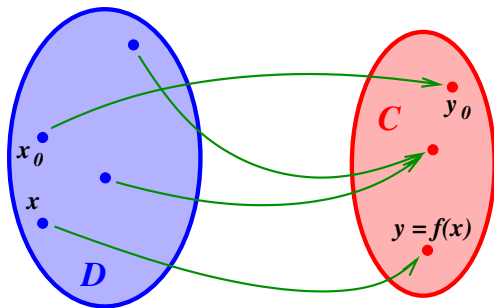


Analisi matematica I: Funzioni di una variabile

Definizione di funzione

Una **funzione** f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (**dominio**) fa corrispondere **uno ed un solo** elemento y di un secondo insieme C (**codominio**). Si dice che y è l'**immagine** di x tramite f e si scrive $y = f(x)$.



$$f : D \rightarrow C$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

Il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze. Tale corrispondenza può essere data in svariati modi:

- da un rilevamento empirico
- da una formula (*legge*)

Esempi:

- 1) la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
- 2) la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
- 3) lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:
$$s = \frac{1}{2}g t^2 \quad (\text{moto uniformemente accelerato})$$
- 4) la relazione tra i lati x , y di un rettangolo di area unitaria: $xy = 1$ da cui si ricava: $y = \frac{1}{x}$

Grafico di una funzione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Il **grafico** di f è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$.

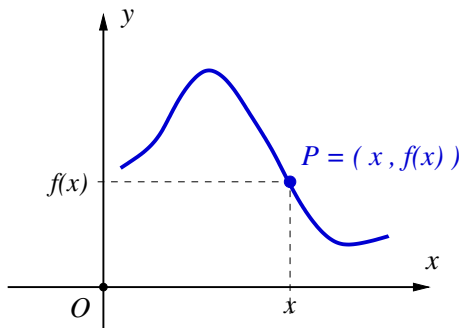


Grafico di $f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

Funzioni iniettive e suriettive

- Una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **iniettiva** se elementi distinti di D hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **suriettiva** se ogni elemento del *codominio* C è *immagine* di qualche elemento del *dominio*. In simboli:

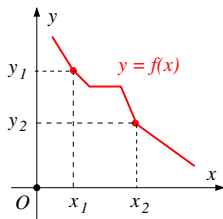
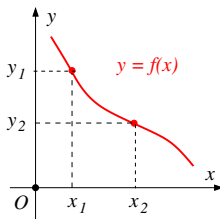
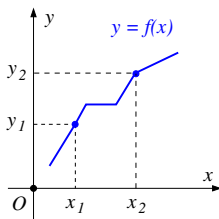
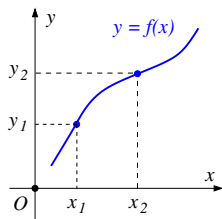
$$\forall y \in C \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

- Una funzione $f : D \rightarrow C$ contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice **biunivoca** (o biettiva)

Funzioni monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

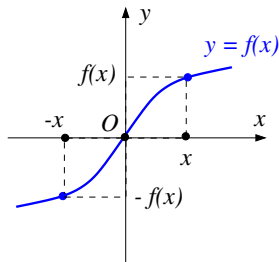
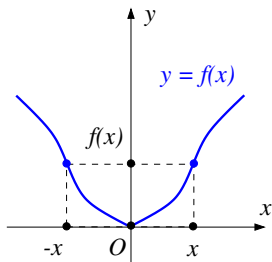
- **strettamente crescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **debolmente crescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **strettamente decrescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **debolmente decrescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



Funzioni pari e dispari

- Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **pari**: se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
In questo caso il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y
- Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari**: se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
In questo caso il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine O

Esempi: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = |x|$ funzioni pari
 $f(x) = x$, $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ funzioni dispari

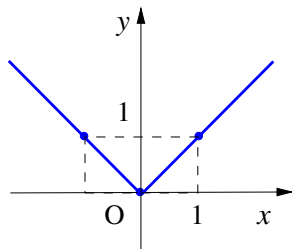


Alcune funzioni elementari

Le seguenti sono funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) = c$ il grafico è una retta orizzontale;
- $x = c$ il grafico è una retta verticale;
- $f(x) = mx + q$ il grafico è una retta
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ il grafico è una parabola

