

# Sistemi di riferimento geodetico

## *Il punto sui sistemi cartografici adottati in Italia*

Davide Emmolo, Dottore di Ricerca in Scienze Geodetiche e Topografiche [davideemmolo@gmail.com](mailto:davideemmolo@gmail.com)

### INTRODUZIONE

Con il Decreto Ministeriale del 10 Novembre 2011 - *Regole tecniche per la definizione del contenuto del Repertorio nazionale dei dati territoriali, nonché delle modalità di prima costituzione e di aggiornamento dello stesso* – è stata messa in pratica una scelta epocale nel panorama dei sistemi di riferimento cartografici usati in Italia.

Il Decreto ha infatti mandato in soffitta il vecchio sistema ufficiale di coordinate cartografiche piane Gauss-Boaga con il relativo Datum Roma40 e ha imposto come sistema di riferimento geodetico nazionale la realizzazione ETRF2000 - all'epoca 2008.0 - del Sistema di riferimento geodetico europeo ETRS89, ottenuta nell'anno 2009 dall'Istituto Geografico Militare, mediante l'individuazione delle stazioni permanenti, l'acquisizione dei dati ed il calcolo della Rete Dinamica Nazionale (RDN).

Nel presente articolo cercheremo di chiarire alcuni aspetti riguardanti il labirinto dei Datum usati in Italia e cercheremo di capire cosa è cambiato con la introduzione del nuovo sistema ufficiale di riferimento nazionale.

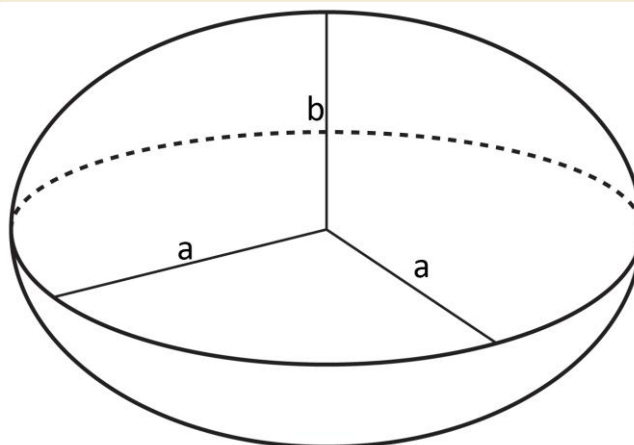
### LA FORMA NOSTRO PIANETA

Edward Grant, eminente storico americano studioso della scienza medievale, sostiene quanto segue: *“Contrariamente a un moderno errore popolare, per il quale prima della scoperta di Cristoforo Colombo si sarebbe pensato che la Terra fosse piatta, non si conoscono “flat-earthers” di una qualsiasi importanza nell'Occidente latino (medievale)”*. L'affermazione del professor Grant rafforza la convinzione che, anche nel periodo medioevale, l'Occidente aveva certezza della sfericità del pianeta. Oggi è a tutti noto che la Terra ha la forma di una *sfera schiacciata ai poli*. Il rigonfiamento equatoriale è un fenomeno comune a tutti i corpi celesti in rotazione dovuto alla accelerazione centrifuga e la Terra stessa presenta un rigonfiamento equatoriale di circa 43 Km.

La superficie matematica che meglio approssima la forma terrestre è l'**ellissoide** biassiale. L'ellissoide biassiale si ottiene dalla rotazione di un'ellisse attorno al suo asse minore. L'equazione cartesiana di un ellissoide biassiale standard centrato nell'origine di un sistema di riferimento OXYZ è:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

dove  $a$  e  $b$  rappresentano i due semiassi detti rispettivamente semiasse maggiore e minore.



**Figura 1** – Rappresentazione dell'ellissoide biassiale.

Se si seziona l'ellissoide biassiale con uno degli infiniti piani paralleli al piano equatoriale XY, si ottiene una circonferenza; viceversa le sezioni della superficie con il fascio proprio di piani aventi per asse l'asse di rotazione z sono delle ellissi.

Si definisce eccentricità dell'ellissoide la grandezza  $e$  così definita:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Sostituendo nella equazione precedente  $a=b$  si ottiene l'eccentricità di una sfera che è pari a zero.

