

DFT: proprietà e convoluzione lineare

Laboratorio di Segnali e Immagini

Giuseppe Scarpa

Contents

1	Proprietà	2
2	Convoluzione lineare	6

1 Proprietà della DFT

Linearità

Date due sequenze $x_1[n]$ e $x_2[n]$ di lunghezza N_1 e N_2 , rispettivamente, è immediato verificare che:

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} a_1X_1[k] + a_2X_2[k], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Tale proprietà vale a condizione che $N \geq \max(N_1, N_2)$

Operazioni replica, circolari e modulo- N

Un modo alternativo per rappresentare una sequenza periodica è quello di far riferimento all'operazione di **modulo** N sulla variabile temporale n :

$$\langle n \rangle_N \triangleq n \text{ modulo } N$$

cioè

$$\langle n \rangle_N = \langle m \rangle_N \iff \exists k \in \mathbb{Z} : n - m = kN$$

Dunque la replica di un dato $x[n]$ avente lunghezza finita $L < N$, sarà:

$$\tilde{x}[n] = x[\langle n \rangle_N], \quad \forall n$$

MATLAB : `m = mod(n, N);`

Importante: ogni operazione operante su n va letta in senso "circolante", in virtù della intrinseca periodicità della DFT... anche quando $x[n]$ si riferisce ad una sequenza aperiodica!

Riflessione circolare di una sequenza

Dato una sequenza $x[n]$, con $0 \leq n \leq N$, la sua riflessione (circolare) assume implicitamente l'estensione per replicazione, ed è definita come:

$$z[n] = x[\langle -n \rangle_N] \triangleq \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ x[N - n], & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

In MATLAB :

```
>> x_pad=[x zeros(1,N-length(x))]; % padding  
eventuale  
>> n=0:1:N-1;  
>> y=x_pad(mod(-n,N)+1);
```

Proprietà della riflessione circolare

$$x[\langle -n \rangle_N] \xrightarrow{\text{DFT}} X[\langle -k \rangle_N]$$

Simmetrie pari e dispari "circolari"

Pari $x[n] = x[\langle -n \rangle_N]$

Dispari $x[n] = -x[\langle -n \rangle_N]$

ovvero

$$\text{Pari } x[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ x[N - n], & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

$$\text{Dispari } x[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ -x[N - n], & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

Anche $N/2$ è un centro di simmetria e, per N pari, la simmetria dispari impone $x[N/2] = 0$, così come in nell'origine.

Proprietà di simmetria della DFT

Riflessione e coniugazione

- $x[\langle -n \rangle_N] \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X[\langle -k \rangle_N]$
- $x^*[n] \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X^*[\langle -k \rangle_N]$
- $x^*[\langle -n \rangle_N] \xrightarrow[N]{\text{DFT}} X^*[k]$

Operatori di decomposizione

$$x[n] = \text{Pa}[x[n]] + \text{Di}[x[n]] = \Re e[x[n]] + j \Im m[x[n]] = \text{He}[x[n]] + \text{Ah}[x[n]]$$

- $\text{Pa}[x[n]] \triangleq \frac{x[n] + x[\langle -n \rangle_N]}{2}$, $\text{Di}[x[n]] \triangleq \frac{x[n] - x[\langle -n \rangle_N]}{2}$
- $\Re e[x[n]] \triangleq \frac{x[n] + x^*[n]}{2}$, $j \Im m[x[n]] \triangleq \frac{x[n] - x^*[n]}{2}$
- $\text{He}[x[n]] \triangleq \frac{x[n] + x^*[\langle -n \rangle_N]}{2}$, $\text{Ah}[x[n]] \triangleq \frac{x[n] - x^*[\langle -n \rangle_N]}{2}$

Analoghe decomposizioni si applicano a $X[k]$.

Simmetrie

$$\begin{aligned} \text{Pa}[x[n]] &\leftrightarrow \text{Pa}[X[k]] & \text{Pa}[x[n]] + \text{Di}[x[n]] &\leftrightarrow \text{Pa}[X[k]] + \text{Di}[X[k]] \\ \text{Di}[x[n]] &\leftrightarrow \text{Di}[X[k]] \\ \Re e[x[n]] &\leftrightarrow \text{He}[X[k]] & \Re e[x[n]] + j \Im m[x[n]] &\leftrightarrow \text{He}[X[k]] + \text{Ah}[X[k]] \\ j \Im m[x[n]] &\leftrightarrow \text{Ah}[X[k]] \\ \text{He}[x[n]] &\leftrightarrow \Re e[X[k]] & \text{He}[x[n]] + \text{Ah}[x[n]] &\leftrightarrow \Re e[X[k]] + j \Im m[X[k]] \\ \text{Ah}[x[n]] &\leftrightarrow j \Im m[X[k]] \end{aligned}$$

Oss.: In virtù dei legami evidenziati è possibile calcolare efficientemente due DFT di sequenze reali, associandole rispettivamente a parte reale ed immagina di un unico segnale complesso a cui applicare la DFT.

