

Analisi spettrale mediante DFT

Giuseppe Scarpa

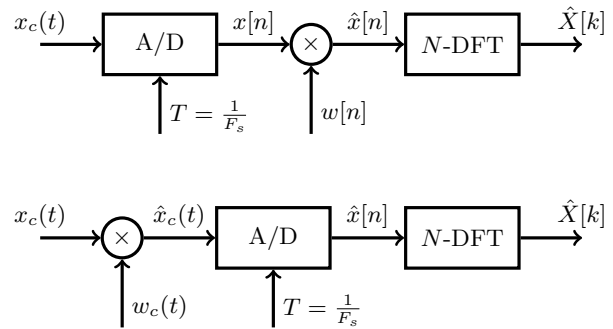
Teoria dei Segnali

L'analisi dello spettro di un segnale tempo continuo mediante DFT necessita di tre passaggi:

- ▶ Campionamento nel dominio del tempo
- ▶ Troncamento (o **finestratura**) nel tempo
- ▶ Campionamento nel dominio della frequenza

- ▶ Gli effetti dei due campionamenti possono esser tenuti sotto controllo (idealmente azzerati) mediante **sovra-campionamento**
- ▶ Gli effetti della finestratura, viceversa, sono difficilmente “controllabili”...
- ▶ ... non si può cioè ridurli “a piacimento”

Nel seguito discuteremo le implicazioni della finestratura.



Faremo riferimento al seguente schema equivalente:

- ▶ L'equivalenza sussiste se $w_c(nT) = w[n]$
- ▶ N controlla il fitting in f
- ▶ Data l'equivalenza possiamo valutare gli effetti della finestratura direttamente su $\hat{x}_c(t) \longleftrightarrow \hat{X}_c(f)$

Finestratura nel tempo di segnali sinusoidali

Per la proprietà della convoluzione:

$$\hat{x}_c(t) = x_c(t)w_c(t) \longleftrightarrow \hat{X}_c(f) = X_c(f) * W_c(f)$$

Nel caso specifico di una suinusoide $x_c(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$,

$$x_c(t) \longleftrightarrow X_c(f) = \frac{1}{2}A_1 e^{-j\phi_1} \delta(f + f_1) + \frac{1}{2}A_1 e^{j\phi_1} \delta(f - f_1)$$

e di una finestra rettangolare $w_c(t) \triangleq w_R(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$,

$$w_c(t) \longleftrightarrow W_c(f) \triangleq W_R(f) = T_0 \operatorname{sinc}(fT_0) e^{-j\pi fT_0}$$

Pertanto si ha:

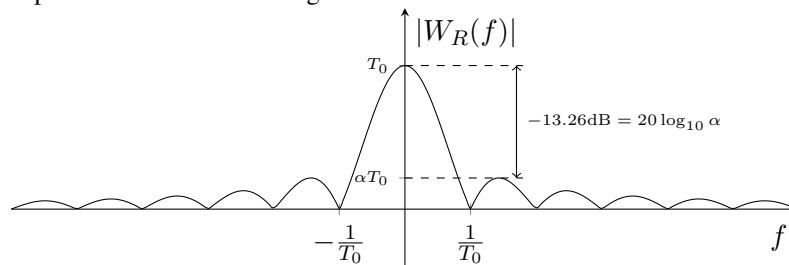
$$\hat{X}_c(f) = \frac{A_1 T_0}{2} \left[\text{sinc}((f + f_1)T_0) e^{-j\pi(f+f_1)T_0 - j\phi_1} + \text{sinc}((f - f_1)T_0) e^{-j\pi(f-f_1)T_0 + j\phi_1} \right]$$

È anche utile tener presente la seguente

Proprietà dei segnali di durata limitata (finestre)

Tutti segnali che hanno una durata rigorosamente limitata, quindi anche i segnali finestra, hanno un andamento a lobi.

