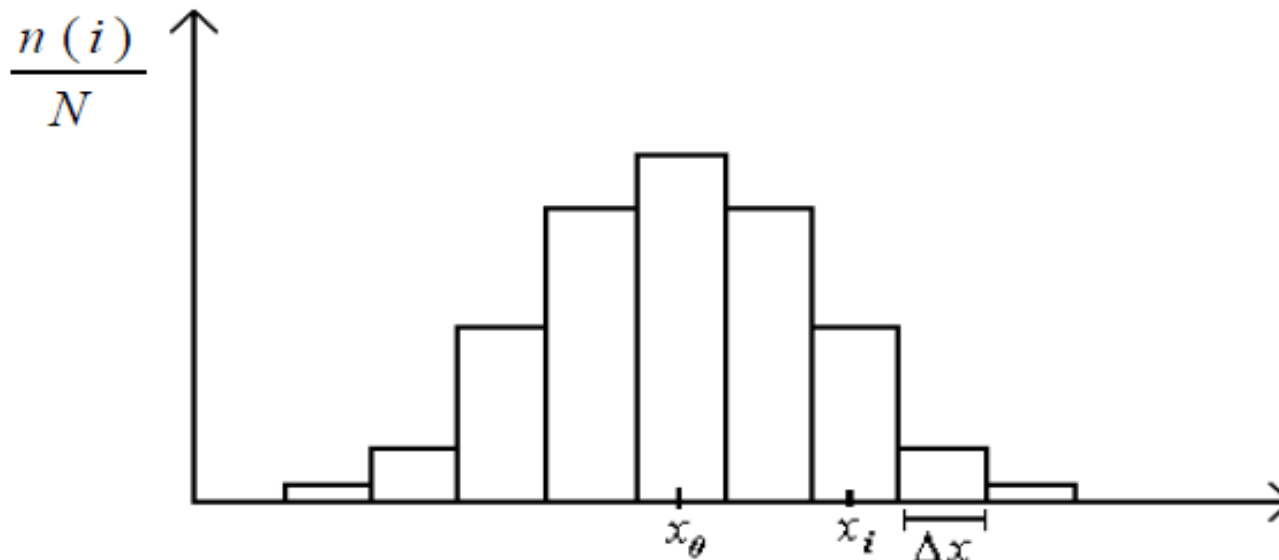
La misurazione come processo aleatorio



Per stimare il valore di un misurando è necessario ripetere un certo numero di volte la procedura di misurazione e realizzare una analisi statistica sui risultati ottenuti.