Simmetrie (casi notevoli)

pari	\longleftrightarrow	pari
dispari	\longleftrightarrow	dispari
reale	\longleftrightarrow	hermitiano
immaginario	\longleftrightarrow	antihermitiano
hermitiano	\longleftrightarrow	reale
antihermitiano	\longleftrightarrow	immaginario
reale e pari	\longleftrightarrow	reale e pari
reale e dispari	\longleftrightarrow	immaginario e dispari
immaginario e pari	\longleftrightarrow	immaginario e pari
immaginario e dispari	\longleftrightarrow	reale e dispari

Shift circolare

Lo shift circolare $z[n]$ di m unità di una sequenza $x[n]$ è definito come:

$$z[n] = x[\langle n - m \rangle_N]$$

In MATLAB :

```
>> x = ... ; m = ... ; N = ... ;  
>> x_pad = [x zeros (1, N-length(x))]; % padding  
>> n = 0:N-1;  
>> y = x_pad(mod(n-m, N)+1);
```

Di facile verifica è la seguente

Proprietà della traslazione circolare della DFT

$$x[\langle n - m \rangle_N] \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} W_N^{km} X[k]$$

Convoluzione circolare

Per sequenze aperiodiche $h[n]$ e $x[n]$ è definita la **convoluzione lineare** a cui corrisponde nel dominio trasformato il prodotto:

$$h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \tilde{H}(\nu)\tilde{X}(\nu)$$

Nel caso della DFT, invece, in cui i vettori devono intendersi circolanti (periodicità) si applica la seguente

Definizione di convoluzione circolare tra sequenze

Date due sequenze, $h[n]$ e $x[n]$, di uguale lunghezza N (periodo comune), si definisce convoluzione circolare:

$$h[n] \circledast x[n] \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[\langle n - k \rangle_N], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Di facile derivazione è la seguente

Proprietà della convoluzione (circolare)

$$y[n] = h[n] \circledast x[n] \xleftrightarrow[N]{\text{DFT}} Y[k] = H[k]X[k]$$

Il calcolo della convoluzione circolare si formalizza agevolmente in termini matriciali. Per fissare le idee sia $N = 4$, allora:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$

Matrice **Toeplitz** in cui la prima colonna è $x[n]$ e la prima riga è $x[\langle -n \rangle_N]$, generabile in MATLAB mediante **toeplitz(C,R)**

Esercizio

Scrivere la funzione con prototipo

```
function M = fold_and_wrap(x)  
...  
...
```

per il calcolo della matrice toeplitz per eseguire la convoluzione circolare di \mathbf{x} con un altro vettore \mathbf{h} .

Testare la funzione.

Ricordarsi che \mathbf{x} ed \mathbf{h} devono essere eventualmente allungati fino all' N desiderato mediante zero-padding.

Naturalmente la convoluzione può essere operata nel dominio della DFT:

» $\mathbf{y} = \text{ifft}(\text{fft}(\mathbf{h}, N) .* \text{fft}(\mathbf{x}, N));$

Correlazione circolare

Per una coppia di segnali $x[n]$ ed $y[n]$, eventualmente complessi, si definisce **correlazione circolare** la sequenza:

$$r_{xy}[m] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[\langle n-m \rangle_N] = x[m] \circledast y^*[\langle -m \rangle_N]$$

tenuto conto che $y^*[\langle -n \rangle_N] \xleftrightarrow{\frac{\text{DFT}}{N}} Y^*[k]$ si ha la seguente

Proprietà della correlazione

$$r_{xy}[n] = x[n] \circledast y^*[\langle -n \rangle_N] \xleftrightarrow{\frac{\text{DFT}}{N}} R_{xy}[k] = X[k]Y^*[k]$$

MATLAB. Si verifica facilmente che la matrice toeplitz per il calcolo della correlazione si ottiene da quella di convoluzione, trasponendo e coniugando (**fold_and_wrap(y)'**);

Espansione e decimazione

Definiamo innanzitutto l'espansione e la decimazione sia in n che in k

Espansione di fattore L

Data una sequenza $x[n]$, ovvero $X[k]$, di durata N , l'espansione di fattore L è data da

$$x^{(L)}[n] \triangleq \begin{cases} x[n/L], & \frac{n}{L} \text{ intero} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad X^{(L)}[k] \triangleq \begin{cases} X[k/L], & \frac{k}{L} \text{ intero} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Decimazione (o campionamento) di fattore M

