



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Corso di Laurea in Biologia
Matematica

Anno Accademico 2021/2022

Matrici

Definizioni

Una **matrice** A $m \times n$ è una tabella ordinata di numeri disposti in **m righe** e da **n colonne** come ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice è composta da 3 righe e 4 colonne e diremo che la matrice A è 3×4 . In generale si dirà che la matrice è **$m \times n$** .

La matrice **quadrata** se $m = n$, altrimenti si dice **rettangolare**.

I numeri che compongono la matrice si dicono **elementi** della matrice e si indicano con:

a_{ij} i indice di riga
 j indice di colonna

Esempio:

$$a_{23} = 4$$

Definizioni

In generale quindi una matrice **A** *m***x***n* si rappresenta con il simbolo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

o in modo sintetico con la notazione:

$$A = (a_{ij})$$

La *i*-ma riga della matrice e la *j*-ma colonna della matrice si chiamano rispettivamente **vettore riga *i*-ma** e **vettore colonna *j*-ma** e si indicano con

$$A_i = \text{row}_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}) \qquad A^j = \text{col}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \text{row}_3(A) = (6, 6, 3, 2)$$

$$A^2 = \text{col}_2(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Uguaglianza tra matrici

Date due matrici

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

Si dicono uguali, e scriveremo

$$A = B$$

se:

- hanno lo stesso numero di righe e di colonne
- si ha $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Matrice trasposta

Data una matrice quadrata **A** $n \times n$ si dice **matrice trasposta di A** la matrice

$$A^t = (a_{ji})$$

Una matrice si dice **ortogonale** se coincide con la sua trasposta

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matrice si dice **ortogonale** se coincide con la sua trasposta

$$A^t = A$$

Addizione tra matrici

Due matrici **A** e **B** $m \times n$ (aventi quindi lo stesso numero di righe e colonne)

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

Si definisce **somma** di **A** e **B**, la matrice

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Proprietà della somma di matrici

Dalla definizione si ricavano subito le seguenti proprietà:

- **Proprietà commutativa:** $A + B = B + A$
- **Proprietà associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

Si dice **matrice nulla**, e si indica con $\underline{0}$, la matrice i cui elementi sono tutti nulli, ossia

$$A = \underline{0} \stackrel{def}{\iff} a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

La matrice nulla è **elemento neutro** dell'operazione di addizione tra matrici avendosi

$$A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$$

e si definiscono **matrice opposta di A** e **matrice differenza** tra **A** e **B** le matrici

$$-A = (-a_{ij})$$

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$$

Prodotto di una matrice per uno scalare

Data una matrice ***A*** $m \times n$ e un numero reale ***h*** si definisce ***prodotto di A per h***

$$hA = (ha_{ij})$$

Dalla definizione si deducono facilmente le seguenti proprietà:

$$h(A + B) = hA + hB$$

$$(h + k)A = hA + kA$$

$$h(kA) = (hk)A$$

$$1 A = A$$

Esempi

Date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$-B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Prodotto di matrici (righe per colonne)

Data una matrice **A** $m \times p$ e una matrice **B** $p \times n$ (ossia due matrici tali che il numero di colonne **p** della prima matrice sia uguale al numero di righe **p** della seconda matrice, si definisce **prodotto righe per colonne di A per B** la matrice **C** $m \times n$ definita da:

$$A \times B = C = (c_{ij}) = (A_i B^j) = \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)$$

Dove il prodotto $A_i B^j$ si definisce **prodotto scalare tra il vettore riga i-ma della matrice A e il vettore colonna j-ma della matrice B**, dato da:

$$A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = c_{ij}$$

Esempio

$$A \times B = C = (c_{ij}) = (A_i B^j) := \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)$$

$$A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = c_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & -2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 & c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 14 \\ c_{21} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -1 & c_{22} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 = -2 \\ c_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6 & c_{32} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 12 \end{pmatrix}$$

Osservazioni

1. Il prodotto righe per colonne tra matrici **non è commutativo**.

- *Perché se AB è definito, il numero di colonne di A deve essere uguale al numero di righe di B e, a meno che le matrici non siano quadrate, non è possibile definire BA*
- *Anche in caso di matrici quadrate della stessa dimensione il risultato è diverso*

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1x1 + 2x1 & 1x0 + 2x0 \\ 3x1 + 4x1 & 3x0 + 4x0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1x1 + 0x3 & 1x2 + 0x4 \\ 1x1 + 0x3 & 1x2 + 0x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice identità

Si dice **matrice identità** la matrice quadrata I i cui elementi sono

- Uguali a 1 se si trovano sulla diagonale principale
- Uguali a 0 altrimenti

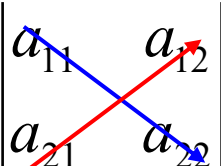
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identità è elemento neutro per il prodotto di matrici essendo:

$$A \times I = A$$

Determinante di una matrice 2x2

Data una matrice **A 2 x 2** si definisce determinante di A il numero:

$$|A| = \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

Determinante di una matrice quadrata di ordine n

Data una matrice **A** $n \times n$ il determinante di A si definisce a partire dalla definizione del determinante di una matrice 2×2 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si definisce **matrice estratta** A_{ij} la matrice ottenuta da A eliminando la riga i -ma e la colonna j -ma

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante di una matrice quadrata di ordine n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si definisce **matrice estratta** A_{ij} ottenuta da A eliminando riga i-ma e colonna j-ma

Si definisce **minore complementare di** a_{ij} il determinante della matrice estratta A_{ij}

Si definisce **complemento algebrico di** a_{ij} la quantità:

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Il **determinante di una matrice quadrata di ordine n** è dato dalla somma degli elementi di una riga o di una colonna per i rispettivi complementi algebrici.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$$

In particolare, per n=3, per i=1:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13})$$

Esempio (matrice 3x3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo con la prima riga

$$\det A = \textcolor{red}{1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \textcolor{red}{2} \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \textcolor{red}{0} \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 13$$

Calcoliamo con la seconda colonna

$$\det A = -\textcolor{green}{2} \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \textcolor{green}{1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \textcolor{green}{1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 13$$

Proprietà dei determinanti

- Se la matrice A ha: due righe o due colonne uguali, oppure una riga o colonna di 0, oppure una riga (colonna) combinazione lineare di altre righe, allora si ha

$$\det A = 0$$

- Se la matrice B è la matrice ottenuta da A scambiando di posto due righe o due colonne si ha

$$\det B = -\det A$$

- Se la matrice B è ottenuta dalla matrice A sommando ad una riga (colonna) una combinazione lineare delle altre righe (colonne) si ha

$$\det B = \det A$$

- Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, allora

$$\det(A \times B) = (\det A) \times (\det B)$$

- Se A è una matrice quadrata allora

$$\det A^t = \det A$$

Matrice inversa

Si dice **matrice inversa di una matrice quadrata A** la matrice quadrata A^{-1} tale che:

$$A \times A^{-1} = I \qquad A^{-1} \times A = I$$

Teorema

Una matrice quadrata A è **invertibile** (ossia dotata di inversa) se e solo se $\det(A)$ è diverso da zero e si ha

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

Per una matrice 2 x2 si ha:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$