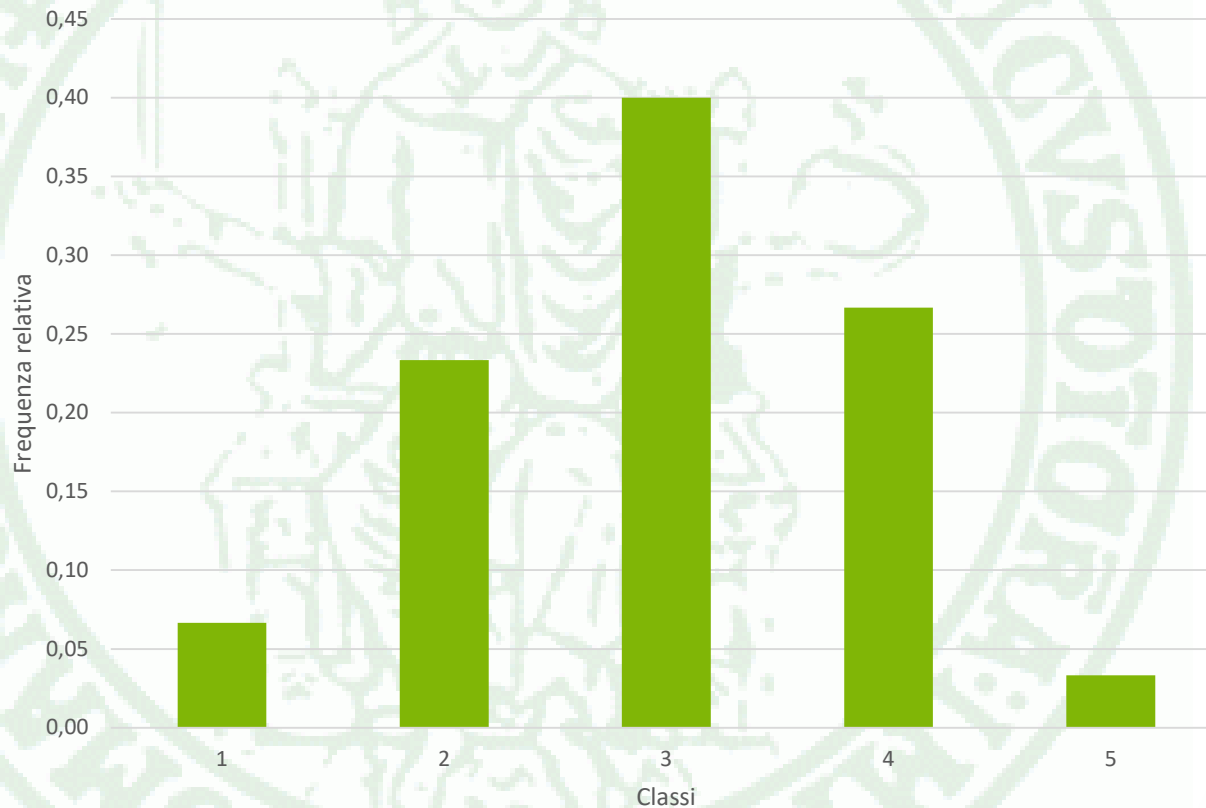
La misurazione come processo aleatorio

Possiamo considerare la lettura minima e la massima, individuando un intervallo. Suddividiamo questo in più sottointervalli e contiamo quanti valori sono in ciascuna classe, ottenendo un **istogramma del numero relativo di occorrenze**. Relativo perché lo rapportiamo al numero complessivo di esperimenti



id	V_c
1	2,94
2	2,52
3	2,26
4	2,10
5	2,02
6	2,10
7	2,27
8	2,44
9	2,36
10	2,36
11	2,36
12	2,19
13	2,44
14	2,10
15	2,53
16	2,44
17	2,53
18	2,10
19	2,02
20	2,27
21	2,44
22	2,53
23	2,70
24	2,70
25	2,53
26	1,85
27	1,93
28	2,36
29	2,52
30	2,27

Un caso reale: Taratura di un voltmetro analogico



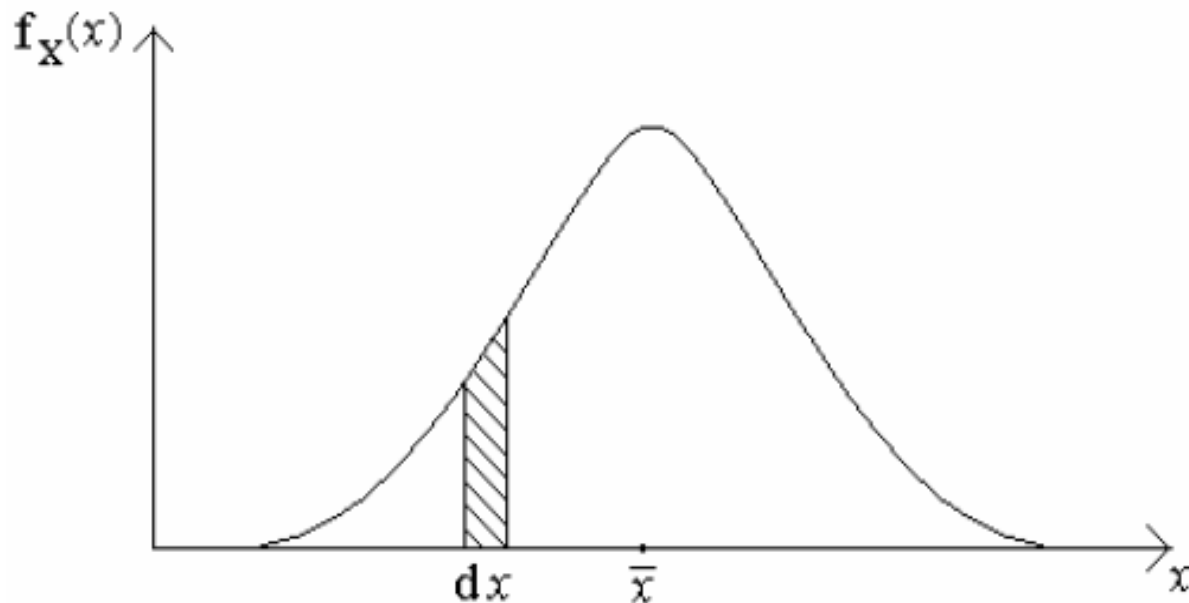
Il valore meglio rappresentato deve collocarsi nell'intervallo con area maggiore

La misurazione come processo aleatorio

In definitiva: il risultato di una misurazione non è uno scalare ma una **variabile aleatoria**, ossia una variabile che può assumere diversi valori e a intervalli limitati dei possibili valori è possibile associare una probabilità.

