

Controllo ottimo

Alfredo Pironti

Maggio 2008

Il Controllo Ottimo

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

L'equazione alle differenze di Riccati

Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto

Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo

Riferimenti sul controllo ottimo

Il Controllo Ottimo

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Problemi

lineari-quadratici: il caso tempo discreto

L'equazione alle differenze di Riccati

Controllo LQ: il caso stazionario

tempo-discreto

Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi

lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Controllo LQ: il caso stazionario

tempo-continuo

Riferimenti sul controllo ottimo

Il Controllo Ottimo

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Assegnato un sistema dinamico descritto dall'equazione alle differenze

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k),$$

dove $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ ed una funzione obiettivo

$$J(x_0, u) = \sum_{i=0}^N g_k(x_{k+1}, u_k, x_k),$$

la teoria del controllo ottimo affronta il problema di determinare la sequenza *ottima* $u^* = u_0^*, u_1^*, \dots, u_N^*$, che minimizzi $J(x_0, u)$. In altri termini

$$u^* = \arg \min_u J(x_0, u).$$

Questo problema può essere risolto ricorsivamente. Si noti infatti che fissato x_N , il valore di u_N influenza soltanto x_{N+1} , u_N^* può quindi essere scelto come

$$u_N^* = \arg \min_{u_N} g_N(x_{N+1}, u_N, x_N) = \arg \min_{u_N} g_N(f_N(x_N, u_N), u_N, x_N).$$

A questo punto il calcolo di u_N^* si riconduce alla soluzione di un problema di ottimizzazione statica (che si suppone di poter risolvere).

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto
L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo
Riferimenti sul controllo
ottimo

La soluzione di tale problema statico dipenderà ovviamente dal valore assunto da x_N , e quindi risulta

$$u_N^* = \gamma_N(x_N).$$

Analogamente u_{N-1} può essere scelta come

$$\begin{aligned} u_{N-1}^* &= \arg \min_{u_{N-1}} [g_{N-1}(x_N, u_{N-1}, x_{N-1}) + g_N(f_N(x_N, \gamma_N(x_N)), \gamma_N(x_N), x_N)] \\ &= \arg \min_{u_{N-1}} [g_{N-1}(f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}), u_{N-1}, x_{N-1}) \\ &\quad + g_N(f_N(f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}), \gamma_N(f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}))), \\ &\quad \gamma_N(f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})), f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}))], \end{aligned}$$

ottenendo

$$u_{N-1}^* = \gamma_{N-1}(x_{N-1}).$$

Proseguendo lungo questa strada è possibile calcolare l'intera sequenza ottimale di ingresso.

La funzione di costo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto
L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo
Riferimenti sul controllo
ottimo

Se si introduce la *funzione di costo*

$$V_k(x) = \min_{u_k} [g_k(f_k(x, u_k), u_k, x) + V_{k+1}(f_k(x, u_k))] ,$$

risulta possibile scrivere

$$V_0(x_0) = \min_u J(x_0, u)$$

$$u_k^* = \arg \min_{u_k} [g_k(f_k(x, u_k), u_k, x) + V_{k+1}(f_k(x, u_k))] .$$

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo

Controllo LQ: il caso
stazionario

tempo-continuo

Riferimenti sul controllo
ottimo

Consideriamo ora il caso in cui il sistema dinamico considerato sia lineare

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k ,$$

e che la funzione obiettivo sia una funzione quadratica dello stato e dell'ingresso

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left(x_{k+1}^T Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^T R_k u_k \right) ,$$

in cui si assume $Q_k \geq 0$, e $R_k > 0$. In questo caso

$$g_k(x_{k+1}, u_k, x_k) = \frac{1}{2} (x_{k+1}^T Q_k x_{k+1} + u_k^T R_k u_k) .$$

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo
Riferimenti sul controllo
ottimo

Lemma 1 *Date le matrici $R > 0$, Q , S , ed il vettore x , la funzione*

$$J(u) = \frac{1}{2}(x^T Q x + 2x^T S^T u + u^T R u),$$

ha un minimo nel punto

$$u^* = -R^{-1} S x,$$

inoltre

$$J(u^*) = x^T (Q - S^T R^{-1} S) x$$

Dim. Il minimo della funzione J rispetto ad u può essere ricercato imponendo le condizioni necessarie di ottimalità. In questo caso

$$\frac{\partial}{\partial u} J(u) = x^T S^T + u^T R = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = -R^{-1} S x,$$

sostituendo il valore ottenuto per u^* in J è semplice completare la dimostrazione.