Si definisce schiacciamento dell'ellissoide la grandezza:

$$\alpha = \frac{a - b}{a}$$

Sostituendo nella equazione precedente  $a=b$  si ottiene lo schiacciamento di una sfera che è pari a zero. Dalle definizioni precedenti si evince che sia l'eccentricità che lo schiacciamento sono grandezze adimensionali.

## Ellissoidi di riferimento

Le dimensioni del pianeta erano già note, con ottima approssimazione, al tempo di Eratostene (III sec. a.c.). Negli ultimi due secoli, con lo sviluppo delle tecnologie, si sono avvicinate parecchie valutazioni dei due semiassi, sempre più accurate con il passare degli anni. Queste stime hanno dato vita a centinaia di ellissoidi ciascuno dei quali caratterizzato da differenti parametri geometrici.

Per quanto concerne la cartografia correntemente utilizzata in Italia è necessario conoscere i parametri di quattro ellissoidi illustrati nella seguente tabella:

Nome dell'ellissoide (anno d'introduzione)	$a$ [m]	$b$ [m]	$1/\alpha$	adozione
Bessel (1841)	6377397,155	6356078,963	299,1528128	Cartografia Catastale Italiana
Hayford (1910) / Internazionale (1924)	6378388	6356911,946	297	Cartografia Ufficiale Italiana fino al 27/02/2012

GRS80 (1980)	6378137	6 356 752,31414	298,257222101	Cartografia Ufficiale Italiana
WGS84 (1984)	6378137	6356752,3142	298,257223563	Navstar GPS

Come è facile notare, gli ultimi due ellissoidi (GRS80 e WGS84), fondamentali per i discorsi a venire, differiscono di quantità praticamente trascurabili nel semiasse minore (0,105 mm !) e quindi, di conseguenza, nello schiacciamento inverso. Le piccole differenze evidenziate rivestono una certa importanza per il calcolo orbitale dei satelliti artificiali ma non rivestono alcun peso nel campo delle applicazioni topografiche e cartografiche. Ai fini cartografici il GRS80 e il WGS84 sono solo nomi diversi con cui viene chiamato lo stesso ellissoide.

L'**ellissoide di Bessel** è stato utilizzato per la redazione della *Prima Carta d'Italia* realizzata attraverso la rappresentazione convenzionale di Sanson – Flamsteed (ante 1940). Inoltre è stato adottato come ellissoide di riferimento per la Cartografia Catastale Italiana. Nel 1942 si è dato inizio alla conversione delle mappe catastali a seguito della adozione della rappresentazione conforme di Gauss - Boaga (una applicazione della carta conforme di Gauss al territorio italiano) ed è stato adottato, di conseguenza, l'ellissoide internazionale. Ciononostante l'ellissoide di Bessel è ancora oggi in vigore per tutte le vecchie mappe catastali che non hanno subito gli effetti dell'aggiornamento.

A John Fillmore Hayford (1868 –1925), importante geodeta americano, si deve la definizione, avvenuta nel 1910, di un ellissoide di riferimento che migliorò le stime di Bessel. Nel 1924 la *International Union of Geodesy and Geophysics* (IUGG), un organismo scientifico internazionale, ha scelto l'**ellissoide di Hayford** come **ellissoide internazionale** proponendolo come standard a tutte le nazioni del Mondo. A seguito di questa definizione molte nazioni hanno successivamente sostituito l'ellissoide di riferimento precedentemente vigente. In Italia è stato adottato nel 1940, sostituendo l'ellissoide di Bessel, a seguito della definizione del Datum Roma40 ed è stato adottato come ellissoide di riferimento per la Cartografia Ufficiale Italiana fino all'entrata in vigore del D.M. 10/11/2011.

Il **GRS80** (*Geodetic Reference System* 1980) è un ellissoide definito dalla IUGG in occasione della VII assemblea generale dell'organizzazione.

**WGS84** è l'acronimo di *World Geodetic System* 1984. Il WGS84 è l'ellissoide introdotto dal governo Americano nel 1984 come sistema di riferimento geodetico per la costellazione satellitare NAVSTAR GPS.