Alla variabile aleatoria è associata la **funzione densità di probabilità (pdf)**

La pdf esprime la probabilità che ha la variabile aleatoria X di essere compresa tra il valore di x e $x+dx$



Media Statistica e Media Campionaria

Il parametro fondamentale per caratterizzare una variabile aleatoria è la **media statistica** definita come:

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_x(x) dx$$

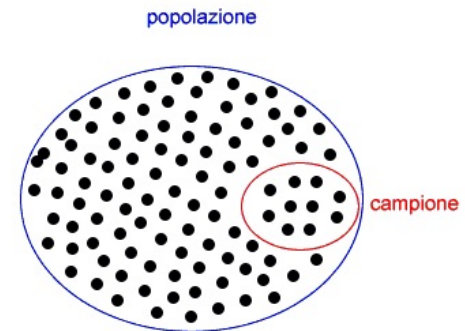
Nel caso di una misurazione non abbiamo una pdf (caso continuo) ma abbiamo un **campione** della popolazione costituito solo da N letture.

In tal caso dobbiamo considerare la seguente espressione:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Tale valore esprime la **media campionaria** (o media sperimentale) che non è la media statistica ma, se N è elevato, ne costituisce una buona stima.

Questa sarà il **valore nominale da attribuire al misurando**



Varianza Campionaria

L'informazione relativa alla dispersione di una variabile aleatoria è definita dalla **varianza**, definita come:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f_x(x) dx$$

Nel caso della variabile aleatoria si conoscano solo un numero finito di valori N (come nel caso delle letture di uno strumento) è utile definire la **varianza campionaria**:

$$s^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

che, al crescere di N, costituisce sempre più una buona stima di σ^2

Deviazione Standard

Nell'ambito delle misurazioni non è comodo ragionare con la varianza poiché questa ha un'unità di misura che è il quadrato dell'unità di misura del misurando. Per tale motivo, più frequentemente si utilizza la **deviazione standard** (o **scarto quadratico medio**), definito come la radice quadrata positiva della varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f_x(x) dx}$$

La radice quadrata positiva della varianza sperimentale è detta **scarto tipo sperimentale**, e caratterizza la variabilità dei valori osservati x_i o, più specificatamente, la loro dispersione intorno alla media \bar{x} .

$$\left(s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

Ricapitolando...

Media Statistica

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x * pdf(x) dx$$

Media Campionaria (stimatore di μ)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Varianza Statistica

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f_x(x) dx$$

Varianza campionaria (stimatore di σ)