Funzione valore assoluto



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

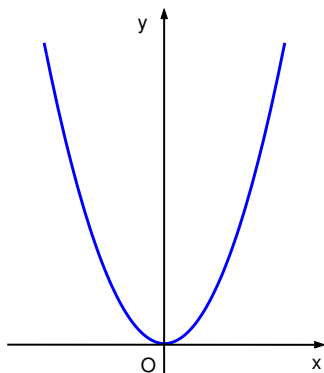
Proprietà:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ con } x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **disuguaglianza triangolare:**
 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se $\delta > 0$, $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$

Analogamente:

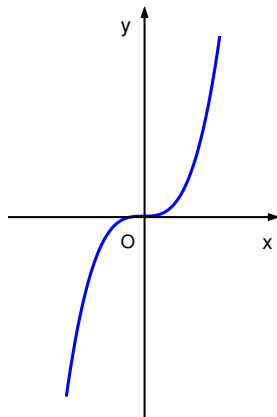
$$|x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$$

Potenze con esponente intero positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione dispari

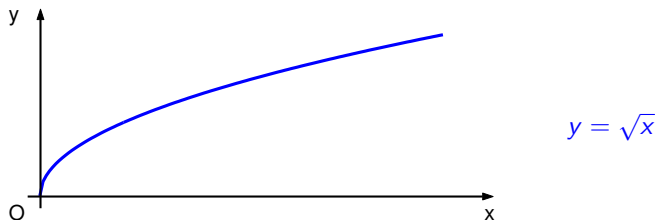
Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è **pari** o a quello di x^3 se n è **dispari**.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'**identità**, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ **non** è invertibile, ma lo è da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo **radice quadrata** la sua inversa:

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$



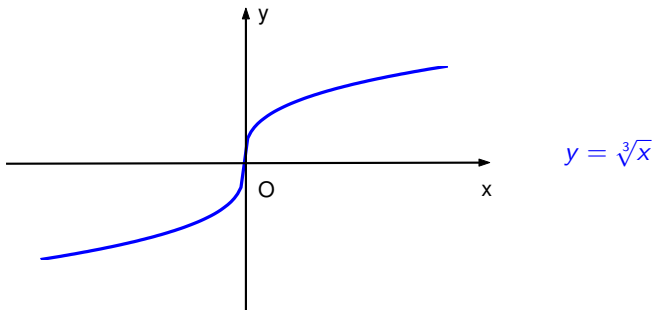
In generale, se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo l'inversa **radice n -sima** $\sqrt[n]{x}$ definita da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è invertibile.

Chiamiamo **radice cubica** la sua inversa:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



In generale, se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Chiamiamo l'inversa **radice n-sima** $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni potenza

Potenze ad esponente intero:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

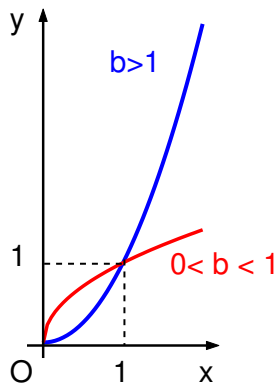
Potenze ad esponente razionale: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{definita per ogni } x > 0.$$

Potenze ad esponente reale: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

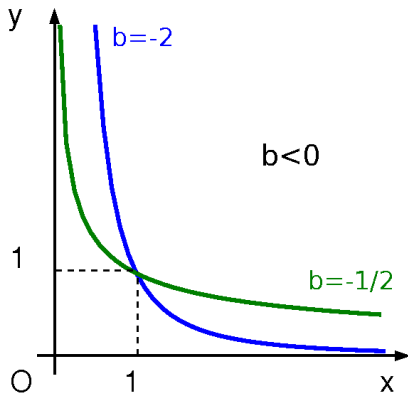
$$f(x) = x^b \quad \text{definita per ogni } x > 0 \quad (\text{resta indefinito } 0^0 \text{ !!!})$$

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$$y = f(x) = x^b \text{ per } b > 0$$

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



$$y = f(x) = x^b \text{ per } b < 0$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

Ancora sulle potenze

Polinomi: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i **polinomi**, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n .

