Lezione 15 - Cenni sulle biforcazioni globali

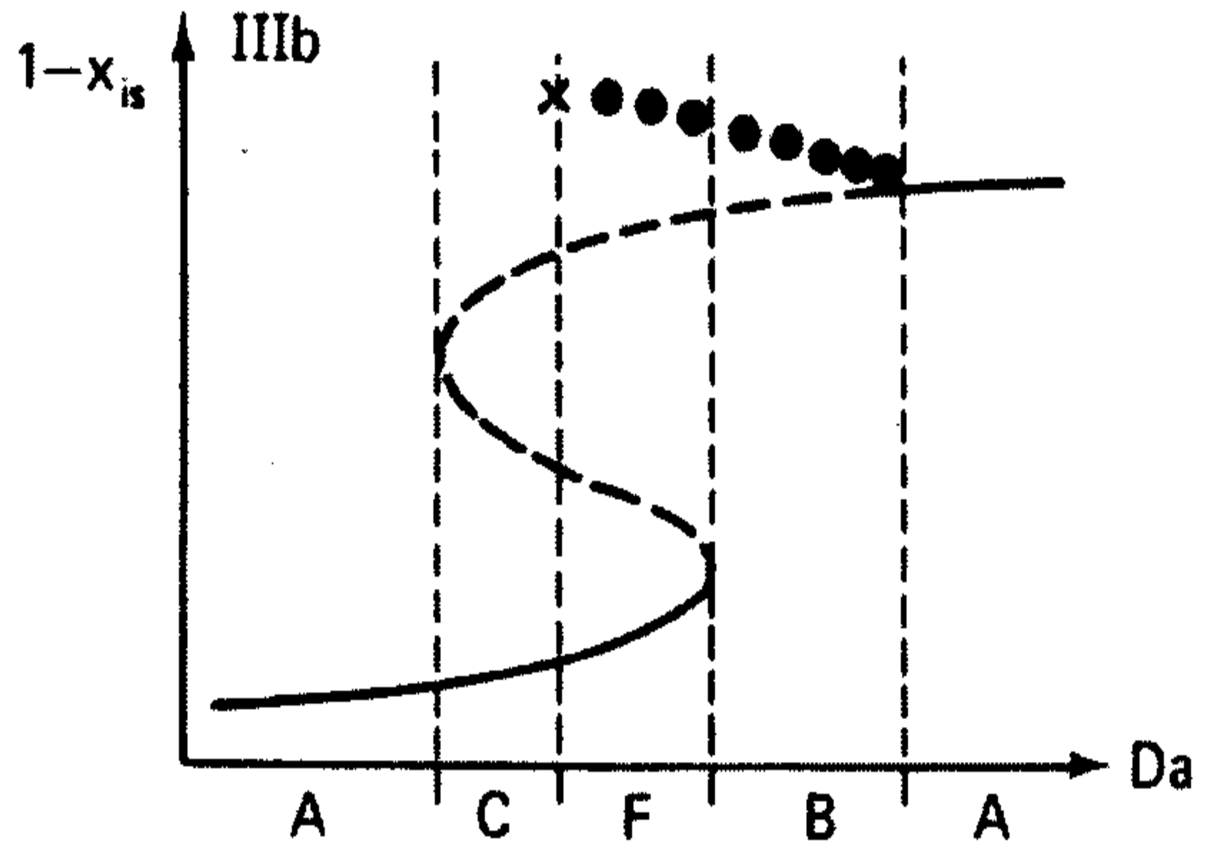
Scomparsa o Comparsa di cicli limite
Obiettivi: Riconoscere situazioni potenzialmente in grado di dare biforcazioni globali
Biforcazione Omoclina