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo
Riferimenti sul controllo
ottimo

Passiamo ora a risolvere il problema del controllo ottimo linear quadratico.

$$\begin{aligned} V_N &= \frac{1}{2} \min_{u_N} (x_{N+1}^T Q_{N+1} x_{N+1} + u_N^T R_N u_N) \\ &= \frac{1}{2} \min_{u_N} \left[x_N^T A_N^T Q_{N+1} A_N x_N + 2x_N^T A_N^T Q_{N+1} B_N u_N \right. \\ &\quad \left. + u_N^T (R_N + B_N^T Q_{N+1} B_N) u_N \right] \end{aligned}$$

Usando il Lemma 1 si ottiene

$$u_N^* = - (R_N + B_N^T Q_{N+1} B_N)^{-1} B_N^T Q_{N+1} A_N x_N$$

$$V_N = x_N^T \left[A_N^T Q_{N+1} A_N - A_N^T Q_{N+1} B_N (R_N + B_N^T Q_{N+1} B_N)^{-1} B_N^T Q_{N+1} A_N \right] x_N .$$

Si definiscano ora le seguenti matrici:

$$S_{N+1} = Q_{N+1}$$

$$P_N = A_N^T S_{N+1} A_N - A_N^T S_{N+1} B_N (R_N + B_N^T S_{N+1} B_N)^{-1} B_N^T S_{N+1} A_N .$$

Si noti che $V_N = x_N^T P_N x_N$.

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto

Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo

Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo

Riferimenti sul controllo
ottimo

Consideriamo ora il calcolo di u_{N-1} .

$$\begin{aligned} V_{N-1} &= \frac{1}{2} \min_{u_{N-1}} (x_N^T Q_N x_N + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} + V_N(x_N)) \\ &= \frac{1}{2} \min_{u_{N-1}} (x_N^T (Q_N + P_N) x_N + u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1}), \end{aligned}$$

Da cui si può ricavare

$$\begin{aligned} u_{N-1}^* &= - (R_{N-1} + B_{N-1}^T S_N B_{N-1})^{-1} B_{N-1}^T S_N A_{N-1} x_{N-1} \\ V_{N-1} &= x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} S_N &= P_N + Q_N \\ P_{N-1} &= A_{N-1}^T S_N A_{N-1} - A_{N-1}^T S_N B_{N-1} (R_{N-1} + B_{N-1}^T S_N B_{N-1})^{-1} B_{N-1}^T S_N A_{N-1}. \end{aligned}$$

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo
Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo
Riferimenti sul controllo
ottimo

Teorema 1 *Il problema di controllo ottimo lineare quadratico, definito dall'equazione di stato*

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$$

e dalla funzione obiettivo

$$J(x_0, u) = \sum_{k=0}^N (x_{k+1}^T Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^T R_k u_k)$$

in cui $R_k > 0$ e $Q_k \geq 0$, è risolto dalla legge di controllo

$$u_k^* = -(R_k + B_k^T S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k x_k,$$

dove

$$S_{N+1} = Q_{N+1}$$

$$S_k = P_k + Q_k$$

$$P_k = A_k^T S_{k+1} A_k - A_k^T S_{k+1} B_k (R_k + B_k^T S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k, \quad k = 0, \dots, N.$$

Inoltre

$$V_0(x_0) = \min_u J(x_0, u) = x_0^T P_0 x_0.$$

L'equazione alle differenze di Riccati

- Il Controllo Ottimo
- Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
- L'equazione alle differenze di Riccati**
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
- Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
- Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
- Il principio del minimo
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
- Riferimenti sul controllo ottimo

In alternativa si può eliminare la matrice P_k , usando la relazione

$$P_k = S_k - Q_k.$$

In questo modo la soluzione del gioco DLQ passa attraverso la soluzione dell'equazione alle differenze

$$S_k = Q_k + A_k^T S_{k+1} A_k - A_k^T S_{k+1} B_k (R_k + B_k^T S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T S_{k+1} A_k,$$

con condizione terminale $S_{N+1} = Q_{N+1}$, tale equazione prende il nome di equazione di *Riccati*.