Funzioni Razionali: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le **funzioni razionali**, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Come **caso particolare** ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Legge di Caduta di un grave

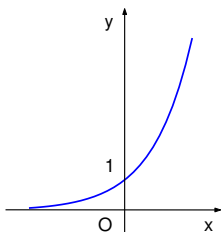
Il moto di un corpo che cade è un moto uniformemente accelerato.

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

dove

- t è il tempo;
- $s(t)$ e' la funzione che descrive la variazione della coordinata verticale del corpo in funzione del tempo;
- v_0 la velocità iniziale nella direzione dell'asse y ;
- s_0 è la posizione iniziale;
- $g = 8.9ms^{-2}$ l'accelerazione di gravità.

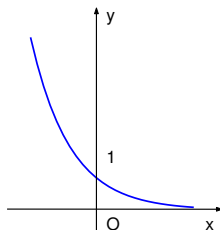
Funzione esponenziale



$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 1$$

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **strettamente crescente:**
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a 0



$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

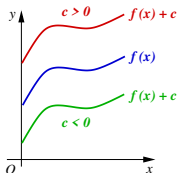
$$f(x) = a^x \text{ con } 0 < a < 1$$

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **strettamente decrescente:**
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a $+\infty$

Proprietà: $a^x a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Esempi

Esempio 1: Riproduzione



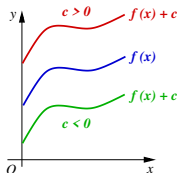
La divisione batterica per scissione binaria determina la moltiplicazione del microrganismo in maniera esponenziale, così che, dopo tre divisioni, da una cellula batterica se ne formano otto. Al tempo t si avranno: $N(t) = 2^t$ batteri.

Se partiamo da N_0 batteri al tempo t si avranno:
 $N(t) = N_0 2^t$ batteri

Esempio 2: Decadimento radioattivo

Per tempo di dimezzamento T di un materiale radioattivo si intende il periodo passato il quale la metà del materiale è decaduta (cioè si è trasformata).

Azoto: $T=10$ minuti, Carbonio: $T=5730$ anni
Data una certa quantità iniziale Q_0 di materiale, dopo un tempo t la quantità di sostanza radioattiva si riduce a $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^t$

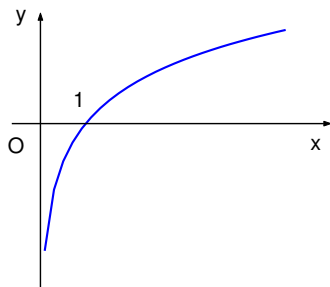


Funzione logaritmo

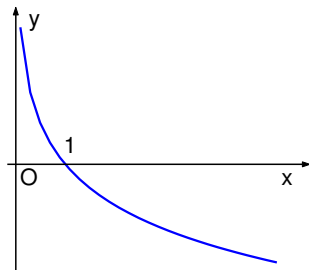
La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona e suriettiva, quindi invertibile.

$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ logaritmo in base a di x

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$



$$y = \log_a x \text{ con } a > 1$$



$$y = \log_a x \text{ con } 0 < a < 1$$

Proprietà del logaritmo

Il logaritmo $\log_a x$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x .