L'ampiezza dello spettro della finestra rettangolare:



I principali parametri sintetici che caratterizzano una funzione a lobi sono:

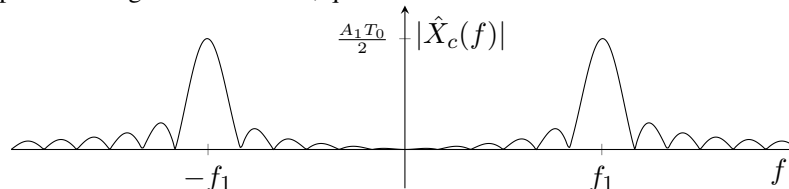
- ▶ Banda (bilatera) del lobo principale (Δ_{ML})
- ▶ Attenuazione dei lobi laterali (α_{SL})
- ▶ Decadimento asintotico o *roll-off* (ρ_∞)

Esempio: Parametri sintetici della finestra rettangolare

Nel caso della finestra rettangolare:

- ▶ $\Delta_{ML} = \frac{4\pi}{T_0} [\text{rad.}] \equiv \frac{2}{T_0} [\text{Hz}]$
- ▶ $\alpha_{SL} = 13.26\text{dB}$
- ▶ $\rho_\infty = 6\text{dB/ott.}$

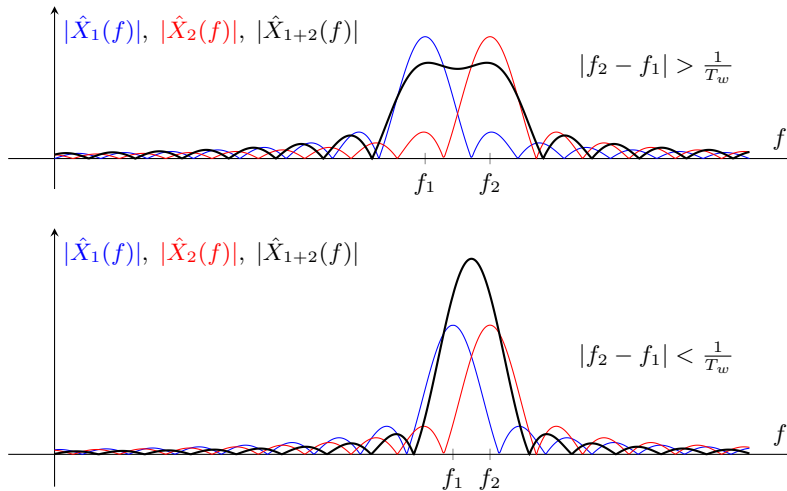
Tornando allo spettro del segnale sinusoidale, questi sarà:



Pertanto differisce dallo spettro a righe *ideale* in prima approssimazione per tre elementi quantificabili come segue:

- ▶ *Main lobe spread*: $\Delta_{ML} \Rightarrow$ risoluzione/localizzazione \downarrow

- ▶ *Side lobes Leakage*: $\alpha_{SL} \Rightarrow$ armoniche spurie
- ▶ *Spread sulle code*: ρ_∞

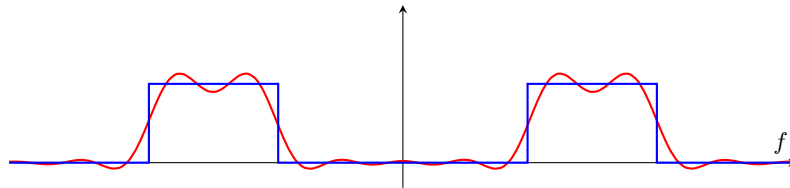


- ▶ Si osservi inoltre che $1/T_w$ rappresenta anche la più bassa frequenza rilevabile (basta assumere $f_1 = 0$)
- ▶ Detta diversamente, per una sinusoidale di dato periodo T_0 , la durata della finestra deve essere almeno pari ad un suo periodo T_0 .