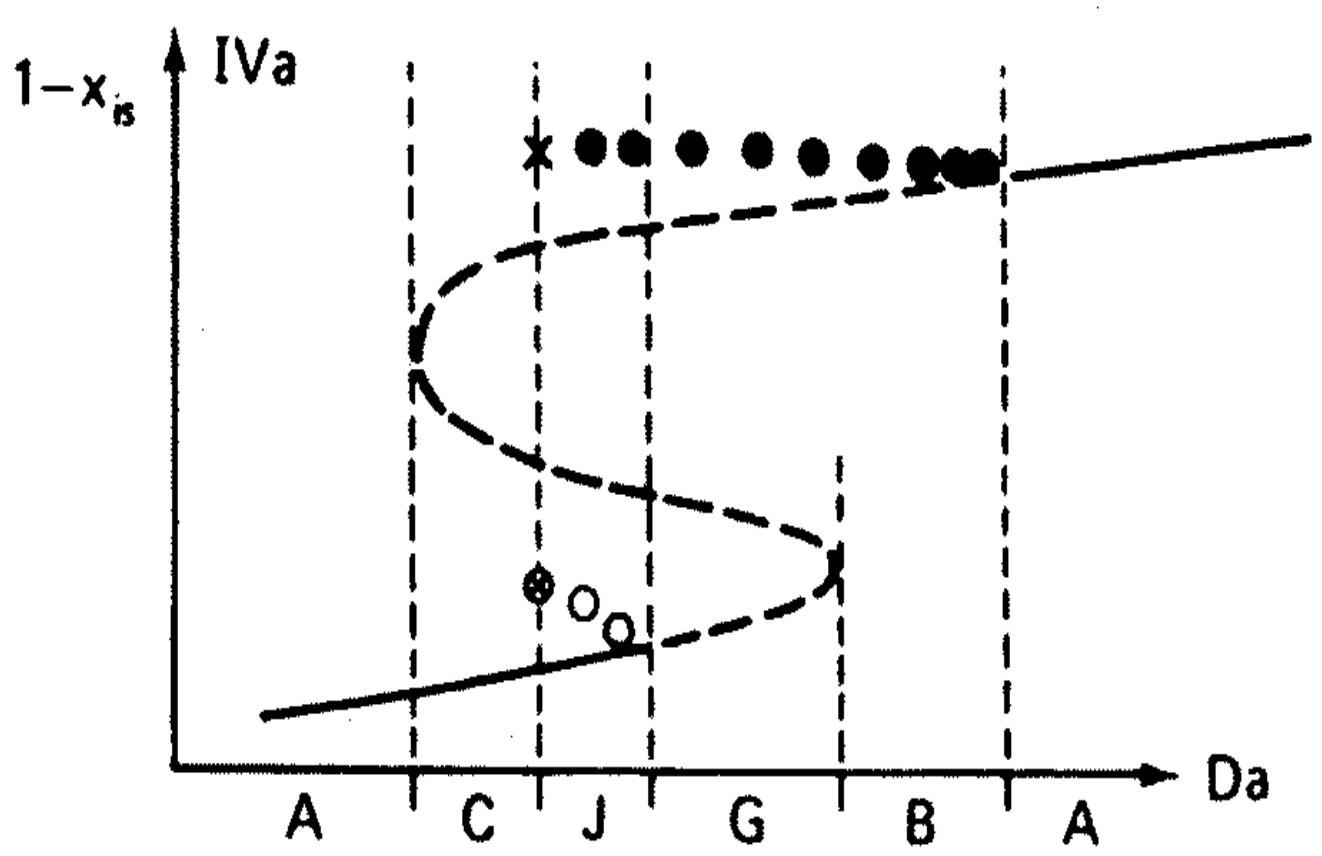
Bibliografia

- Y. Kuznetsov, Element of Applied Bifurcation Theory, Springer, 1998
- A. H. Nayfeh e B. Balachandran APPLIED NONLINEAR DYNAMICS , Wiley VCH, 2004
- Strogatz

Biforcazioni di orbite omocline nel piano

- ESEMPIO CSTR diabatico (n=2),
- Diagrammi di soluzione





- Da notare la nascita (o fine) di un ramo di soluzioni periodiche senza biforcazione di Hopf.

Connessioni omocline ed eterocline

- Dato un sistema continuo del tipo $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$. Siano x_0, x_1, x_2, punti di equilibrio.
- Una orbita Γ_0, che parte da un punto x, è detta **omoclina** al punto di equilibrio x_0 se

$$\Phi^t x \to x_0 \quad per \quad t \to \pm\infty$$

- Una orbita Γ_0, che parte da un punto x, è detta **eteroclina** ai punti di equilibrio x_1 e x_2 se