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$ per ogni $x > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- **cambio di base:** $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ per ogni $x > 0$ e $a, b > 0$

Minimi assoluti e relativi di una funzione

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- **minimo assoluto (o globale):**

x_0 è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- **minimo relativo (o locale):**

si dice che in x_0 la funzione ha un punto di minimo relativo se “vicino” a x_0 assume solo valori *maggiori o uguali* di $f(x_0)$,
cioè,

x_0 è punto di minimo relativo se

esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Massimi assoluti e relativi di una funzione

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- **massimo assoluto (o globale):**

x_0 è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- **massimo relativo (o locale):**

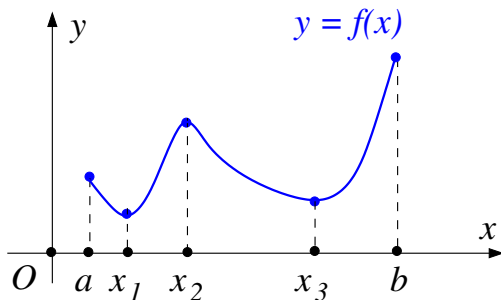
si dice che in x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo se “vicino” a x_0 assume solo valori *minori o uguali* di $f(x_0)$

cioè,

x_0 è punto di massimo relativo se

esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimi e massimi di funzione



- x_1 punto di minimo assoluto, $f(x_1)$ valore minimo assoluto;
- x_2 punto di massimo relativo, $f(x_2)$ valore massimo relativo;
- x_3 punto di minimo relativo, $f(x_3)$ valore minimo relativo;
- b punto di massimo assoluto, $f(b)$ valore massimo assoluto.

Esercizio 1. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = 3x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Esercizi su massimi e minimi

Esercizio 1. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = 3x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Soluzione: la funzione ha come grafico una retta il cui coefficiente angolare è positivo e dunque è strettamente crescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto $x = 2$ e il valore del massimo è $f(2) = 4$, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto $x = 1$ e il valore del minimo è $f(1) = 1$.

Esercizio 2. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Esercizio 2. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Soluzione: la funzione in $[0, 5]$ è strettamente decrescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto $x = 0$ e il valore del massimo è 0, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto $x = 5$ e il valore del minimo è -25 .

Esercizio 3. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

Soluzione: la funzione non ha massimo assoluto; il minimo assoluto è assunto nel punto $x = 0$ e il suo valore è $f(0) = 1$.

Esercizio 4. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Esercizi su massimi e minimi

Esercizio 4. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Soluzione: il massimo assoluto è assunto nel punto $x = -1$ e per $x > 2$, il valore del massimo è 3. Il minimo assoluto è assunto nel punto $x = 2$ e il valore del minimo è 0.

Esercizio 2. Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{per } x \leq -1 \\ |x| & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $(-\infty, 3]$.

Esercizio 3. (compito d'esame del 26/09/2013)

Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ 2|x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4x - x^2 & \text{per } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 4]$.

Esercizio 4. (compito d'esame del 26/09/2013)

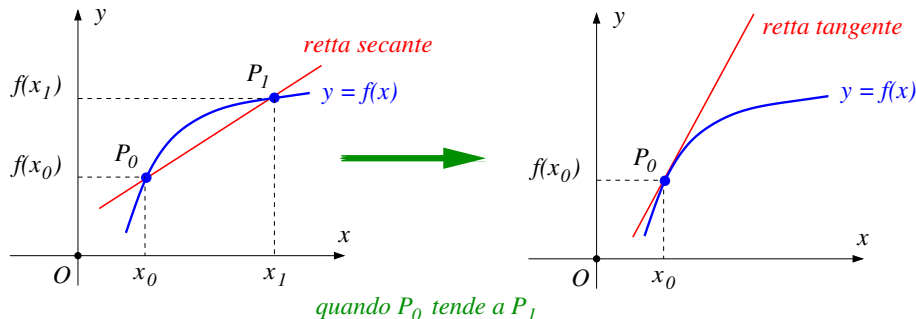
Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - x^2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ |x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4 - x & \text{per } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 3]$.

Analisi matematica I: Derivate

Retta tangente



Consideriamo una funzione continua f . Siano $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ due punti appartenenti al grafico della funzione.

Al tendere di x_1 a x_0 , il punto P_1 si avvicina al punto P_0 e la **retta secante** tende ad assumere una posizione limite, che prende il nome di **retta tangente** al grafico nel punto P_0 .