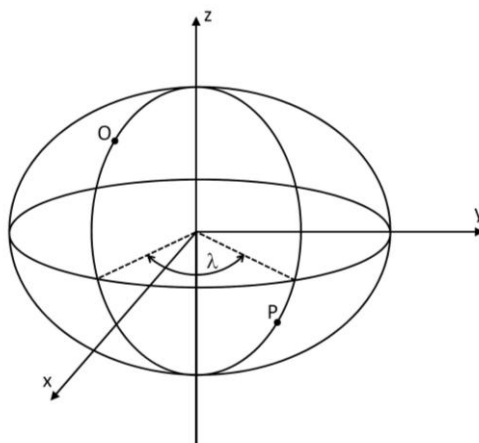
## SISTEMI DI COORDINATE SULL'ELLISSOIDE

Esistono molti sistemi per determinare univocamente la posizione di un punto sulla superficie di un ellissoide. In questo articolo se ne esaminano due, i più importanti e utili ai fini dell'uso della cartografia italiana e dei sistemi di posizionamento satellitare GNSS:

- il sistema di coordinate geografiche (ellissoidiche): la longitudine  $\lambda$  e la latitudine  $\phi$ ,
- il sistema di coordinate cartesiane geocentriche.

Le coordinate geografiche  $\lambda$  e  $\phi$  sono due angoli. Tradizionalmente questi due angoli sono espressi nel sistema sessagesimale. La scelta di questo sistema, non decimale e quindi scomodo, è legata essenzialmente a motivazioni di carattere storico e sentimentale più che ad una esigenza diretta.

Si consideri un generico punto  $P$  sulla superficie dell'ellissoide. La **longitudine** ellissoidica  $\lambda$  del punto  $P$  è un angolo diedro cioè un angolo compreso tra due semipiani. Questi due semipiani, detti semipiani meridiani, sono due tra gli infiniti del fascio rotante attorno all'asse di rotazione terrestre: il piano meridiano passante per un punto origine  $O$  e il piano meridiano passante per il generico punto  $P$ .



**Figura 2** – Definizione geometrica della longitudine.

L'origine  $O$  delle longitudini è fissata convenzionalmente quando viene definito un Datum. Nei Datum planetari ED50 e WGS84 l'origine è stata fissata coincidente con l'osservatorio di Greenwich, a Londra. Nel Datum italiano Roma40 l'origine è stata fissata convenzionalmente con un punto dell'osservatorio astronomico di Monte Mario a Roma.

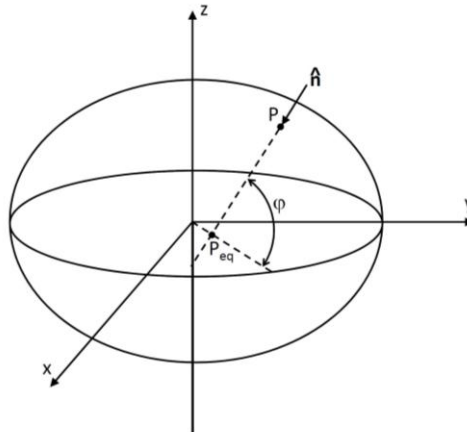
La longitudine varia tra  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$  oppure, con altra notazione, tra  $180^\circ$  Ovest e  $180^\circ$  Est. Sull'ellissoide, le ellissi che collegano i punti aventi la stessa longitudine si chiamano **meridiani** e sono curve caratterizzate dalla seguente equazione parametrica:

$$\lambda = \text{costante}$$

I due punti di incontro tra tutti i meridiani si chiamano **poli geografici**. I poli geografici sono immutabili nel tempo e non vanno confusi con i poli magnetici che, al contrario, si spostano a causa dell'inclinazione dell'asse terrestre rispetto al piano orbitale dell'eclittica ( $23^\circ 27'$ ).

La longitudine dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario rispetto a Greenwich nel Datum ED50 è  $12^\circ 27' 08,400''$ . La longitudine dell'osservatorio di Greenwich nel Datum ED50 è zero. La longitudine nello stesso sistema dell'antimeridiano di Greenwich è  $\pm 180^\circ$ .

Si consideri ancora il generico punto  $P$  sulla superficie ellissoidica. La **latitudine** ellissoidica  $\phi$  è l'angolo formato tra la normale all'ellissoide in corrispondenza del punto  $P$  e il piano equatoriale.



