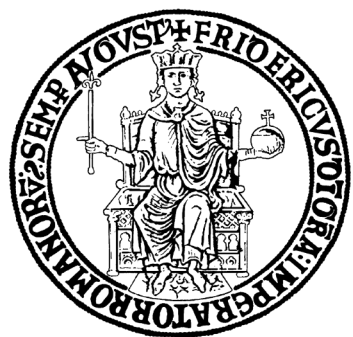




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

Corso di Laurea in Biologia
Matematica

Anno Accademico 2021/2022

Sistemi di equazioni lineari

Definizioni

Si dice **Sistema di Equazioni Lineari** il problema di trovare le n-ple di valori reali che soddisfano ***n*** equazioni lineari in ***n*** incognite. **Per *n*=2:**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

dove ***a, a', b, b', c, c'*** sono numeri reali che si dicono **coefficienti delle equazioni** (o del sistema). In particolare i numeri ***c e c'*** si dicono **termini noti**.

In altre parole un sistema di equazioni lineari coincide con il problema di individuare l'insieme intersezione dei due insiemi:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$$

$$S' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a'x + b'y + c' = 0\}$$

Quindi una coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si dice **una soluzione del sistema** se verifica entrambe le equazioni del Sistema stesso.

Formula risolutiva nel caso n=2

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1) Ricaviamo x e y

$$x = \frac{c - by}{a} \qquad y = \frac{c' - a'x}{b}$$

2) Sostituendo x e y otteniamo la soluzione del sistema, ossia la coppia ordinata:

$$x = \frac{cb' - c'b}{a b' - a'b}$$

$$y = \frac{a c' - a' c}{a b' - a'b}$$

Osservazione 1: le soluzioni si ottengono combinando i coefficienti del sistema

Osservazione 2: perché il sistema sia risolubile deve essere $(a b' - a' b)$ diverso da zero!

Cosa accade se $(a b' - a' b)=0$?

$$a b' - a' b = 0 \Rightarrow a b' = a' b \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \mathbf{h} \Rightarrow a' = ha, \quad b' = hb$$

Il nostro sistema allora diventa:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ hax + hby = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c'/h \end{cases}$$

Possiamo dunque avere due casi:

1 caso: $c = c'/h$: le due equazioni sono identiche e quindi abbiamo infinite soluzioni

2 caso: $c \neq c'/h$: il sistema non ammette soluzioni.

Uso delle matrici nei sistemi lineari

Riscriviamo i coefficienti del nostro sistema lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

Usando il linguaggio delle matrici poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il prodotto di matrici righe per colonne

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Le equazioni del nostro sistema ci dicono però che

possiamo riscrivere il nostro sistema in forma di **equazione matriciale**

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

Esempio

Scriviamo il seguente sistema in forma di equazione matriciale.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Da cui, moltiplicando righe per colonne

$$AX = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 2x - y + 3z \end{pmatrix}$$

Per cui possiamo riscrivere il nostro sistema in forma di ***equazione matriciale***

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}$$

Soluzione dei sistemi lineari con l'uso delle matrici

Abbiamo visto che il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

se $(a b' - a' b) \neq 0$ è risolubile ed ammette una unica soluzione data da:

$$x_0 = \frac{cb' - c'b}{a b' - a' b} \qquad y_0 = \frac{a c' - a' c}{a b' - a' b}$$

Se definiamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad C_x = \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \qquad C_y = \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$$

Si può scrivere la soluzione come

$$x_0 = \frac{\det C_x}{\det A} \qquad y_0 = \frac{\det C_y}{\det A}$$

Regola di Cramer

Dato il sistema di equazioni lineari di n equazioni in n incognite
(dunque tale che la matrice dei coefficienti è una matrice quadrata)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Dette $\mathbf{A}$ la matrice dei coefficienti, $\mathbf{C}$ il vettore colonna dei termini noti e $\mathbf{C}_j$ la matrice ottenuta sostituendo il vettore colonna $\mathbf{C}$ alla colonna j della matrice $\mathbf{A}$, se $\det A \neq 0$, il sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$ ammette una unica soluzione $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ data da

$$x_j = \frac{\det C_j}{\det A}$$

Esercizio 1/2

Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

1) Calcoliamo il determinante (usiamo la prima colonna).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 - 8 + 18 = 24$$

Il $\det(A)$ è positivo per cui il sistema è risolubile ed ammette una unica soluzione.