Retta tangente

L'equazione della **retta secante** per i due punti P_0, P_1 è data da

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

Il **coefficiente angolare**

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

si chiama **rapporto incrementale** della funzione f nei punti x_0 e x_1 .

Se esiste **finito**, il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

rappresenta il coefficiente angolare della **retta tangente** di equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Il valore $f'(x_0)$ è per definizione la **derivata prima** di f in x_0 .

Definizione di derivata

Se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

la funzione f si dice **derivabile in x_0** .

(Nel lucido precedente $h = x_1 - x_0$ e $x_1 = x_0 + h$).

Il valore del limite è per definizione la **derivata** di f nel punto x_0 .

La derivata si indica con le seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad Df(x_0)$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

Esempio 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

Esempio 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Esempio 4: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Derivata come velocità istantanea

Un oggetto si muove lungo un percorso rettilineo. La sua posizione è una funzione del tempo: $s = s(t)$.

Velocità media nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$:

$$v_{\text{media}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Velocità istantanea al tempo t_0 :

$$v_{\text{istantanea}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Più h è vicino a 0, più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e più precisa è l'informazione sull'andamento della velocità.

Derivata come velocità istantanea

Un oggetto si muove lungo un percorso rettilineo. La sua posizione è una funzione del tempo: $s = s(t)$.

Velocità media nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$:

$$v_{\text{media}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Velocità istantanea al tempo t_0 :

$$v_{\text{istantanea}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Più h è vicino a 0, più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e più precisa è l'informazione sull'andamento della velocità.

Esempio. Sia $s(t) = s_0 + v \cdot t$ (moto rettilineo uniforme). Allora si ha:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v \cdot h}{h} = v$$

Derivata come tasso di accrescimento

Nel processo di crescita di un organismo il peso corporeo è una funzione del tempo: $P = P(t)$.

$P(t_0)$ peso all'istante t_0

$P(t_0 + h)$ peso all'istante $t_0 + h$

$P(t_0 + h) - P(t_0)$ variazione di peso nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$

Tasso medio di accrescimento: è la variazione (media) nell'unità di tempo, cioè il rapporto

$$\frac{P(t_0 + h) - P(t_0)}{h}$$

Tasso di accrescimento all'istante t_0 : il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t_0 + h) - P(t_0)}{h} = P'(t_0),$$

se esiste, fornisce il *tasso di accrescimento* in t_0 .

Operazioni con le derivate

Siano f, g due funzioni derivabili e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Prodotto per una costante: $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- Somma: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Prodotto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quoziente:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Calcolo di alcune derivate

- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2, \quad f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$

Iterando il procedimento: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = n x^{n-1}$

- $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x - 7, \quad f'(x) = 15x^2 - 6x + 10$

- $f(x) = x^2 + e^x, \quad f'(x) = 2x + e^x$

- $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Iterando il procedimento: $f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

- $f(x) = \frac{x^5 + 2}{e^x}, \quad f'(x) = \frac{5x^4 e^x - (x^5 + 2) e^x}{e^{2x}}$

Derivata della funzione composta

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$, allora

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della funzione composta

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$, allora

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi:

1. $h(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^3 + 1}$, $h'(x) = -\frac{1}{(x^4 + 5x^3 + 1)^2} (4x^3 + 15x^2)$

2. $h(x) = (8x^3 - 6x^2)^{10}$, $h'(x) = 10(8x^3 - 6x^2)^9 (24x^2 - 12x)$

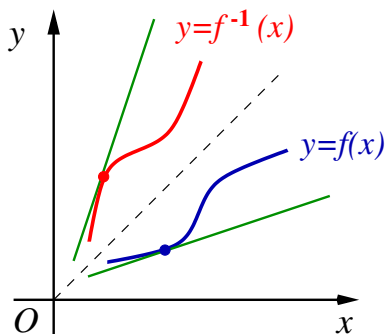
3. $h(x) = e^{x^3+2x}$, $h'(x) = (3x^2 + 2) e^{x^3+2x}$

Derivata della funzione inversa

Consideriamo una funzione f *invertibile* e *derivabile* con $f'(y) \neq 0$ (cioè, senza punti a tangente orizzontale).