Finestratura nel tempo di segnali spettro-continuo

Se $x_c(t)$ è un segnale a spettro continuo (aperiodico), ad esempio BPF ideale, lo spettro della sua versione finestrata sarà:

$$\hat{X}_c(f) = X_c(f) * W_c(f)$$



Graficamente:

Anche in questi casi sono riconoscibili i fenomeni di **spread** e **leakage**

Principio di indeterminazione e finestra ottimale

Vi sono dunque due esigenze “contrastanti”:

- ▶ Risoluzione... influenzata da Δ_{ML} (determina “sfocatura”)
- ▶ Evitare dispersione spettrale... determinata dai lobi laterali (in primis) e dalle code

Nota bene: Questi due elementi sono in contrasto e non possono essere ridotti arbitrariamente, simultaneamente, stante un **principio di indeterminazione** della trasformata di Fourier.

Tale principio si riflette in maniera già evidente nella **proprietà di cambiamento della scala**:

$$x_c(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X_c\left(\frac{f}{a}\right)$$

Per formalizzare meglio il principio di intererminazione è necessario introdurre una misura di durata (in tempo e in frequenza).

In particolare si mutua dalla statistica il concetto di varianza. Assumendo

$$\blacktriangleright \int_{-\infty}^{\infty} |x_c(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(f)|^2 df = 1$$

(normalizzazione dell'energia, non limitante)

$$\blacktriangleright \sqrt{|t|x_c(t)} \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$$

(necessaria per assicurare la convergenza di determinate operazioni di integrazione)

$$\blacktriangleright m_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} t|x_c(t)|^2 dt = 0$$

(ipotesi di media nulla di $|x_c(t)|^2$, non limitante)

è possibile definire come **durata temporale** di $x_c(t)$ la quantità

$$\sigma_t^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} t^2|x_c(t)|^2 dt$$

Sotto analoghe condizioni si può definire la **banda**:

$$\sigma_f^2 \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f^2|X_c(f)|^2 df$$

Con pochi passaggi, usando in particolare la disuguaglianza di Schwarz, si prova il seguente

Principio di indeterminazione

Dato un segnale $x_c(t)$ per il quale sono applicabili le definizioni di durata temporale σ_t e banda σ_f sopra richiamate, allora:

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

Inoltre, l'uguaglianza si attinge esclusivamente nel caso di impulso **gaussiano**: $x_c(t) = c e^{-kt^2/2}$, con $k > 0$,

In altre parole, una riduzione della durata temporale comporta necessariamente un allargamento della banda, e viceversa.

Sintesi finestre

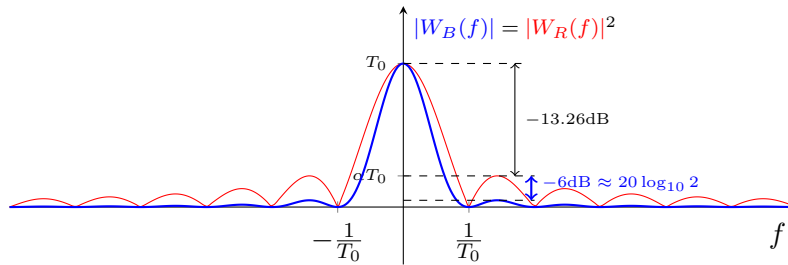
- ▶ In accordo al principio di incertezza lo spettro $W_c(f)$ ideale richiederebbe una finestra di durata infinita.
- ▶ Fissata la durata della finestra, qual'è la forma della finestra "ottimale"?
- ▶ Non esistono risposte univoche né procedure standard

Procediamo euristicamente partendo dalla finestra rettangolare e cercando dei miglioramenti...

Per semplicità consideriamo finestre centrate in $t = 0$, di durata T_0 e normalizzate: $w_c(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_c(f)df = 1$

- ▶ Nel caso della finestra rettangolare, lo spettro è di tipo *sinc*.