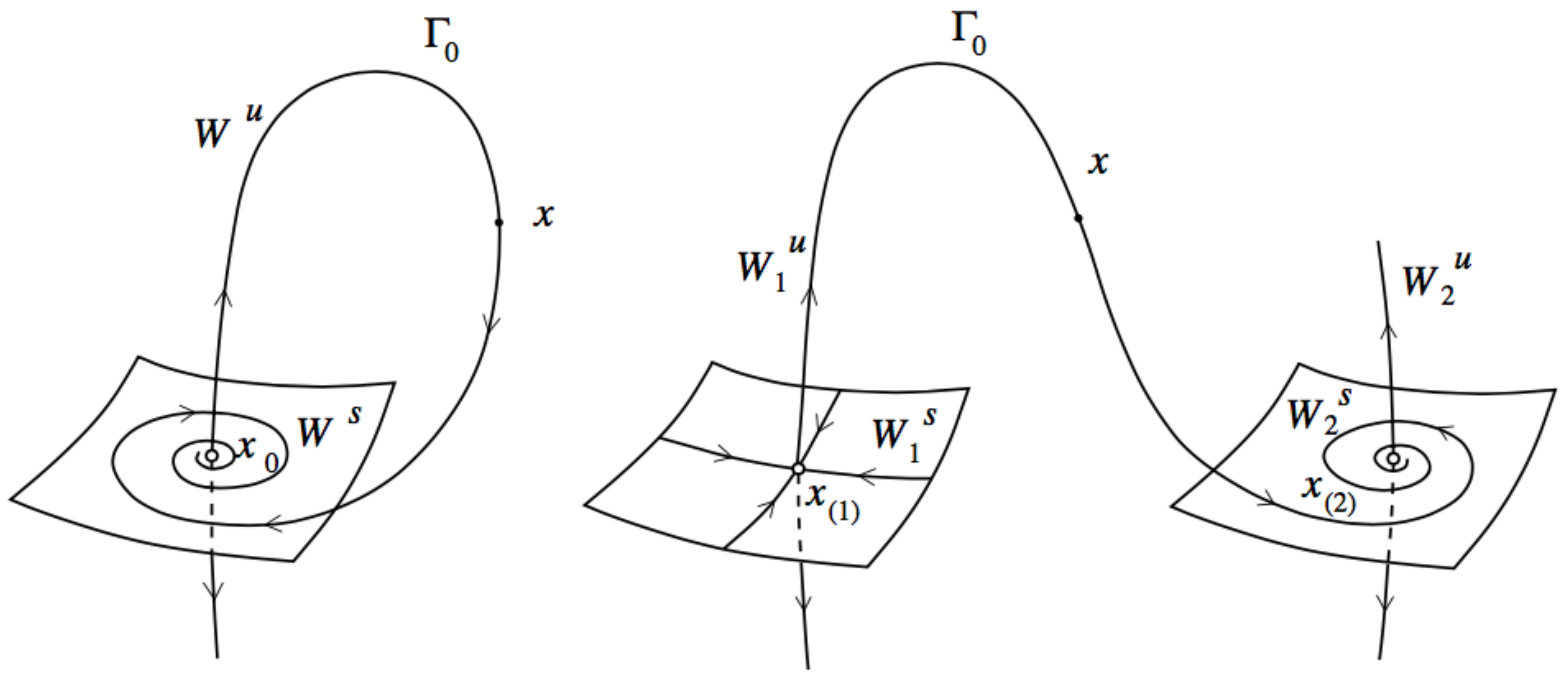
$$\Phi^t x \to x_1 \quad per \quad t \to -\infty$$