$$s^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

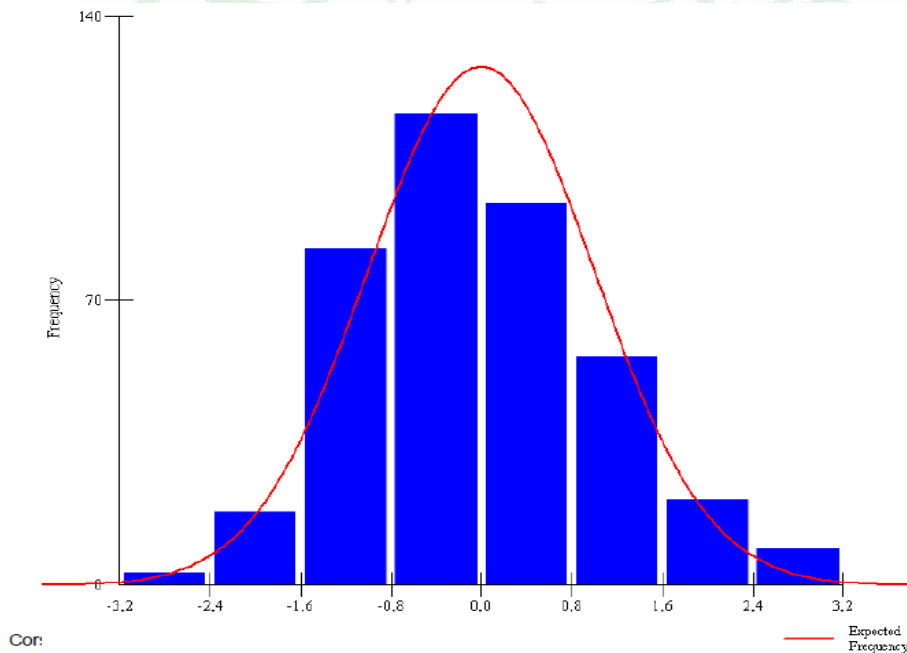
La pdf gaussiana

Per il teorema del limite centrale, la distribuzione di probabilità di un fenomeno aleatorio complesso (come una misurazione) in cui confluiscono molteplici contributi (e quindi si compongono diverse funzioni densità di probabilità), tende a essere una distribuzione gaussiana, la cui funzione di densità di probabilità è:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

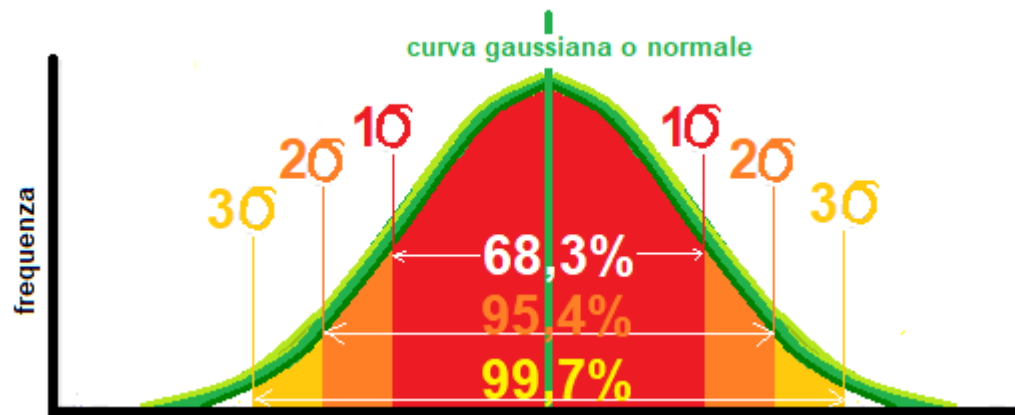
dove μ è la media statistica e σ è la deviazione standard, la quale, fornisce il grado di dispersione della variabile aleatoria intorno al valore medio.

La pdf gaussiana

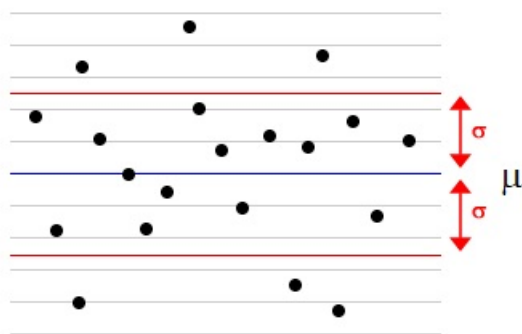


particolare si può osservare che con l'aumentare dei dati considerati, tale istogramma converge ad una curva gaussiana (curva a campana).

La pdf gaussiana



La probabilità che la grandezza fisica X , definita mediante il modello gaussiano, abbia valori all'interno dell'intervallo centrato in μ e di ampiezza 2σ (ossia da -1σ a $+1\sigma$) è circa del 68%:



Un esempio...

Incertezza tipo

L'incertezza associata ad una misurazione, in presenza di risultati provenienti da misurazioni ripetute, è dunque la radice quadrata positiva della varianza campionaria: dove u prende il nome di **incertezza tipo (standard)**.

A partire dall'incertezza tipo è possibile calcolare l'**incertezza estesa** U la quale è definita come il prodotto dell'incertezza tipo per un fattore numerico k detto **fattore di copertura**, che può avere valori compresi tra 1 e 4:

$$U = ku$$

All'incertezza tipo e all'incertezza estesa vengono assegnati i pedici i quali hanno la funzione di associare all'incertezza la variabile aleatoria che si sta considerando (nel nostro caso la variabile aleatoria è X e dunque l'incertezza tipo e l'incertezza estesa sono rispettivamente u_x e U_x).