- una operazione di **quadratura** (auto convoluzione nel tempo) attenuerebbe di 6dB i lobi laterali



Attenzione: è raddoppiata ($2T_0$) la durata temporale:

$$w_R(t) * w_R(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_0}, & |t| \leq T_0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \triangleq \Lambda\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

La finestra di **Bartlett** di durata T_0 è definita come $w_B(t) = \Lambda(2t/T_0)$, dunque:

$$w_B(t) = \left(1 - \frac{2|t|}{T_0}\right) w_R(t) \xrightarrow{\text{CTFT}} W_B(f) = \frac{T_0}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{T_0 f}{2}\right)$$

- Un modo alternativo per abbattere i lobi laterali è quello di usare una interferenza distruttiva tra versioni traslate della *sinc*
- Si ottengono così altre due finestre notevoli: **Hann** e **Hamming**
vediamo come...

Finestre di Hann ed Hamming

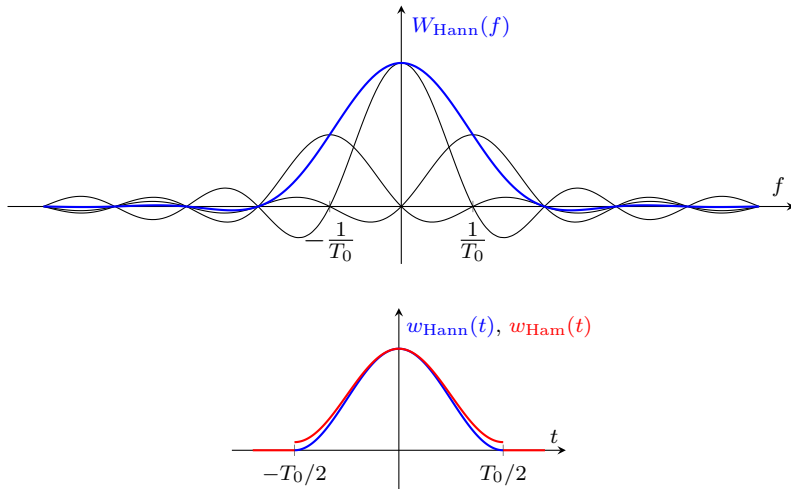
$$W_c(f) = a W_R(f) + b W_R(f - 1/T_0) + b W_R(f + 1/T_0)$$

antitrasformando:

$$w(t) = \left[a + 2b \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) \right] w_R(t)$$

In particolare:

- $a = 2b = 0.5 \implies$ **Hann**
- $a = 0.54, b = 0.23 \implies$ **Hamming**



- Hann cerca la massima regolarità in t e quindi il massimo *roll-off*
- Hamming cerca il massimo α_{SL} (abbattimento dei lobi laterali preminenti)

Vale infatti la seguente

Proprietà di decadimento asintotico della trasformata

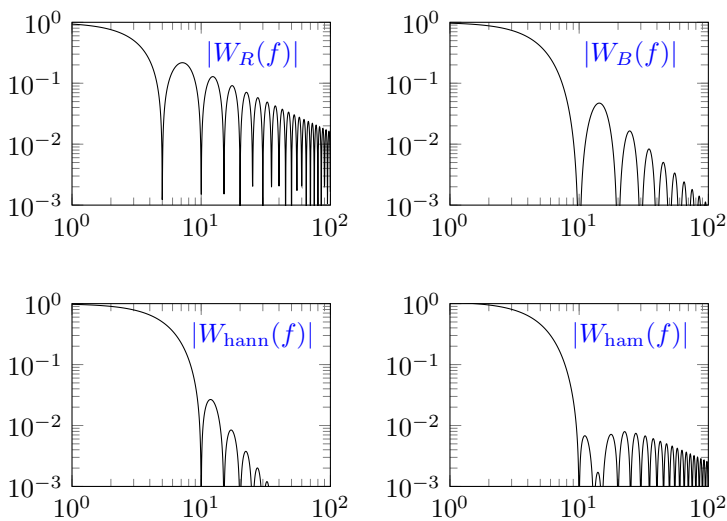
Se p è l'ordine della prima derivata discontinua (ma limitata) di $x_c(t)$ allora

$$|X_c(f)| \xrightarrow{|f| \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{|f|^{p+1}}\right)$$

il che equivale a $\rho_\infty = 20 \log_{10} 2^{p+1} \approx 6(p+1)[\text{dB/ott.}]$