La funzione inversa f^{-1} risulta *derivabile* e vale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



I grafici di f ed f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$.

Le rette tangenti hanno coefficienti angolari, uno il reciproco dell'altro.

Derivata della funzione inversa – Esempi

Esempio 1. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f(y) = y^2$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{[2y]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esempio 2. $f^{-1}(x) = \ln x$, $f(y) = e^y$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{[e^y]_{y=\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Derivate

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Ambito di validità
costante	0	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ (se α non è intero, vale per $x > 0$)
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$a > 0, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a) dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b) dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

- 1.** Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.
- 2.** Date le funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = \ln(x + 2)$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

Derivabilità e continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità:

se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \quad \text{per } x \neq x_0.$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Derivabilità e continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità:

se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \quad \text{per } x \neq x_0.$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Continuità $\nRightarrow$ Derivabilità:

1. $f(x) = |x|$ (punto angoloso)
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (punto cuspidale)

Queste funzioni sono continue, ma non sono derivabili in $x = 0$.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

nel punto $x = 2$.

2. Calcolare il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{\ln(x + 1)}{2x^2 + 3}$$

nel punto $x = 0$.

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

studiarne continuità e derivabilità.

4. Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2\beta - 1 & \text{per } x \geq 0 \\ (\beta + 1)e^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 0$.

Criterio di monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b)$$

Criterio di monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b)$$

Nota: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente decrescente in } (a, b)$$

MA non valgono le implicazioni inverse!! Basta considerare la funzione $f(x) = x^3$: è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Criterio di monotonia

Esempi. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti:

- $f(x) = x^2$

Si ha che: $f'(x) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

Quindi, f è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è crescente in $(0, +\infty)$.

- $g(x) = (x^2 - 3)e^x$

Si ha che: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \iff x \leq -3$ oppure $x \geq 1$.

Quindi, g è decrescente in $(-3, 1)$ ed è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(1, +\infty)$.

Criterio di monotonia

Attenzione: quando si applica il criterio di monotonia, bisogna sempre tenere presente il **campo di esistenza** della funzione in considerazione.

Esempio. Studiare la monotonia della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

È sbagliato dire che f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ perché f non è definita in tutto $\mathbb{R}$ (infatti, è definita solo per $x \neq 0$).

È sbagliato anche dire che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Infatti, il criterio di monotonia vale solo sugli intervalli.

Ciò che si può dire è che f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Osservazione:

se f è una funzione derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è costante in } (a, b)$$

Osservazione:

se f è una funzione derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è costante in } (a, b)$$

Infatti, sappiamo già che le costanti hanno derivata nulla.

Viceversa, se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora dal criterio di monotonia f è sia debolmente crescente che debolmente decrescente in (a, b) , quindi non può che essere costante.

Studiare la monotonia delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$
- $g(x) = \ln(x^2 - 2x)$
- $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Punti di massimo e minimo relativo

Punti di massimo e minimo relativo. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.
 x_0 si dice *punto di massimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

x_0 si dice *punto di minimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema dei punti critici (Fermat). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. Se $x_0 \in (a, b)$ e se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Nota: i punti in cui si annulla la derivata prima (tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi interni), si dicono *stazionari* o *critici*.

Studiare le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

determinandone campo di esistenza, comportamento agli estremi, monotonia ed eventuali punti di massimo e minimo.

Esercizio

Soluzione (a): $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- monotonia: $f'(x) = 6x^2 - 6$

f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$

f è strettamente decrescente in $(-1, 1)$

$x = -1$ e $x = 1$ sono punti critici di f

- eventuali punti di massimo e minimo:

$x = -1$ è un punto di massimo relativo, in cui f vale $f(-1) = 5$

$x = 1$ è un punto di minimo relativo, in cui f vale $f(1) = -3$

Soluzione (b): $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
 - f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$
 - f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$
 - $x = 0$ è un punto critico di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
 - $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, in cui f vale $f(0) = 0$

Massimi e minimi assoluti di una funzione su $[a, b]$

Problema: determinare massimo e minimo assoluti di una funzione assegnata f su un intervallo dato $[a, b]$.