Espressione della misura di una grandezza:

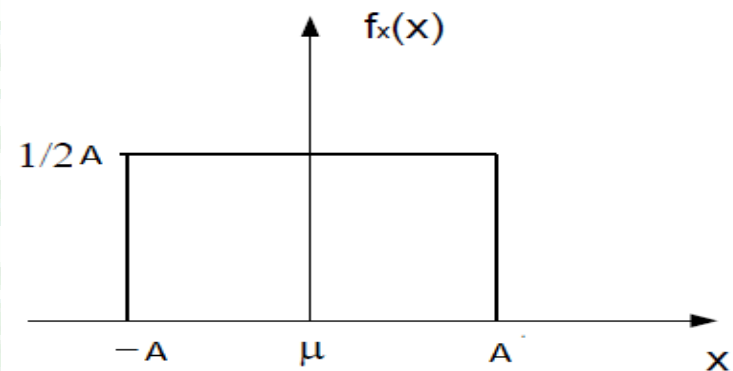
È preferibile dichiarare il risultato numerico nel modo seguente:
(valore \pm incertezza) u.d.m. dove:

- il *valore* è \bar{x} , cioè la media campionaria(/stimatore di media aritmetica)
- l'*incertezza* è l'incertezza estesa $U=k*u$, dove k è il fattore di copertura

$$\Rightarrow (\bar{x} \pm k * u)u. d. m.$$

La pdf uniforme

Nella *distribuzione uniforme (rettangolare)*, di semiampiezza A , la funzione densità di probabilità è rappresentata da un rettangolo di base $2A$ ed altezza $1/(2A)$ (dovendo la pdf avere area unitaria), ciò vuol dire che la pdf è definita nel seguente modo:



$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & |x| > A \\ \frac{1}{2A} & |x| \leq A \end{cases}$$

La pdf uniforme

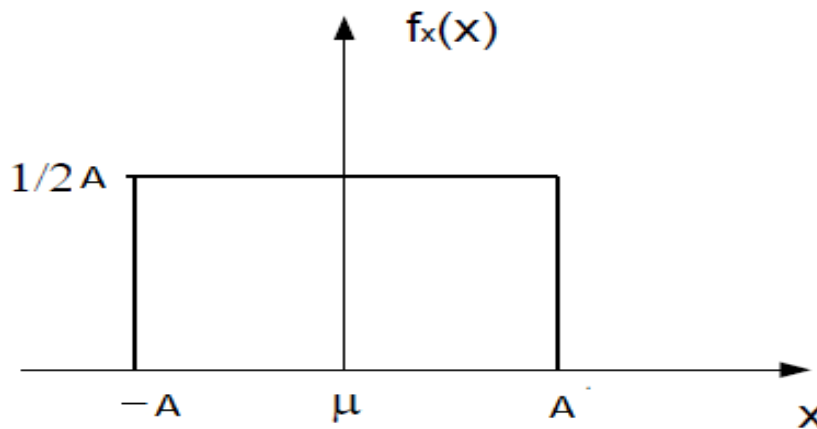
Calcoliamo μ e σ :

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_x(x) dx = \int_{-A}^{+A} x * \frac{1}{2A} dx = \frac{1}{2A} * \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-A}^{+A} = \frac{1}{2A} * \left(\frac{A^2 - A^2}{2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f_x(x) dx = \int_{-A}^{+A} (x)^2 * \frac{1}{2A} * dx \\ &= \frac{1}{2A} * \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-A}^{+A} = \frac{1}{2A} * \left(\frac{A^3 + A^3}{3} \right) = \frac{1}{2A} * \left(\frac{2A^3}{3} \right) = \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{A^2}{3} \Rightarrow \sigma = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

La pdf uniforme



$$\sigma = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

La pdf uniforme

il livello di fiducia è determinato mediante il seguente integrale:

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f_x(x) dx = \int_{-\frac{A}{\sqrt{3}}}^{+\frac{A}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2A} * dx = \frac{1}{2A} * (x) \Big|_{-\frac{A}{\sqrt{3}}}^{+\frac{A}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2A} * 2 * \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58$$

Ovvero un intervallo fiduciario del 58% (pertanto non ha senso parlare di k...)

Incertezza categoria A

Valutazione dell'incertezza di categoria A : è il termine che si ottiene attraverso l'analisi statistica dei risultati provenienti da misurazioni ripetute. Il risultato di misura sarà costituito dalla media sperimentale delle N misure.

Per tale motivo, l'incertezza proveniente da queste misure è legata al fatto che, poiché N è finito, è possibile ottenere solo una stima della media statistica (che rappresenta il valore atteso del misurando) e che tale stima migliora all'aumentare di N .