Pertanto:

$$\rho_\infty^{\text{ham}} = \rho_\infty^R = 6\text{dB/ott.}; \quad \rho_\infty^B = 12\text{dB/ott.}; \quad \rho_\infty^{\text{hann}} = 18\text{dB/ott.}$$



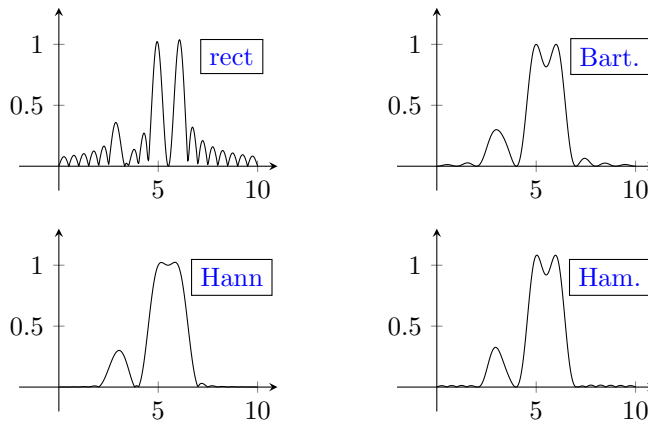
Sommario delle caratteristiche delle finestre

Finestra	Δ_{ML} [Hz]	ρ_{∞} [dB/ott.]	α_{SL} [dB]
Rettangolare	$2/T_0$	-6	-13.3
Bartlett	$4/T_0$	-12	-26.5
Hann	$4/T_0$	-18	-31.5
Hamming	$4/T_0$	-6	-42.9

- ▶ Se si desidera la massima risoluzione → rettangolare
- ▶ Per minimizzare la probabilità di falsi picchi → Hamming
- ▶ Altrimenti → Hann

Esempio: Esempio di analisi spettrale

Sia $x_c(t) = 0.4 \cos(2\pi(3)t) + \cos(2\pi(5)t) + \cos(2\pi(6)t)$, e $T_0 = 2 > 1/(6 - 5) = 1$ (condizione per risolvere armoniche spaziate di 1Hz)



Effetti del campionamento in frequenza

Principali accorgimenti:

- ▶ Il periodo (la frequenza) di campionamento T ($F_s = 1/T$) deve essere scelta per evitare aliasing spettrale
- ▶ La durata della finestra, $T_0 = LT$, determina la capacità risolutiva in frequenza
- ▶ La finestra va scelta in funzione delle specifiche esigenze
- ▶ La DFT (campionamento in frequenza della DTFT) va operata su un numero di punti N almeno pari ad L . In verità è auspicabile $N \gg L$.

Campionamento sincro della DTFT

La dispersione (o *leakage*) presente nella DTFT, non è detto che si manifesti anche sul suo campionamento (DFT).

In particolare, detta $f \triangleq F/F_s$ la frequenza normalizzata di una armonica di interesse, allora:

- ▶ $f = m/N$, camp. **sincrono** \Rightarrow *no leakage*
- ▶ $f \neq m/N$, camp. **asincrono** \Rightarrow *leakage*
- ▶ $f = \frac{m+1/2}{N}$, camp. **asincrono** – *worst case*

In altre parole, l'analisi di spettrale di un tono di frequenza normalizzata pari a f è sincrona se f è un multiplo intero della risoluzione in frequenza $1/N$.

Spettrogramma e short-time DFT

L'analisi spettrale presentata fin'ora risulta inattuabile nella pratica per le seguenti ragioni:

- ▶ Non stazionarietà dei segnali di interesse
Quello della stazionarietà è l'aspetto più critico. Le armoniche componenti il segnale dovrebbero avere ampiezza, fase e frequenza costanti, per poter essere stimate correttamente.
La mancanza di stazionarietà è tanto più dannosa quanto maggiore è la durata del segnale considerato.
- ▶ Dimensione imprevedibile dei segnali
- ▶ Real-time

Una soluzione è costituita da una trasformata di Fourier "scorrevole":

Short-time DFT

$$X[k, n] \triangleq \sum_{m=0}^{L-1} w[m]x[n+m]e^{-\frac{2\pi}{N}km}$$

- ▶ L indica la lunghezza della segmento di segnale analizzato.
Trade-off:
 $L \uparrow (\downarrow) \implies \text{risoluzione} \uparrow (\downarrow) / \text{stazionarietà} \downarrow (\uparrow)$
- ▶ n indica il posizionamento della finestra scorrevole che va da n a $n + N - 1$.