**Figura 3** – Definizione geometrica della latitudine.

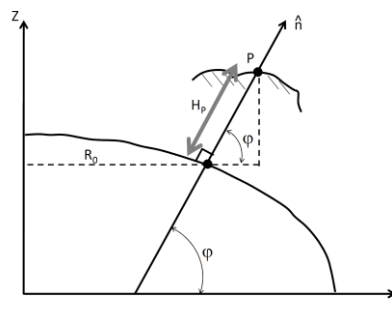
La latitudine è quindi un angolo formato tra una retta e un piano. Si noti nella figura precedente che la normale nel punto  $P$  all'ellissoide non passa per l'origine del sistema di riferimento ma, proprio a causa dello schiacciamento, passa sotto il centro dell'ellissoide incidendo l'asse di rotazione. La latitudine  $\phi$  vale  $0^\circ$  all'equatore,  $+90^\circ$  al polo nord geografico e  $-90^\circ$  al polo sud geografico. Con altra notazione è lecito dire che la latitudine varia tra  $90^\circ$  Sud e  $90^\circ$  Nord. Sull'ellissoide, le circonferenze che collegano i punti aventi la stessa latitudine si chiamano **paralleli** e sono caratterizzati dalla seguente equazione parametrica:

$$\phi = \text{costante}$$

I paralleli, come dice il nome, sono curve parallele tra di loro. Il parallelo di raggio massimo (pari al semiasse maggiore  $a$ ) è l'equatore. L'equatore può essere definito come luogo geometrico dei punti aventi latitudine zero.

La latitudine  $\phi$  dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario a Roma nel Datum ED50, nel sistema angolare sessagesimale, è di  $41^\circ 55' 22,5''$  Nord.

Nel caso in cui il punto  $P$  non si trovi sulla superficie dell'ellissoide, cioè abbia una **quota ellissoidica**  $H_P$  (da non confondersi con la quota ortometrica s.l.m.  $h_P$ ) non nulla, le sue coordinate geografiche ellissoidiche sono rappresentate dalla terna  $P(\lambda_P, \phi_P, H_P)$ .



**Figura 4** – Quota e latitudine ellissoidica.

Dato un punto  $P$  sulla superficie ellissoidica le **coordinate geocentriche**  $x_P, y_P$  e  $z_P$  di  $P$  sono rappresentate dalle coordinate cartesiane tridimensionali misurate rispetto all'origine del sistema di riferimento prefissato fissata coincidente con il centro di massa della Terra.

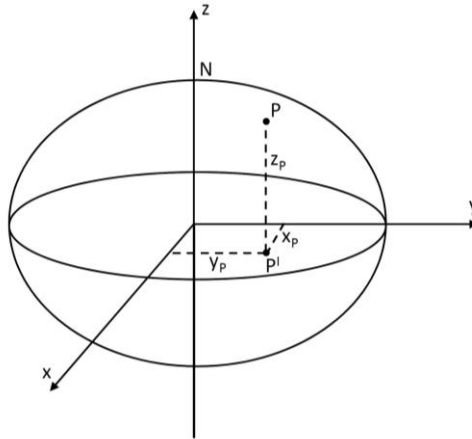


Figura 5 – Coordinate cartesiane geocentriche.

## LA SUPERFICIE DI RIFERIMENTO ALTIMETRICO

Storicamente il problema della determinazione della posizione di un punto sulla superficie terrestre è stato scisso nelle due componenti planimetrica e altimetrica. L'ellissoide è una superficie matematica regolare quindi molto comoda per la definizione di un sistema planimetrico di coordinate. L'ellissoide non è però una superficie di riferimento ottimale per l'altimetria perché non ha alcun significato fisico. Le quote ellissoidiche, misurate lungo la normale all'ellissoide, non seguono l'andamento delle linee di forza della gravità. Le quote ellissoidiche non presentano quindi quell'andamento che seguirebbe il comportamento di un grave lasciato libero di cadere nel campo gravitazionale terrestre.

Inoltre, l'ellissoide, proprio perché definito come una superficie matematica, risulta difficilmente individuabile sulla superficie fisica terrestre.

La superficie scelta per l'altimetria non è una superficie matematica ma una superficie fisica: il **geoide**.