Dunque come termine di incertezza si utilizza il rapporto tra lo scarto quadratico medio (scarto tipo sperimentale) e la radice quadrata del numero di prove effettuate:

$$u_A = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad \text{dove} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Il termine u_A è detto **incertezza tipo** di categoria A. Un approccio di questo tipo è definibile, per quanto detto, un approccio *a posteriori* in quanto la valutazione di tali parametri è possibile solo dopo il rilevamento dei risultati delle misurazioni ripetute nelle stesse condizioni sperimentali.

Incertezza categoria B

Valutazione dell'incertezza di categoria B: è il termine ottenuto tramite informazioni disponibili sulla misura senza effettuare prove ripetute.

Esempi di tali informazioni sono: dati acquisiti in misurazioni precedenti, esperienza dell'operatore, informazioni sulla strumentazione utilizzata. Questo è, quindi, un approccio *a priori*.

Incertezza categoria B: esempio



Incertezza composta

Le cause di incertezza in un sistema di misura possono essere molteplici e possono essere valutate in modo differente a seconda che si eseguano misure ripetute (valutazione di categoria A) o che ci si affidi a conoscenze acquisite in vario modo (valutazione di categoria B). La norma prescrive di combinare quadraticamente le incertezze tipo delle varie categorie con una relazione del tipo:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_{1B}^2 + u_{2B}^2 + \dots + u_{nB}^2}$$

in cui u_A è l'incertezza tipo di categoria A ed i termini u_{iB} sono le incertezze tipo di categoria B. Il termine u dell'espressione precedente fornisce l'**incertezza composta** della misurazione.

Esempio: Interpretazione delle specifiche strumentali descritte nel manuale di uno strumento di misura

Accuracy Specifications \pm (% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001
Resistance [4]	100.0000 Ω	1 mA	0.0030 + 0.0030	0.008 + 0.004	0.010 + 0.004	0.0006 + 0.0005
	1.000000 kΩ	1 mA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	10.00000 kΩ	100 μA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	100.0000 kΩ	10 μA	0.0020 + 0.0005	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0006 + 0.0001
	1.000000 MΩ	5 μA	0.002 + 0.001	0.008 + 0.001	0.010 + 0.001	0.0010 + 0.0002
	10.00000 MΩ	500 nA	0.015 + 0.001	0.020 + 0.001	0.040 + 0.001	0.0030 + 0.0004
	100.0000 MΩ	500 nA // 10 MΩ	0.300 + 0.010	0.800 + 0.010	0.800 + 0.010	0.1500 + 0.0002
DC Current	10.00000 mA	< 0.1 V	0.005 + 0.010	0.030 + 0.020	0.050 + 0.020	0.002 + 0.0020
	100.0000 mA	< 0.6 V	0.01 + 0.004	0.030 + 0.005	0.050 + 0.005	0.002 + 0.0005
	1.000000 A	< 1 V	0.05 + 0.006	0.080 + 0.010	0.100 + 0.010	0.005 + 0.0010
	3.000000 A	< 2 V	0.10 + 0.020	0.120 + 0.020	0.120 + 0.020	0.005 + 0.0020

Multimetro HP34401A : il costruttore garantisce 4σ (pdf gaussiana)

Esempio: Interpretazione delle specifiche strumentali descritte nel manuale di uno strumento di misura

DC CHARACTERISTICS

CONDITIONS: MED (1 PLC)1 or SLOW (10 PLC)
or MED (1 PLC) with filter of 10

Accuracy: \pm (ppm of reading + ppm of range)
(ppm = parts per million) (e.g., 10ppm = 0.001%)