Esempio: Analisi del segnale chirp

Il segnale chirp è un segnale modulato FM linearmente:

$$x_c(t) = \sin(\pi F_1 t^2 / \tau), \quad 0 \leq t \leq \tau$$

avente quindi frequenza istantanea

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\pi (F_1 / \tau) t^2] = F_1 \frac{t}{\tau}$$

il cui valore massimo (F_1) è assunto in $t = \tau$.

Campionando con passo $T = 1/F_s$, si ha il segnale

$$x[n] \triangleq x_c(nT) = \sin(\pi f_1 n^2 / L)$$

costituito da $L = \tau/T$ punti. Si è posto $f_1 \triangleq F_1/F_s$.

Generazione segnale chirp in MATLAB :

```
» TAU = 10;
» Fs = 1000; T=1/Fs; % Sampling rate
» t = 0:T:TAU;
» F0 = 0; % Frequenza all'istante iniziale
» F1 = 500; % Frequenza finale
» xc = chirp(t,F0,TAU,F1); %
» figure(1); plot(t(1:1000),xc(1:1000));
```

Per ottenere la trasformata del segnale chirp ricostruita mediante DFT globale:

```
...
...
» xc2 = xc(1:1000); % 1 sec. di xc, Fmax=50Hz
» N=2^12;
» X2 =(1/Fs)* fft(xc2,N); X2 = X2(1:1+2^11);
» f = (Fs/2)*linspace(0,1,N/2+1);

» figure(2); plot(f,abs(X2));
» xlabel('...'); ylabel('...'); title('...');
```

Analisi mediante spettrogramma in MATLAB

```
... ;
... ;
» Lw = 64; % Lunghezza finestra
» w = hann(Lw); % Generazione finestra
% w = window(@hann,Lw);
» NFFT = 1024;
» N_overlap = Lw-10; % Overlap (<Lw)
» [S,F,Tspec] = spectrogram(xc,w,N_overlap,NFFT,Fs);

% S, spettrogramma: f (t) varia sulle righe (colonne)
% F: frequenze campionate dallo spettrogramma
% Tspec: tempi di campionati dallo spettrogramma

» figure(3); imagesc(Tspec,F,-log(abs(S)));
» colormap gray; colorbar;
» xlabel('time [sec]'); ylabel('frequence [Hz]');
» title('Spettrogramma del segnale chirp');
```

Esercitazione MATLAB

Esempio: Spettrogramma dei segnali audio demo di MATLAB

Caricare il segnale oggetto dell'analisi mediante `» load splat`

1. Sviluppare un script MATLAB per tracciare lo spettrogramma del segnale con parametri fissi assegnati arbitrariamente (`Lw = ...;`, etc.)
2. Valutare con prove ripetute cosa accade al variare dei diversi parametri di interesse (finestra impiegata, NFFT, lunghezza della finestra, forma della finestra, grado di overlap)

3. È sempre vero che la finestra rettangolare presenta una risoluzione spettrale maggiore delle altre?

*[Può risultare utile visualizzare lo spettrogramma per un istante di tempo fissato (ad esempio a metà segnale - colonna centrale di **S**)]*

4. Cosa accade (e perché) se si aumenta indefinitamente la durata della finestra?
5. Individuare un setting ottimale per lo spettrogramma di **splat**.
6. Rilevare e diagrammare la frequenza istantanea del “fischio”
7. Risolvere il punto 5 anche per gli altri segnali demo di MATLAB : **handel**, **gong**, **laughter**