Sulla superficie fisica della Terra esiste una particolare direzione molto facile da individuare con una semplice dotazione strumentale: la direzione della forza di gravità. Lo strumento cui si fa riferimento è il filo a piombo che materializza, punto per punto, la direzione della tangente in un punto alla linea di forza del campo gravitazionale terrestre passante per il punto stesso. Il vettore accelerazione di gravità può essere ottenuto dalla composizione di altri due vettori: l'accelerazione centrifuga e l'accelerazione gravitazionale di Newton.

Allo stesso modo, il vettore **forza di gravità** è ottenuto dalla somma vettoriale tra la forza centrifuga e la forza di attrazione gravitazionale di Newton:

$$\vec{g} = \vec{f} + \vec{F}$$

L'insieme dei vettori **g** costituisce un campo vettoriale chiamato **campo gravitazionale**. Ciò significa che, in ogni punto della superficie terrestre, il vettore **g** assume diverso modulo, direzione e verso.

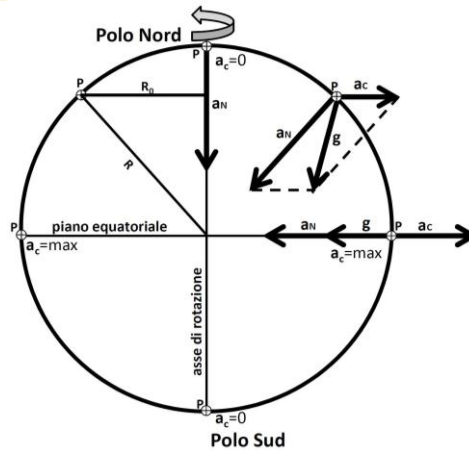


Figura 6 – Il vettore accelerazione di gravità  $g$ .

Il campo vettoriale gravitazionale è un campo conservativo; ciò equivale a dire che il lavoro compiuto dalle forze del campo quando un corpo si sposta da un punto a un altro non dipende dal percorso compiuto. Questa condizione, in meccanica classica, implica che esso ammetta una funzione scalare  $U(x,y,z)$  chiamata **potenziale**. Considerato un generico punto  $P$  sulla superficie terrestre di coordinate  $x_p, y_p$  e  $z_p$  e un elemento infinitesimo di massa terrestre di coordinate  $(a,b,c)$ , dimensioni  $d_a, d_b$  e  $d_c$  e massa infinitesima  $dM$  il potenziale  $U$  in corrispondenza del punto  $P$  può essere ottenuto dalla somma delle funzioni potenziali delle forze che costituiscono la forza di gravità:

$$U = G * \iiint \frac{\delta * da * db * dc}{\sqrt{(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 + (z_p - c)^2}} + \frac{1}{2} \omega^2 (x_p^2 + y_p^2)$$

dove  $\delta$  è la densità dell'elemento infinitesimo  $dM$ .

Nell'equazione precedente l'integrale di volume rappresenta il potenziale della forza di attrazione universale e la seconda parte il potenziale della forza centrifuga. L'integrale triplo che compare nella prima metà della formula è irrisolvibile: ciò è dovuto alla mancata conoscenza puntuale della densità terrestre  $\delta$ . La densità terrestre non è, infatti, costante: la densità della crosta terrestre varia tra 2500 e 3000 kg/m<sup>3</sup> mentre la densità media della Terra è circa 5520 kg/m<sup>3</sup> da cui se ne deduce che, andando dalla litosfera verso il nucleo, la densità aumenta.

Il pianeta Terra è circondato da una serie di superfici chiuse (fino a una distanza dalla Terra di 5-6 volte il raggio medio terrestre) dette **equipotenziali** di equazione  $U = costante$  perpendicolari in ogni punto alle linee di forza del campo gravitazionale terrestre.

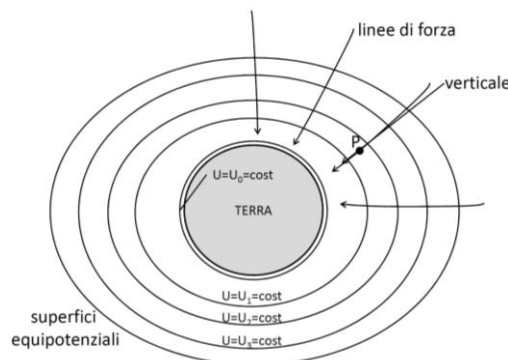


Figura 7 – Superfici equipotenziali e linee di forza del campo gravitazionale terrestre.