Controllo LQ: Il caso stazionario tempo-discreto

- Il Controllo Ottimo
- Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
- L'equazione alle differenze di Riccati
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
- Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
- Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
- Il principio del minimo
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
- Riferimenti sul controllo ottimo

Assumiamo adesso che l'equazione di stato sia tempo-invariante:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,$$

che la funzione obiettivo si estenda su un orizzonte temporale infinito, e che le matrici $R > 0$ e $Q \geq 0$ non dipendano dal tempo.

$$J(x_0, u) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1}^T Q x_{k+1} + u_k^T R u_k).$$

L'ipotesi di stazionarietà implica:

- ✓ assegnata la condizione iniziale, e la sequenza d'ingresso, la somma di un numero finito di termini dipendente dall'evoluzione dello stato e dall'ingresso, non dipende dall'istante iniziale e finale, ma solo dalla lunghezza della sommatoria.
- ✓ ne consegue che lo studio del problema LQ su orizzonte infinito può essere studiato facendo tendere a $-\infty$ l'istante iniziale, piuttosto che facendo tendere a $+\infty$ l'istante finale.

Controllo LQ: Il caso stazionario tempo-discreto

- Il Controllo Ottimo
- Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
- L'equazione alle differenze di Riccati
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto**
- Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
- Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
- Il principio del minimo
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
- Riferimenti sul controllo ottimo

In altri termini, la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati, non dipende da k e da N separatamente, ma dipende da $N - k$. Quindi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S(k, N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S(N - k) = \lim_{k \rightarrow -\infty} S(k, N).$$

Nell'ipotesi che l'equazione alle differenze di Riccati ammetta una soluzione di equilibrio (per $k \rightarrow -\infty$), questa potrà essere ottenuta come soluzione dell'equazione algebrica

$$-S + Q + A^T S A - A^T S B (R + B^T Q B)^{-1} B^T S A = 0 \quad (\text{Equazione algebrica di Riccati}).$$

la legge di controllo ottimo sarà anch'essa stazionaria e data da:

$$u_k^* = -(R + B^T Q B)^{-1} S A x_k = -K x_k.$$

Condizioni che assicurano l'esistenza di una soluzione di equilibrio alla equazione di Riccati alle differenze sono la stabilizzabilità della coppia (A, B) e la rivelabilità della coppia (A, C) , dove $C^T C = Q$. Tali condizioni assicurano anche la stabilità della matrice dinamica a ciclo chiuso, data da $A - BK$.

Soluzioni a ciclo aperto e a ciclo chiuso

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a ciclo aperto e a ciclo chiuso
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Assegnato un problema di controllo ottimo la sua soluzione può essere calcolata fuori linea, attraverso l'equazione alle differenze

$$x_{k+1}^* = f_k(x_k^*, \gamma_k(x_k^*)), \quad x_0^* = x_0$$
$$u_k^* = \gamma_k(x_k^*),$$

e quindi applicata *tout-cort* al processo in esame. In alternativa, si può pensare di misurare in linea lo stato del processo, e di calcolare ad ogni passo l'ingresso, usando la relazione

$$u_k = \gamma_k(x_k).$$

Nel primo caso si parla di *controllo ottimo a ciclo aperto*, mentre nel secondo caso si parla di *controllo ottimo a ciclo chiuso*.

Da un punto di vista formale, nel caso di un solo giocatore, le due soluzioni sono assolutamente equivalenti; vedremo invece che nel caso di più giocatori le due soluzioni potranno avere effetti differenti.

Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il Controllo Ottimo

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Problemi

lineari-quadratici: il caso tempo discreto

L'equazione alle differenze di Riccati

Controllo LQ: il caso stazionario

tempo-discreto

Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi

lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Controllo LQ: il caso stazionario

tempo-continuo

Riferimenti sul controllo ottimo

Nel caso tempo-continuo il sistema dinamico è descritto da una equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

in cui $x(t) \in \mathbb{R}^n$, e $u(t) \in \mathbb{R}^m$. La funzione obiettivo è del tipo

$$J(t_0, x_0, u) = q(T, x(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t)) dt.$$

Conviene ora far riferimento al *principio di ottimalità*.

Il principio di ottimalità nel caso tempo continuo

Il Controllo Ottimo

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto

L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario

tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Controllo LQ: il caso stazionario
tempo-continuo

Riferimenti sul controllo ottimo

Teorema 2 (Principio di ottimalità). *Siano*

$$u^*(t) = \arg \min_{\{u(s), s \geq t_0\}} J(t_0, x_0, u), \quad t \in [t_0, T],$$

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(t_0) = x_0, \quad t_1 \in (t_0, T), \quad e$$

$$u^{**}(t) = \arg \min_{\{u(s), s \geq t_1\}} J(t_1, x^*(t_1), u), \quad t \in [t_1, T],$$

allora

$$u^{**}(t) = u^*(t) \quad \forall t \in [t_1, T].$$

Il principio di ottimalità afferma che una strategia di controllo ottima in un intervallo $[t_0, T]$ è ottima anche in ciascun sotto-intervallo $[t_1, T]$, con $t_1 \in (t_0, T)$.