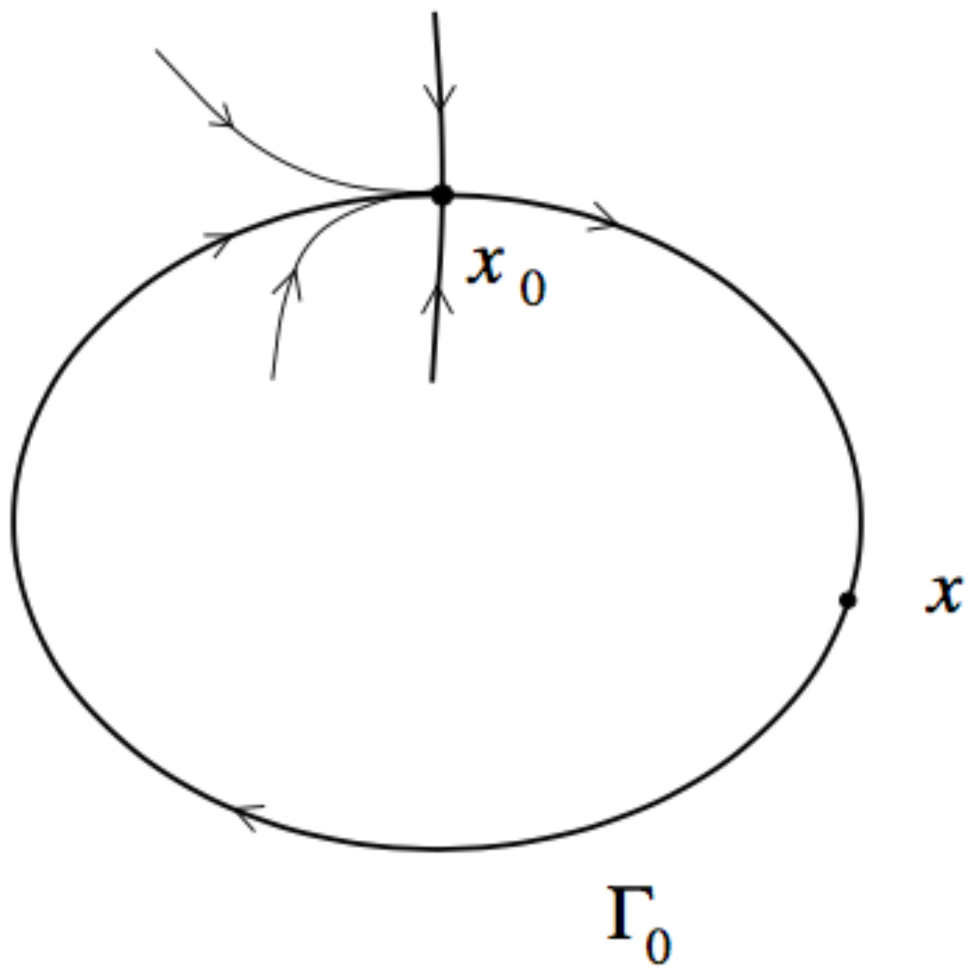
$$\Phi^t x \to x_2 \quad per \quad t \to +\infty$$

- **Una orbita omoclina ad un punto iperbolico è strutturalmente instabile**
- **Un orbita eteroclina è strutturalmente instabile solo in R^2**.