FUNCTION	RANGE	RESOLUTION	TEST CURRENT OR BURDEN VOLTAGE	INPUT RESISTANCE	Accuracy			TEMPERATURE COEFFICIENT 0°-18°C & 28°-50°C
					24 HOUR ¹⁴ 23°C \pm 1°	90 DAY 23°C \pm 5°	1 YEAR 23°C \pm 5°	
VOLTAGE	100.0000 mV	0.1 μ V		> 10 G Ω	30 + 30	40 + 35	50 + 35	2 + 6
	1.000000 V	1.0 μ V		> 10 G Ω	15 + 6	25 + 7	30 + 7	2 + 1
	10.00000 V	10 μ V		> 10 G Ω	15 + 4	20 + 5	30 + 5	2 + 1
	100.0000 V	100 μ V		10 M Ω \pm 1%	15 + 6	30 + 6	45 + 6	5 + 1
	1000.000 V ⁹	1 mV		10 M Ω \pm 1%	20 + 6	35 + 6	45 + 6	5 + 1
RESISTANCE ¹⁵	100.0000 Ω	100 μ Ω	1 mA		30 + 30	80 + 40	100 + 40	8 + 6
	1.000000 k Ω	1 m Ω	1 mA		20 + 6	80 + 10	100 + 10	8 + 1
	10.00000 k Ω	10 m Ω	100 μ A		20 + 6	80 + 10	100 + 10	8 + 1
	100.0000 k Ω	100 m Ω	10 μ A		20 + 6	80 + 10	100 + 10	8 + 1
	1.000000 M Ω	1 Ω	10 μ A		20 + 6	80 + 10	100 + 10	8 + 1
	10.00000 M Ω ¹¹	10 Ω	700 nA // 10M Ω		150 + 6	200 + 10	400 + 10	25 + 1
	100.0000 M Ω ¹¹	100 Ω	700 nA // 10M Ω		800 + 30	1500 + 30	1500 + 30	150 + 1
CURRENT	10.00000 mA	10 nA	< 0.15 V		60 + 15	300 + 40	500 + 40	50 + 5
	100.0000 mA	100 nA	< 0.03 V		100 + 150	300 + 400	500 + 400	50 + 50
	1.000000 A	1 μ A	< 0.3 V		200 + 15	500 + 40	800 + 40	50 + 5
	3.000000 A	10 μ A	< 1 V		1000 + 10	1200 + 15	1200 + 15	50 + 5
CONTINUITY 2W	1 k Ω	100 m Ω	1 mA		40 + 100	100 + 100	120 + 100	8 + 1
DIODE TEST	3.00000 V	10 μ V	1 mA		20 + 6	30 + 7	40 + 7	8 + 1
	10.00000 V	10 μ V	100 μ A		20 + 6	30 + 7	40 + 7	8 + 1
	10.00000 V	10 μ V	10 μ A		20 + 6	30 + 7	40 + 7	8 + 1

Multimetro Keythley 2000 : il costruttore garantisce **non dice nulla...**

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

Indichiamo con y la grandezza fisica di cui vogliamo conoscere la misura. Esso può essere espresso come funzione di n grandezze misurabili in maniera diretta:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Siano $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$ i valori ottenuti dalle misurazioni ed

u_1, u_2, \dots, u_N le incertezze associate alle misurazioni dirette.

Si arriva a dimostrare che:

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}} \right)^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{\bar{x}} * c_{ik} u_i u_k$$

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

Nel nostro corso, per semplicità didattica, supporremo che $c_{ik} = 0$ ossia ipotizzeremo che le grandezze sono statisticamente indipendenti (cioè le grandezze sono *incorrelate*):

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}} \right)^2 u_i^2$$

Da cui è possibile ricavare la **legge di propagazione delle incertezze**:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}} \right)^2 u_i^2}$$

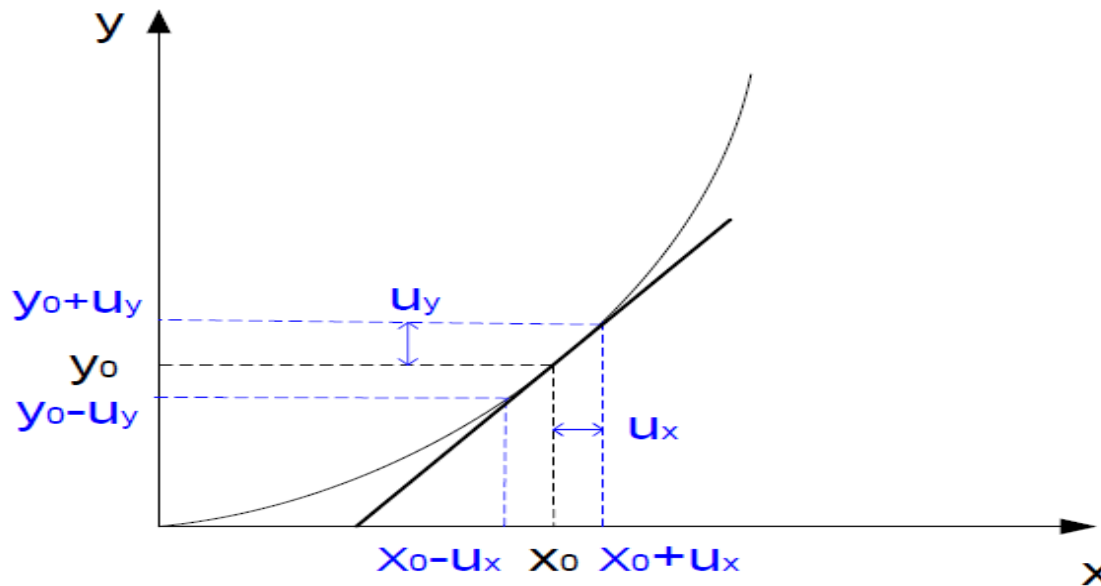
Dove le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono dette **coefficienti di sensibilità**.