I punti che giacciono sulla stessa superficie equipotenziale presentano tutti lo stesso valore del potenziale del campo gravitazionale terrestre. Come esempio, si pensi ad un liquido in quiete che disposto all'interno di un contenitore si dispone proprio secondo una porzione di superficie equipotenziale. Il geode è definito come quella particolare superficie equipotenziale passante per il cosiddetto livello medio dei mari. La equazione dell'integrale triplo per  $U=U_0$  (costante fissata convenzionalmente) rappresenta la cosiddetta **equazione del geode**.

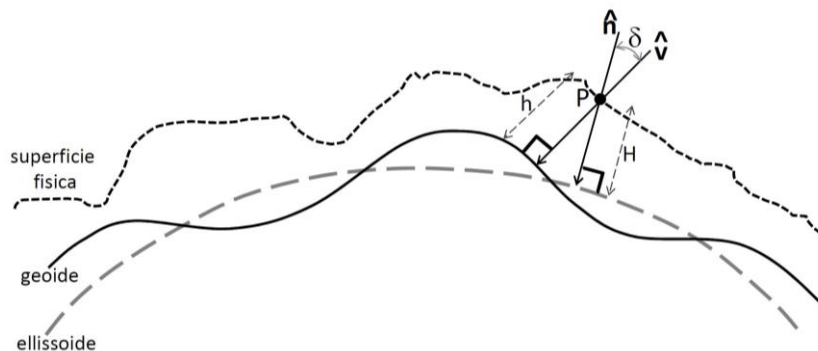
Da quanto detto precedentemente sulla mancata conoscenza della densità puntuale della Terra, appare chiaro come sia impossibile risolvere l'equazione del geode.

Tutte le superfici equipotenziali godono di interessanti proprietà:

- ✓ le linee di forza del campo gravitazionale, che sono curve gobbe (cioè non contenute in alcun piano), attraversano le superfici equipotenziali sempre perpendicolarmente;
- ✓ le superfici equipotenziali non sono parallele tra loro e quindi anche le linee di forza della gravità non sono parallele tra loro;
- ✓ sono lisce e prive di spigoli e singolarità;
- ✓ presentano una forma simile, nell'intervallo in cui si mantengono chiuse, a quella di un ellissoide di rotazione.

Si definisce **verticale** la retta tangente in un punto alla linea di forza della gravità passante per il punto stesso. Se ne deduce che la verticale è una retta che, punto per punto, risulta perpendicolare al geode.

Si definisce **deviazione della verticale**  $\delta$  l'angolo formato tra la verticale e la normale all'ellissoide in un punto.



**Figura 8** – Deviazione della verticale.

Si definisce **quota ortometrica**  $h$  di un generico punto  $P$  (detta anche **quota geoidica** o **quota s.l.m.**) la lunghezza del segmento compreso tra il punto  $P$  e il geode, misurata lungo la verticale per  $P$ . Al geode viene convenzionalmente assegnata quota ortometrica pari a zero.

Si definisce **quota ellissoidica**  $H$  di un generico punto  $P$  la lunghezza del segmento compreso tra il punto  $P$  e l'ellissoide, misurata lungo la normale per  $P$  all'ellissoide stesso.

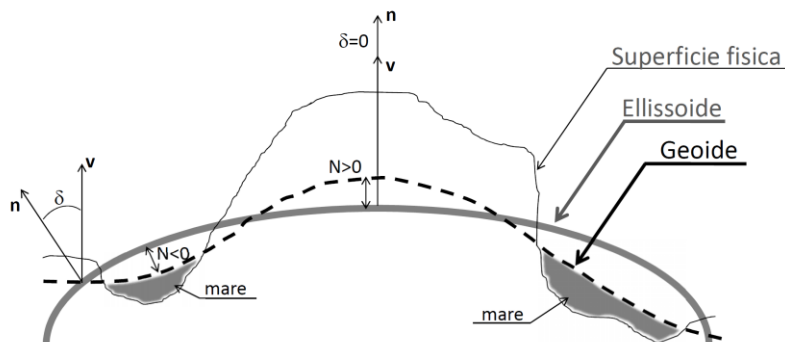
Adesso che è stata definita la superficie di riferimento altimetrico si proverà a dare una risposta ad alcuni quesiti:

- come è disposto il geoide rispetto all'ellissoide di riferimento?
- come si fa a determinare la superficie fisica del geoide ?
- come viene fissato il livello medio dei mari per cui passa il geoide e su cui, convenzionalmente, si annullano le quote ortometriche ?