Situazioni iperboliche o non iperboliche

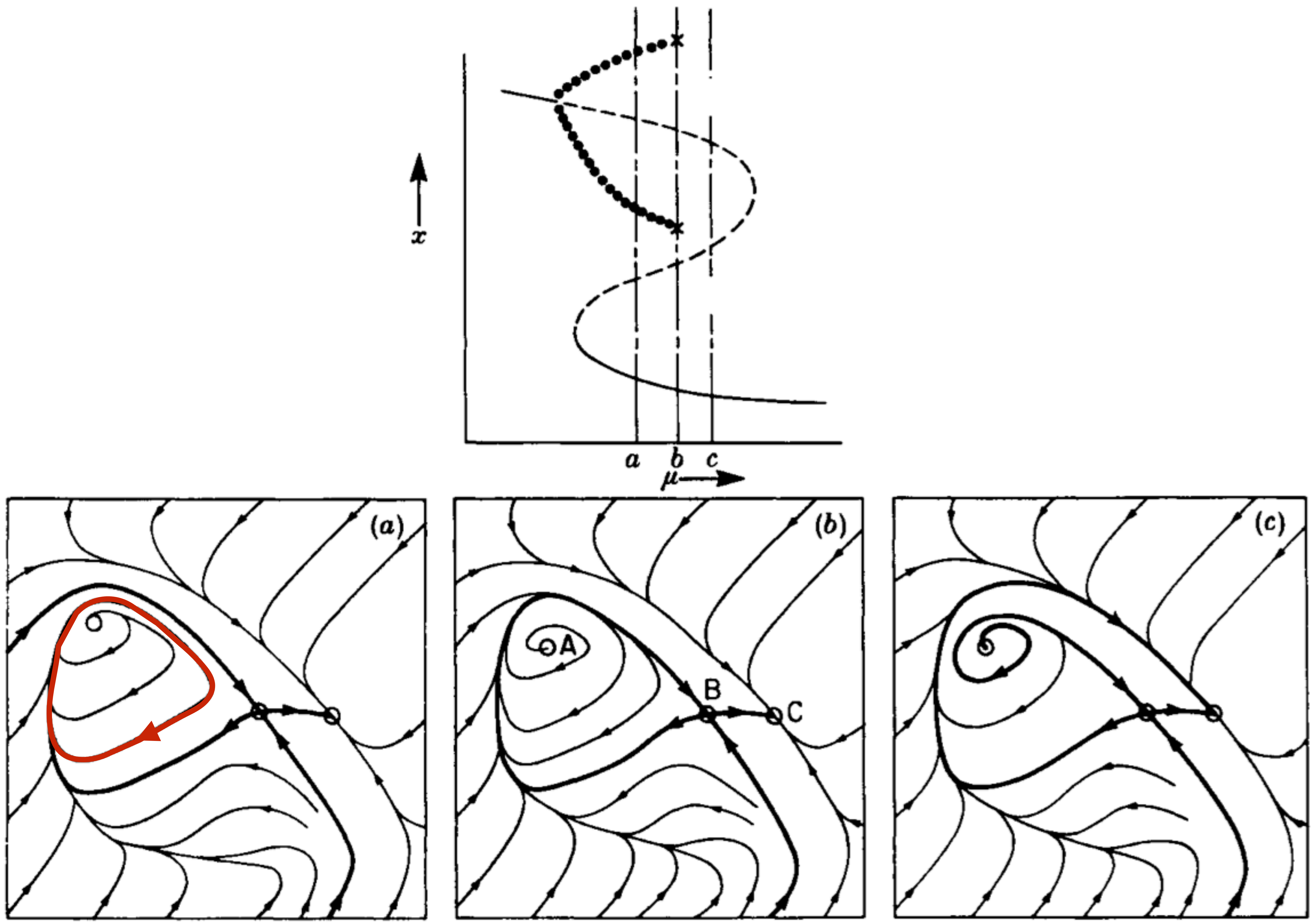
- I punti di equilibrio possono essere sia iperbolici che non iperbolici
  - Iperbolici