Data una sequenza $x[n]$, ovvero $X[k]$, di durata N , la decimazione di fattore M (divisore di N) è data da

$$x_{(M)} \triangleq x[nM], \quad \text{ovvero} \quad X_{(M)} \triangleq X[kM], \quad 0 \leq n, k \leq \frac{N}{M} - 1$$

Si dimostrano:

DFT e IDFT di sequenze espanse

$$x^{(L)} \xleftrightarrow{\frac{\text{DFT}}{NL}} \tilde{X}[k] = X[\langle k \rangle_N], \quad \frac{1}{L} \tilde{x}[n] = \frac{1}{L} x[\langle n \rangle_N] \xleftrightarrow{\frac{\text{DFT}}{NL}} X^{(L)}[k]$$

e

DFT e IDFT per sequenze decimate

$$x_{(M)} \xleftrightarrow{\frac{\text{DFT}}{N/M}} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X[k + m \frac{N}{M}], \quad \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x[n + m \frac{N}{M}] \xleftrightarrow{\frac{\text{DFT}}{N/M}} X_{(M)}[k]$$

- Valgono solo per N/M intero.
- Possibile **aliasing** sia in n che in k .

Proprietà	N -sequenza	N -DFT
Linearità	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$\leftrightarrow a_1X_1[k] + a_2X_2[k]$
Traslazione in n	$x[\langle n - m \rangle_N]$	$\leftrightarrow W_N^{km} X[k]$
Traslazione in k	$W_N^{-mn} x[n]$	$\leftrightarrow X[\langle k - m \rangle_N]$
Modulazione	$x[n] \cos(\frac{2\pi}{N} k_0 n)$	$\leftrightarrow \frac{1}{2} X[\langle k - k_0 \rangle_N] + \frac{1}{2} X[\langle k + k_0 \rangle_N]$
Riflessione	$x[\langle -n \rangle_N]$	$\leftrightarrow X^*[k]$
Coniugazione	$x^*[n]$	$\leftrightarrow X^*[\langle -k \rangle_N]$
Dualità	$X[n]$	$\leftrightarrow Nx[\langle -k \rangle_N]$
Convoluzione	$h[n] \circledast x[n]$	$\leftrightarrow H[k]X[k]$
Correlazione	$x[n] \circledast y^*[\langle -n \rangle_N]$	$\leftrightarrow X[k]Y^*[k]$
Finestratura	$x[n]v[n]$	$\leftrightarrow \frac{1}{N} X[k] \circledast V[k]$
Teorema di Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n]$	$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y^*[k]$
Relazione di Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2$	$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] ^2$

2 Convoluzione lineare mediante DFT

Convoluzione lineare

- la convoluzione **lineare** di due segnali di durata L ed M ha durata $L + M - 1$ (MATLAB : `conv(x, y)`)
- ... e coincide con quella circolare eseguita su sequenze con opportuno padding:
 - di *almeno* $M - 1$ zeri su quella di durata L
 - di *almeno* $L - 1$ zeri su quella di durata M
- ottenute le sequenze zero-padded (entrambe di lunghezza $N \geq L + M - 1$):
 - si opera nel dominio del tempo, ad es:
 - » `z = fold_and_wrap(x) * y.'`;
 - ovvero, passando per la DFT:
 - » `z = ifft(fft(x, N) .* fft(y, N));`
- Qual'è la soluzione più conveniente in chiave computazionale?
 - dipende da M ed L
 - dipende da hardware e software
 - In generale è preferibile la FFT al divenire di M ed L confrontabili.

Interpretazione matriciale

Supponiamo $x[n]$ di lunghezza $L = 5$ e $h[n]$ di lunghezza $M = 3$.

$$\mathbf{y} = \text{conv}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \iff \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & 0 & 0 \\ x[1] & x[0] & 0 \\ x[2] & x[1] & x[0] \\ x[3] & x[2] & x[1] \\ x[4] & x[3] & x[2] \\ 0 & x[4] & x[3] \\ 0 & 0 & x[4] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \text{fold_and_wrap}(\mathbf{x}) * \mathbf{h}' \iff \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & 0 & 0 & x[4] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & 0 & 0 & x[4] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & 0 & 0 & x[4] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] & 0 & 0 & x[4] \\ x[4] & x[3] & x[2] & x[1] & x[0] & 0 & 0 \\ 0 & x[4] & x[3] & x[2] & x[1] & x[0] & 0 \\ 0 & 0 & x[4] & x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$