La funzione di costo nel caso tempo continuo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Anche in questo caso è utile definire la funzione di costo

$$V(t, x) = \min_{\{u(s), s \geq t\}} \left[q(T, x(T)) + \int_t^T g(t, x(t), u(t)) dt \right],$$

la quale soddisfa la condizione terminale

$$V(T, x) = q(T, x).$$

Dal principio di ottimalità si ricava che per $t_1 \geq t$ si ha

$$V(t, x) = \min_{\{u(s), s \in [t, t_1]\}} \left[\int_t^{t_1} g(t, x(t), u(t)) dt + V(t_1, x(t_1)) \right]$$

Inoltre assumendo V differenziabile si può ricavare l'equazione di *Hamilton-Jacobi*

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + g(t, x, u) \right].$$

Il problema di ottimizzazione presente al secondo membro dell'equazione di Hamilton-Jacobi è un problema di ottimizzazione statica.

L'equazione di Hamilton-Jacobi

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Teorema 3 *Se una funzione V continua e differenziabile soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi e la condizione terminale $V(T, x(T)) = q(T, x(T))$, allora la strategia di controllo ottima è data da*

$$u^*(t) = \min_u \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + g(t, x, u) \right]$$

La soluzione così ottenuta dipenderà in generale dal valore assunto dal vettore di stato; ne consegue che l'equazione di Hamilton Jacobi porta ad una soluzione del tipo a ciclo chiuso.

Un esempio di applicazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Il Controllo Ottimo

Il controllo ottimo: caso tempo-discreto

Problemi

lineari-quadratici: il caso tempo discreto

L'equazione alle differenze di Riccati

Controllo LQ: il caso

stazionario

tempo-discreto

Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi

lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Controllo LQ: il caso stazionario

tempo-continuo

Riferimenti sul controllo ottimo

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t), x(0) = x_0$$

$$J(x_0, u) = \int_0^1 (q(t)x^2 + r(t)u^2(t)) dt.$$

dove tutte le variabili sono scalari, ed inoltre $q(t) > 0$ e $r(t) > 0$. In questo caso l'equazione di Hamilton-Jacobi si scrive

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} (a(t)x + b(t)u) + \frac{1}{2}q(t)x^2 + \frac{1}{2}r(t)u^2 \right].$$

Per prima cosa si risolve il problema di minimizzazione che compare al secondo membro. Imponendo le condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine si ottiene

$$u = -\frac{b(t)}{r(t)} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}.$$

Sostituendo nell'equazione di Hamilton-Jacobi, si ha

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} ax - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \frac{b^2}{r} + \frac{1}{2}qx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \frac{b^2}{r}.$$

Un esempio di applicazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Ovvero

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}qx + \frac{\partial V}{\partial x}ax - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \frac{b^2}{r}.$$

L'ultima equazione si presenta come una equazione alle derivate parziali del primo ordine di tipo non lineare. Essa va completata con la condizione terminale $V(1, x) = 0$. In generale la soluzione di una equazione di questo tipo si presenta molto complicata, nell'esempio in esame è comunque possibile calcolarne una soluzione analitica. Sia

$$V(t, x) = \frac{1}{2}p(t)x^2,$$

dove $p(t)$ è una generica funzione del tempo. Calcolando le derivate di V e sostituendo nell'equazione di Hamilton-Jacobi si ottiene:

$$-\frac{1}{2}\dot{p}x^2 = \frac{1}{2}qx^2 + apx^2 - \frac{1}{2}p^2 \frac{b^2}{r}x^2.$$

Il principio di identità dei polinomi ci consente di stabilire che p deve soddisfare all'equazione

$$\dot{p} = -q - 2ap + \frac{b^2}{r}p^2.$$

Tale equazione è nota come equazione di Riccati (dal Conte Riccati, 1676–1754, che per primo si occupò di questo tipo di equazioni).