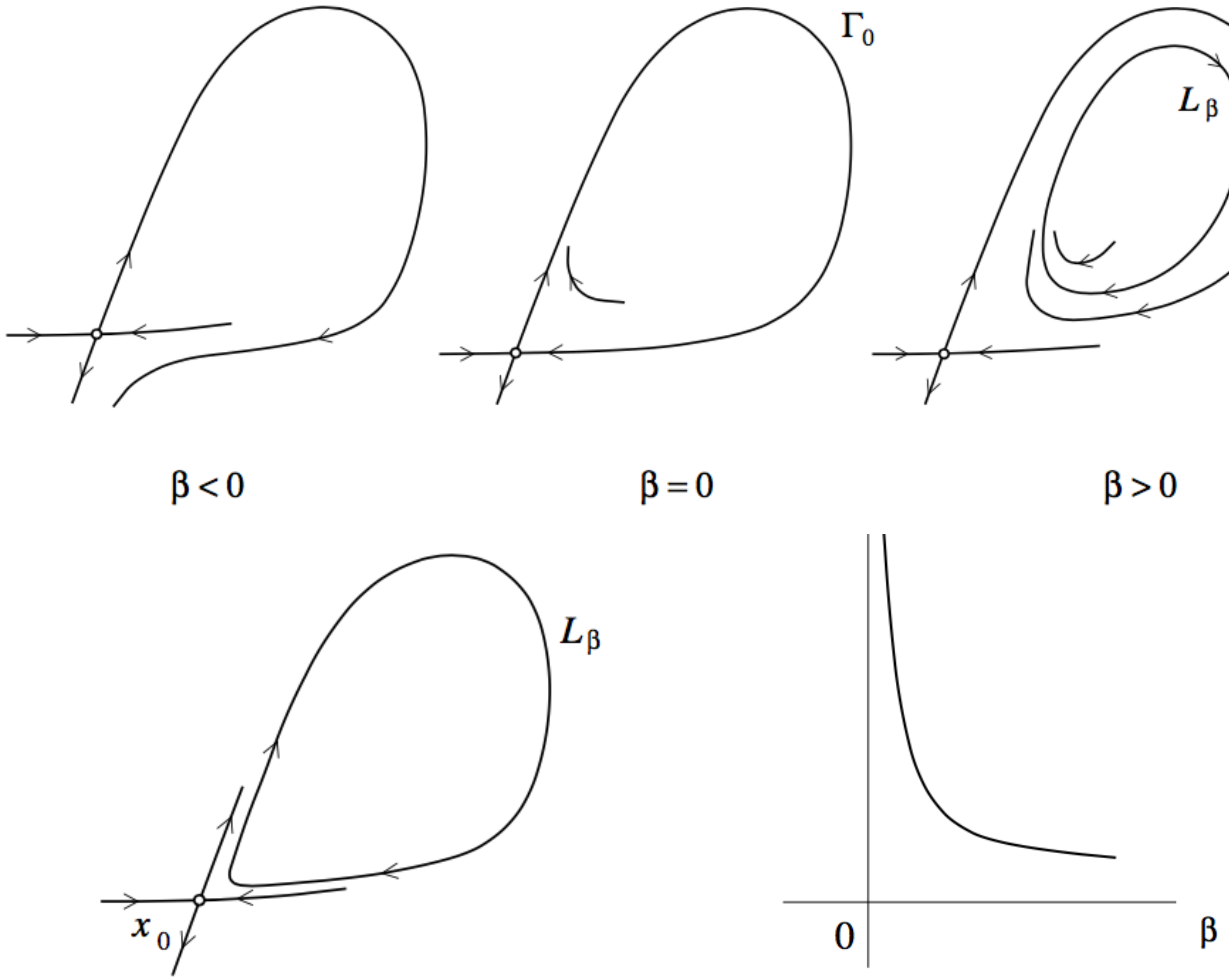


  - Non iperbolico

Biforcazioni di orbite omocline nel piano



Biforcazioni di orbite omocline nel piano



- **Quando il ciclo si avvicina alla sella il suo periodo cresce e tende all'infinito.**