1. Stabilire se la funzione è continua. Se lo è, essa ha certamente massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ (per il Teorema di Weierstrass).
2. Stabilire se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
3. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
 - gli estremi dell'intervallo: a, b ;
 - gli eventuali punti $z \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile; indichiamo con A questo insieme;
 - gli eventuali punti $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$; indichiamo con B tale insieme.

Massimi e minimi assoluti di una funzione su $[a, b]$

4. Il valore massimo (assoluto) è il massimo tra questi valori:

$$f(a), \quad f(b), \quad f(z) \text{ per } z \in A, \quad f(\bar{x}) \text{ per } \bar{x} \in B$$

5. I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ è uguale al valore massimo.
6. Il valore massimo è unico. I punti di massimo non sono necessariamente unici.

Analogamente per i punti di minimo e il valore minimo.

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 2. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 3}$$

nell'intervallo $[-3, 0]$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2+k-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di k la funzione f è continua nel punto $x = 1$.
- Per tale valore di k la funzione f è derivabile nel punto $x = 1$?
- Per il valore di k per cui la funzione è continua, trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f sul suo dominio di definizione, specificandone l'ascissa e l'ordinata.

Soluzione dell'Esercizio 3:

- $k = -1 + \ln 3$
- Per $k = -1 + \ln 3$ la funzione f non è derivabile nel punto $x = 1$.
- I candidati punti di massimo e minimo assoluti di f in $[-1, 3]$ sono gli estremi $x = -1$, $x = 3$ e il punto di non derivabilità $x = 1$ (non ci sono punti critici di f in $(-1, 3)$). Poiché $f(-1) = 3e^2$, $f(3) = 11$, $f(1) = 3$, concludiamo che il massimo assoluto di f in $[-1, 3]$ vale $3e^2$ ed è assunto in $x = -1$, mentre il minimo assoluto di f in $[-1, 3]$ vale 3 ed è assunto in $x = 1$. In altre parole, c'è un solo punto di massimo assoluto di coordinate $(-1, 3e^2)$ e un solo punto di minimo assoluto di coordinate $(1, 3)$.

- Esercizio 1.** Date le funzioni $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
 - (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione;
 - (c) disegnare un grafico qualitativo di f e di g .

- Esercizio 1.** Date le funzioni $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
 - (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione;
 - (c) disegnare un grafico qualitativo di f e di g .
- Esercizio 2.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln |x|$ per $x \neq 0$.

Esercizio 3. Le lattine in alluminio per le bibite sono dei cilindri con volume V fissato a priori. Determinare l'altezza h e il raggio di base r della lattina che permette di ottenere il volume richiesto usando meno alluminio possibile.

Per una lattina della capienza di 0.33 litri, calcolare l'altezza e il raggio di base ottimali in centimetri, con arrotondamento alla seconda cifra decimale.

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

Esercizio 3. Le lattine in alluminio per le bibite sono dei cilindri con volume V fissato a priori. Determinare l'altezza h e il raggio di base r della lattina che permette di ottenere il volume richiesto usando meno alluminio possibile.

Per una lattina della capienza di 0.33 litri, calcolare l'altezza e il raggio di base ottimali in centimetri, con arrotondamento alla seconda cifra decimale.

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

Soluzione: $r = 3.75 \text{ cm}$, $h = 7.5 \text{ cm}$

Esercizio 4. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Nota: questa funzione è detta **curva gaussiana** (o curva normale) standardizzata e ha un ruolo importante (che vedremo) in Statistica.

Esercizio 5. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{4}{1 + e^{-x}} + 2.$$

Nota: le funzioni della forma

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-k(x-x_0)}} + b$$

con $a > 0$, $k > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, sono dette **funzioni logistiche** e sono utili per descrivere fenomeni di saturazione.