Un esempio di applicazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Per semplificare la trattazione analitica assumiamo $a = 0$, e $b = q = r = 1$. In questo caso l'equazione di Riccati si scrive

$$\dot{p} = -1 + p^2 .$$

L'ultima equazione si può facilmente risolvere, infatti si ha

$$\frac{dp}{p^2 - 1} = dt ,$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{2}(\log |p + 1| - \log |p - 1|) = 1 - t \Rightarrow p(t) = \frac{e^{2-2t} - 1}{e^{2-2t} + 1} ,$$

in cui si è anche imposta la condizione terminale $p(1) = 0$. La legge di controllo ottima sarà data da

$$u^*(t) = -\frac{b(t)}{r(t)}p(t)x(t) = -p(t)x(t) .$$

Il valore ottimo della funzione obiettivo sarà invece

$$V(0, x_0) = \frac{1}{2}p(0)x_0^2 \cong 0.38x_0^2 .$$

Il principio del minimo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario

tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo

Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo

Riferimenti sul controllo
ottimo

A causa delle difficoltà analitiche, l'uso dell'equazione di Hamilton-Jacobi non sempre consente il calcolo della soluzione di un problema di controllo ottimo. Una procedura alternativa fa uso del cosiddetto *Principio del minimo*. Sia

$$\tilde{H}(t, x, u) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + g(t, x, u).$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi può essere scritta

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_u \tilde{H}(t, x, u).$$

Se u^* è il vettore minimizzante \tilde{H} , allora si può scrivere

$$\tilde{H}(t, x, u^*) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = 0.$$

Assumendo che V sia una funzione di classe C^2 , e differenziando la precedente equazione si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0.$$

Il principio del minimo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo

Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Ora si può dimostrare (è semplice in assenza di vincoli) che risulta

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0,$$

e quindi

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

A questo punto si introduca il vettore (detto di co-stato)

$$\lambda^T(t) = \frac{\partial V(t, x^*)}{\partial x},$$

dove $x^*(t)$ è l'evoluzione dello stato corrispondente all'applicazione del ingresso ottimo u^* . Inoltre

$$\dot{\lambda}^T(t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[g(t, x^*, u^*) + \lambda^T(t) f(t, x^*, u^*) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, \lambda, x^*, u^*)$$

e

$$\lambda^T(T) = \frac{\partial V(T, x^*)}{\partial x} = \frac{\partial q(T, x^*)}{\partial x}.$$

Il principio del minimo

- Il Controllo Ottimo
- Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
- L'equazione alle differenze di Riccati
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
- Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
- Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
- Il principio del minimo**
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
- Riferimenti sul controllo ottimo

La funzione

$$H(t, \lambda, x, u) = g(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u)$$

è detta funzione Hamiltoniana.

Si consideri il seguente insieme di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^* = f(t, x^*, u^*), \quad x^*(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} H(t, \lambda, x^*, u^*) \right]^T, \quad \lambda(T) = \left[\frac{\partial}{\partial x} q(T, x^*(T)) \right]^T \\ u^*(t) = \arg \min_u H(t, \lambda, x^*, u), \end{array} \right.$$

Esso è un sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine, con condizioni iniziali (sulla variabile x^*) e terminali (sulla variabile λ). Vale il seguente teorema

Teorema 4 (Principio del minimo)

Se le funzioni f , g , q , ed l sono funzioni continue e differenziabili in x , e continue in t ed u , allora la legge di controllo ottimo u^ deve soddisfare tale insieme di equazioni.*

Si noti che la legge di controllo che si ottiene dall'applicazione del principio del minimo è una legge di controllo a ciclo aperto.

Un esempio di applicazione del principio del minimo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso
tempo-discreto

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo discreto

L'equazione alle
differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso
stazionario

tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e
a *ciclo chiuso*

Il controllo ottimo: caso
tempo-continuo

Il principio del minimo

Problemi
lineari-quadratici: il caso
tempo-continuo

Controllo LQ: il caso
stazionario
tempo-continuo

Riferimenti sul controllo
ottimo

Si consideri il problema di controllo ottimo

$$\min_u - \int_0^1 (x(t) + u(t)) dt,$$

soggetto al vincolo dinamico

$$\dot{x} = 1 - u^2, \quad x(0) = 1.$$

La funzione Hamiltoniana è data da

$$H = -x - u + \lambda(1 - u^2).$$

Inoltre

$$u^* = \arg \min_u (-x - u + \lambda(1 - u^2)) = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = 1. \quad \lambda(1) = 0.$$