Esercizio 2/2

2. Applichiamo la regola di Cramer (**$\det A = 24$**)

$$C_x = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 6 & 4 \\ \mathbf{2} & 3 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det C_x = 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 - 16 - 18 = -27$$

$$C_y = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & 4 \\ 1 & \mathbf{2} & -1 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix} \quad \det C_y = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 10 + 2 + 9 = 21$$

$$C_z = \begin{pmatrix} 2 & 6 & \mathbf{1} \\ 1 & 3 & \mathbf{2} \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \det C_z = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 5 - 9 = -12$$

La soluzione del sistema dunque è data da:

$$\mathbf{x_0} = \frac{\det C_x}{\det A} = -\frac{27}{24} = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} \quad \mathbf{y_0} = \frac{\det C_y}{\det A} = \frac{21}{24} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}} \quad \mathbf{z_0} = \frac{\det C_z}{\det A} = -\frac{12}{24} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Caso generale

Dato il sistema di equazioni lineari di **m** equazioni in **n** incognite (dunque tale che la matrice dei coefficienti non è a priori una matrice quadrata)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_n \end{cases}$$

Definendo come al solito

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere il sistema in forma matriciale

$$AX = C$$

Un sistema si dice **omogeneo** se la colonna dei termini noti è il vettore nullo, ossia

$$AX = 0$$

Matrice completa e incompleta

Dato il sistema di equazioni lineari di **m** equazioni in **n** incognite (dunque tale che la matrice dei coefficienti non è a priori una matrice quadrata)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_n \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti si dice anche matrice incompleta. Si definisce invece **MATRICE COMPLETA**, la matrice che si ottiene aggiungendo alla matrice dei coefficienti la colonna dei termini noti, ossia:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A|C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Rango di una matrice

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definiamo RANGO della matrice A il massimo ordine di minori non nulli della matrice. Il rango si indica con *rank(A)*.

In altre parole, si dirà che $rank(A) = k$ se per la matrice A:

- si può estrarre almeno un minore non nullo di ordine k.
- tutti i minori di ordine maggiore di k sono nulli.

Rango di una matrice (esempi)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E' una matrice quadrata, ha determinante non nullo, quindi il suo rango è 3.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

E' una matrice quadrata, ma determinante nullo, quindi il suo rango è minore di 3. Poiché esistono minori di ordine 2 non nulli, il rango è 2.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

E' una matrice 2x3, quindi il rango sarà al massimo 2. Poiché non ci sono minori di ordine 2 non nulli, il rango è 1. Osservare che una riga si ottiene moltiplicando per 2 l'altra.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

E' una matrice 3x4, quindi il rango sarà al massimo 3. Poiché esistono chiaramente minori di ordine 2 non nulli il rango sarà almeno 2. Dunque può essere solo 2 o 3. (Si vede che il rango è 2)

Teorema di Rouché Capelli

Dato il sistema di equazioni lineari di m equazioni in n incognite (dunque tale che la matrice dei coefficienti non è a priori una matrice quadrata)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_n \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema abbia soluzioni è che la matrice dei coefficienti e la matrice completa abbiano lo stesso rango, ossia

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A/C)$$

In particolare:

- Se $\text{rank}(A) = n$ il sistema ha una sola soluzione
- Se $\text{rank}(A) < n$, il sistema ha $\infty^{n-\text{rank}(A)}$ soluzioni.

Corollario: i sistemi omogenei hanno sempre almeno una soluzione perché la matrice completa non può avere rango superiore al rango della matrice incompleta. Di fatto c'è almeno la soluzione banale del vettore nullo.