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

Espressione della **legge di propagazione delle incertezze con approccio deterministico**:

$$\Delta_y = \sum_i \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\bar{x}} \right| \Delta_{x_i}$$

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette



Interpretazione geometrica nel caso monodimensionale

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

E' inoltre possibile dimostrare che l'incertezza relativa associato a una grandezza fisica che è il risultato del prodotto, o del quoziente o di una combinazione di essi, fra due o più grandezze, ciascuna misurata con la propria incertezza, si ottiene sommando le incertezze relative delle singole grandezze.

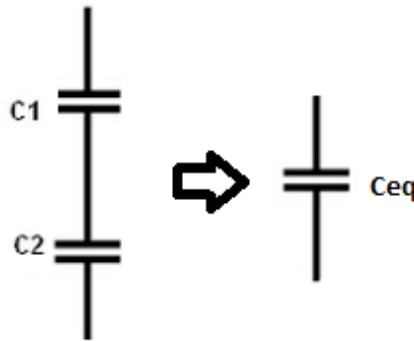
$$y = \frac{a * b}{c * d}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c + \varepsilon_d$$

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

Esempio di applicazione:



Consideriamo due condensatori:

$C1 = 1\text{nF} \pm 1\%$ (Accuracy fornita da costruttore)

$C2 = 0,5\text{ nF} \pm 2\%$ (Incertezza estesa con livello di fiducia del 95%)

Vogliamo esprimere la misura del valore del condensatore equivalente visto ai capi dei due condensatori posti in serie.

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ u_{eq} = \sqrt{\left(\frac{\partial C_{eq}}{\partial C_1} * u_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial C_{eq}}{\partial C_2} * u_2 \right)^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} C_{eq} &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ &= \frac{1nF * 0,5nF}{1nF + 0,5nF} = \frac{0,5(nF)^2}{1,5nF} = \frac{1}{3}nF \end{aligned}$$

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

$$\begin{aligned}u_{eq} &= \sqrt{\left(\frac{\partial C_{eq}}{\partial C_1} * u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial C_{eq}}{\partial C_2} * u_2\right)^2} \\&= \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial C_1} \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) * u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial C_2} \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) * u_2\right)^2} \\&= \sqrt{\left(\frac{C_2 * (C_1 + C_2) - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} * u_1\right)^2 + \left(\frac{C_1 * (C_1 + C_2) - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} * u_2\right)^2} \\&= \sqrt{\left(\frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} * u_1\right)^2 + \left(\frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} * u_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{C_{eq}^2}{C_1^2} * u_1\right)^2 + \left(\frac{C_{eq}^2}{C_2^2} * u_2\right)^2} \\&= \sqrt{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 * u_1\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 * u_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9} * u_1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} * u_2\right)^2}\end{aligned}$$

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

Calcoliamo u_1 e u_2 .

Per u_1 è stata fornita l'Accuracy e nell'ipotesi di distribuzione uniforme (caso peggiore) di semiampiezza pari all'Accuracy, si avrà dunque che l'incertezza tipo u_1 :

$$u_1 = \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{1\% \text{ di } 1nF}{\sqrt{3}} = \frac{10pF}{\sqrt{3}}$$

Per u_2 è stata fornita l'incertezza estesa con livello di fiducia del 95%: nell'ipotesi di distribuzione gaussiana l'incertezza estesa è dunque ottenuta moltiplicando per un fattore di copertura $k=2$ l'incertezza tipo; si avrà dunque che l'incertezza tipo u_2 :

$$u_2 = \frac{U_{95\%}}{k} = \frac{2\% \text{ di } 0,5nF}{2} = \frac{10pF}{2} = 5pF$$

Legge di propagazione delle incertezze nelle misurazioni indirette

Allora:

$$\mu_{eq} = \sqrt{\left(\frac{1}{9} * u_1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} * u_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9} * \frac{10pF}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{9} * 5pF\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{243} + \frac{400}{81}} pF \sim 2pF$$

$$\Rightarrow C_{eq} = (0,333 \pm 0,002)[nF]$$

$$C_{eq} = (333 \pm 2)[pF]$$