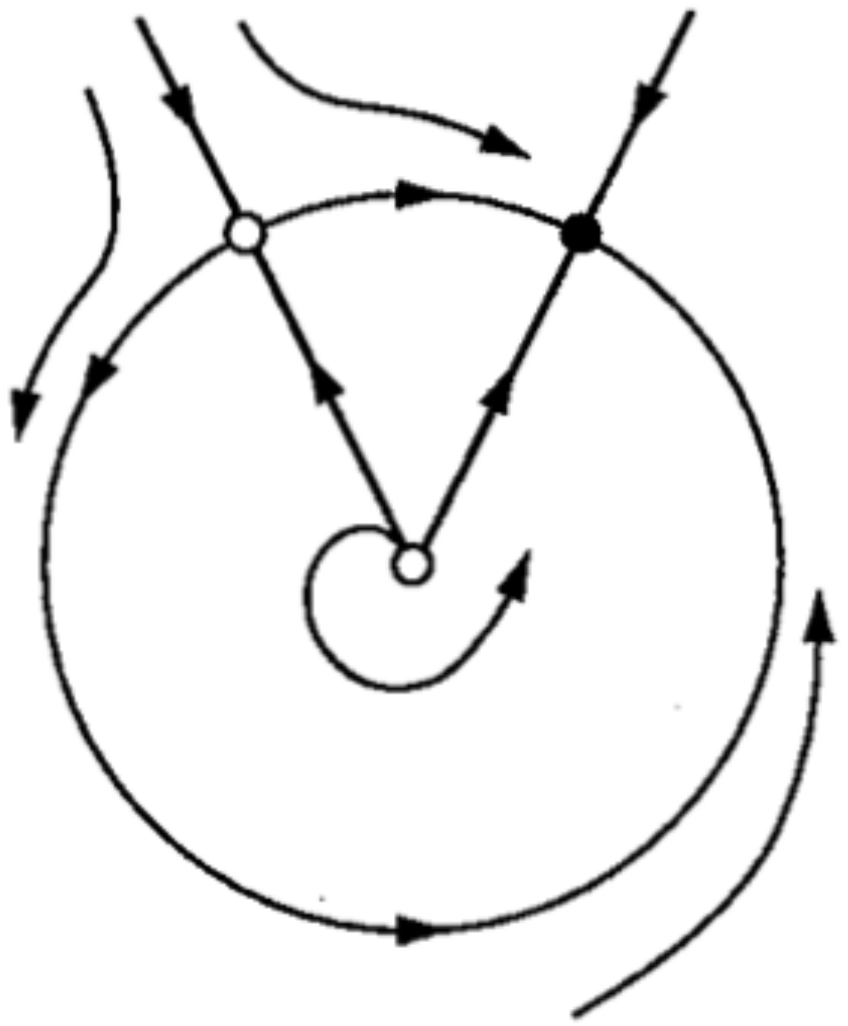
IMPORTANTE

Biforcazione omoclina

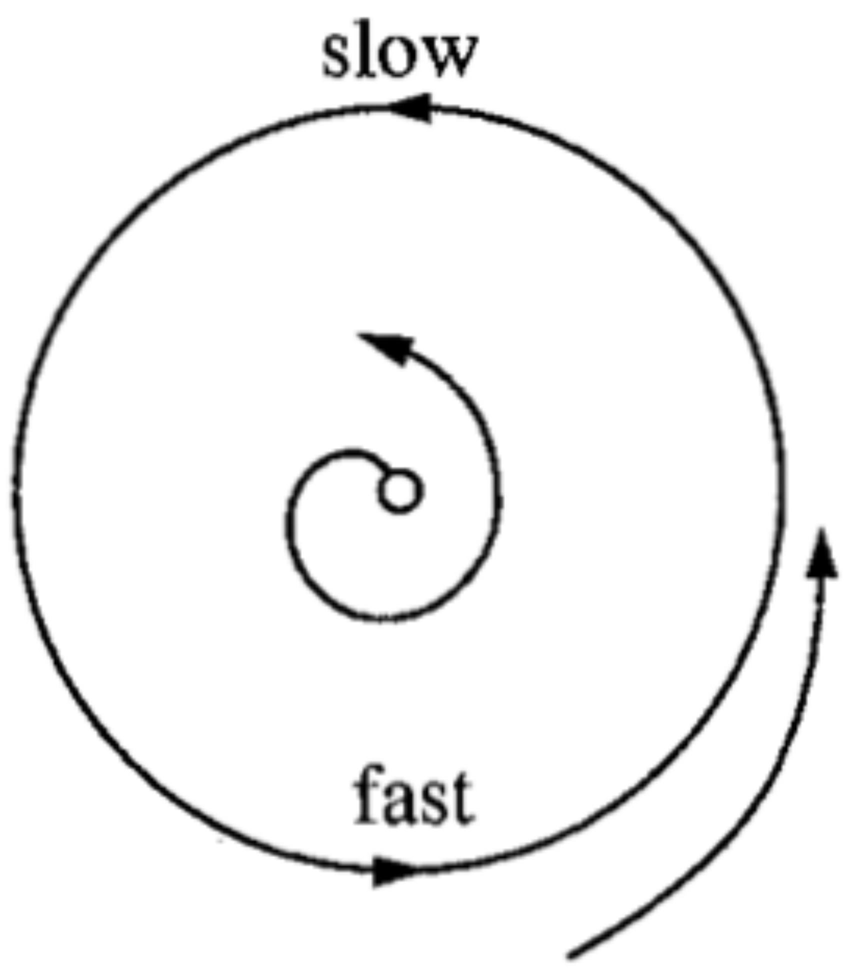
- Un esempio

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\theta} = \mu - \sin\theta$$