Affinché la Hamiltoniana abbia effettivamente un punto di minimo, è necessario che risulti $\lambda < 0$. È semplice verificare che questa condizione è soddisfatta, inoltre

$$u^*(t) = -\frac{1}{2(t-1)}.$$

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Consideriamo ora il caso in cui il sistema dinamico considerato sia lineare

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

e che la funzione obiettivo sia una funzione quadratica dello stato e dell'ingresso

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \left[x^T(T)Q_f x(T) + \int_0^T \left(x^T Q(t)x + 2x^T S(t)u + u^T R(t)u \right) dt \right],$$

in cui si assume $Q(t) \geq 0$, $Q_f \geq 0$, e $R(t) > 0$. Similmente a quanto visto nel caso tempo-discreto la funzione di costo V , risulta essere una funzione quadratica dello stato. Per dimostrarlo poniamo

$$V(t, x) = \frac{1}{2} x^T P(t)x.$$

Sostituendo nell'equazione di Hamilton-Jacobi si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} x^T \dot{P}x &= \min_u \left[\frac{1}{2} x^T Qx + x^T Su + \frac{1}{2} u^T Ru + x^T P(Ax + Bu) \right] \\ &= \frac{1}{2} x^T [A^T P + PA + Q - (PB + S)R^{-1}(PB + S)^T]x. \end{aligned}$$

Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

La matrice $P(t)$ deve quindi risolvere l'equazione differenziale

$$-\dot{P} = A^T P + P A + Q - (P B + S) R^{-1} (P B + S),$$

con condizione terminale

$$P(T) = Q_f .$$

Tale equazione prende il nome di equazione differenziale matriciale di Riccati. Assumendo di aver risolto l'equazione differenziale di Riccati, la legge di controllo ottimo è data da

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \arg \min_u \left[\frac{1}{2} x^T Q x + x^T S u + \frac{1}{2} u^T R u + x^T P (A x + B u) \right] \\ &= - R^{-1} (B^T P + S^T) x(t) . \end{aligned}$$

Controllo LQ: Il caso stazionario tempo–continuo

- Il Controllo Ottimo
- Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
- L'equazione alle differenze di Riccati
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
- Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
- Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
- Il principio del minimo
- Problemi lineari-quadratici: il caso tempo–continuo
- Controllo LQ: il caso stazionario tempo–continuo**
- Riferimenti sul controllo ottimo

Assumiamo adesso che l'equazione di stato sia tempo-invariante:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

che la funzione obiettivo si estenda su un orizzonte temporale infinito, e che le matrici $R > 0$, S , e $Q \geq 0$ non dipendano dal tempo.

$$J(x_0, u) = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + x^T S u + u^T R u) dt.$$

Anche in questo caso l'ipotesi di stazionarietà consente di cercare la soluzione di regime dell'equazione differenziale di Riccati. In particolare, questa dovrà risultare soluzione dell'equazione algebrica

$$A^T P + PA + Q - (PB + S)R^{-1}(PB + S)^T = 0.$$

Controllo LQ: Il caso stazionario tempo–continuo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo–continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo–continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

Teorema 5 *Date le matrici $A, B, Q = C^T C \geq 0$, ed $R > 0$. Se*

1. *(A, B) è stabilizzabile*

2. *(A, C) è rilevabile,*

allora, l'equazione algebrica di Riccati

$$A^T P + PA + Q - (PB + S)R^{-1}(PB + S) = 0,$$

ammette una soluzione $P^+ \geq 0$, e la matrice $A - BR^{-1}(B^T P + S^T)$ è asintoticamente stabile.

Riferimenti sul Controllo Ottimo

Il Controllo Ottimo
Il controllo ottimo: caso tempo-discreto
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo discreto
L'equazione alle differenze di Riccati
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-discreto
Soluzioni a *ciclo aperto* e a *ciclo chiuso*
Il controllo ottimo: caso tempo-continuo
Il principio del minimo
Problemi lineari-quadratici: il caso tempo-continuo
Controllo LQ: il caso stazionario tempo-continuo
Riferimenti sul controllo ottimo

- ✓ B.D.O. Anderson, J.B. Moore, "Optimal Control: Linear Quadratic Methods", Prentice Hall, 1990.
- ✓ M. Athans, P. Falb, "Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Application", Dover Publications, 2006.
- ✓ H. Kwakernaak, R. Sivan, "Linear Optimal Control Systems", Wiley-Interscience, 1972.
- ✓ A.P. Sage, "Optimal System Control", Prentice-Hall, 1968.