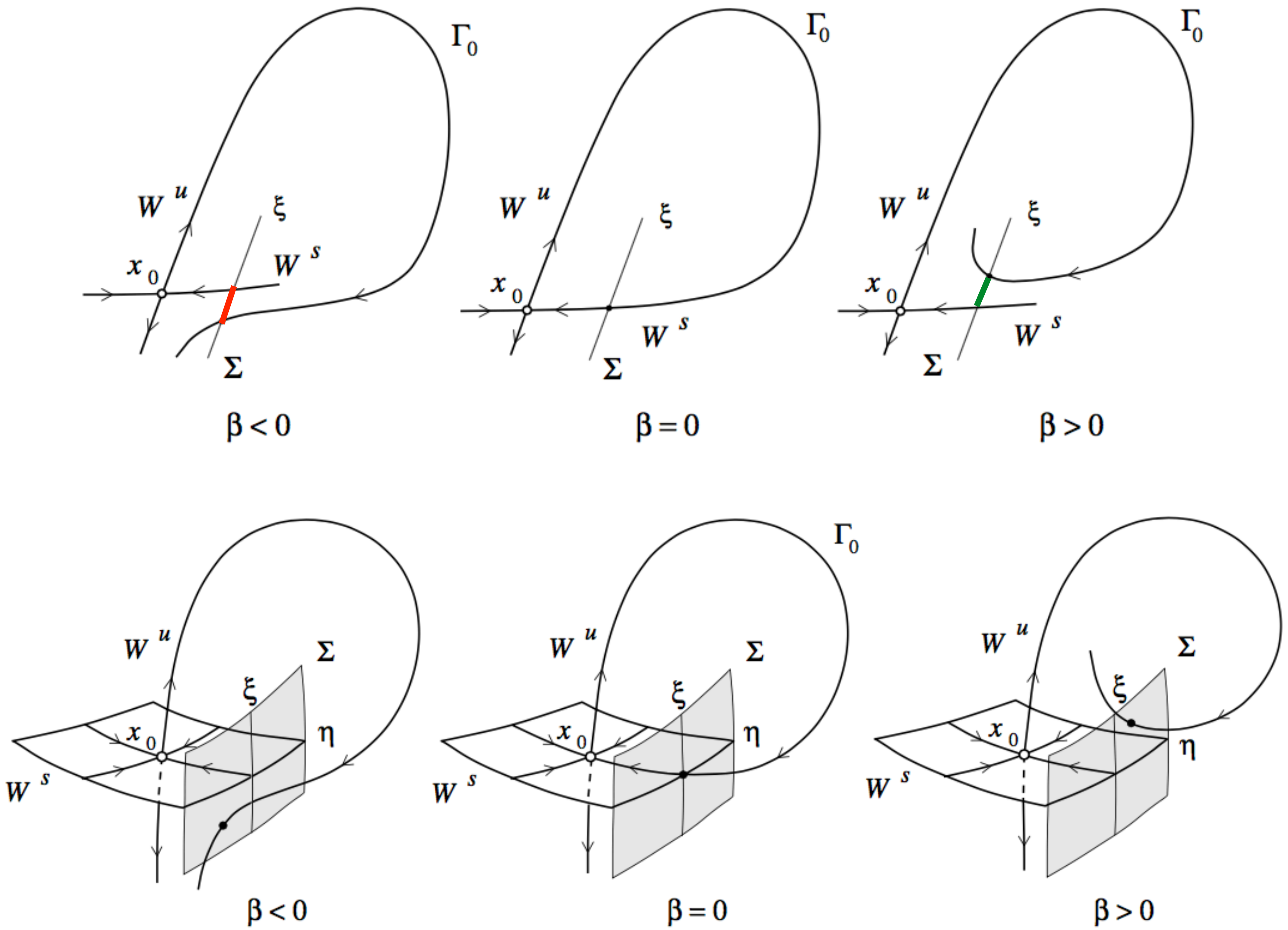


$\mu < 1$



$\mu > 1$

Riconoscimento Biforcazioni omocline



- L'equazione $\Sigma = 0$ è una condizione di biforcazione per la biforcazione omoclina
- La tecnica assomiglia all'uso di una sezione di Poincaré

Biforcazioni di orbite omocline nel piano

- **Un ciclo limite scompare attraverso la collisione con una sella**
- L'orbita periodica può essere considerata come una soluzione periodica di periodo infinito
- Il comportamento biforcazionale è catastrofico se il ciclo limite è stabile

- L'analisi può estendersi a dimensioni superiori a 2 se:
  - Il sistema ha un orbita omoclina ad una sella
  - Gli autovalori associati alla sella hanno una specifica struttura: di tutti gli autovalori nel semipiano positivo il più vicino all'asse immaginario è reale, di tutti gli autovalori nel semipiano negativo il più vicino all'asse immaginario è reale
- In sistemi **tridimensionali o di dimensione superiore** la presenza di orbite omocline può implicare l'esistenza di comportamenti aperiodici

Sommario

- Biforcazioni globali
- Biforcazioni di orbite omocline
- Scenario strutturalmente instabile
- Possibile scenario catastrofico

- Cognomi A-L
- **0164571**
- https://kahoot.it/challenge/0164571

- Matricole Dispari o Cognomi M-Z
- **089681**
- https://kahoot.it/challenge/089681