Il geoide è una superficie definita fisicamente, non definibile matematicamente e quindi non è regolare come l'ellissoide. La superficie del geoide non presenta variazioni brusche come la superficie fisica terrestre ma risulta comunque ondulata. Si definisce **ondulazione del geoide** in un punto P la differenza tra la quota ellissoidica e la quota ortometrica del punto:

$$N = H - h$$

dove H è la quota ellissoidica del punto P e h è la quota ortometrica del punto P.



**Figura 9** – Ondulazioni del geoide.

La determinazione della superficie fisica del geoide è uno dei compiti della ricerca geodetica e viene condotta attraverso diverse metodologie. Le tecniche utilizzate per determinare la posizione fisica del geoide rispetto all'ellissoide (solitamente rispetto al WGS84) sono le seguenti:

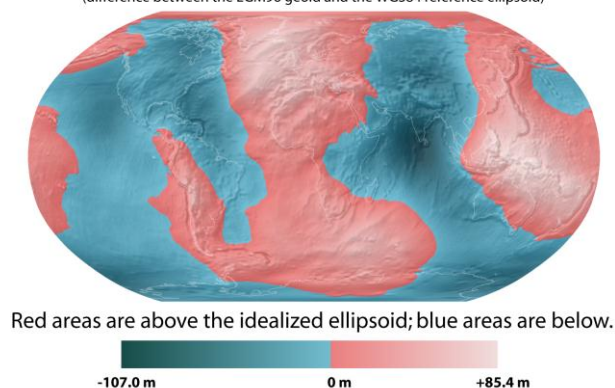
1. Misure gravimetriche. Il geoide viene determinato attraverso misure dell'accelerazione di gravità eseguite a terra, in mare o in cielo (attraverso gravimetri montati su aeromobili).
2. Confronto tra posizionamenti GNSS e dati di livellazione. Uno dei metodi più utilizzati per la determinazione del geoide è la cosiddetta tecnica GPS-LEV che consiste nel confronto di misure da posizionamento satellitare e di misure altimetriche condotte attraverso il tradizionale (e preciso) metodo della livellazione geometrica. Molto semplicemente: per lo stesso caposaldo (punto di rete altimetrica) si calcolano le due quote nella equazione precedente; la quota ortometrica attraverso la livellazione geometrica (operata con il livello) e la quota ellissoidica attraverso un posizionamento satellitare (operata attraverso due o più ricevitori satellitari GNSS) dopodiché si calcola la differenza e si ottiene l'ondulazione per il punto. L'ondulazione determinata materializza il geoide rispetto all'ellissoide.
3. Misure della deviazione della verticale. Questa metodologia consiste in un confronto, per uno stesso punto, tra coordinate geografiche astronomiche (non ellissoidiche), che si ottengono mediante osservazioni notturne sulle stelle, e le coordinate geografiche ellissoidiche precedentemente definite.

4. Studio delle orbite di satelliti a bassa quota. La superficie del geoido è fortemente correlata alle anomalie locali del campo gravitazionale terrestre. I satelliti a bassa quota risentono fortemente di queste anomalie e attraverso lo studio delle loro orbite si determina la superficie fisica del geoido.

Dopo avere determinato l'ondulazione per una moltitudine di punti, opportunamente distribuiti sull'area di studio, si procede alla interpolazione dei dati di ondulazione in modo da ottenere un valore geostatisticamente probabile delle ondulazioni del geoido anche nei punti non direttamente campionati.

La ricerca scientifica ha prodotto, nel corso degli anni, numerosi modelli di geoido. I modelli geopotenziali EGM96 ed EGM2008 sono solo due dei molti modelli geoidici planetari espressi in termini di ondulazioni.

**Deviation of the Geoid from the idealized figure of the Earth**  
(difference between the EGM96 geoid and the WGS84 reference ellipsoid)

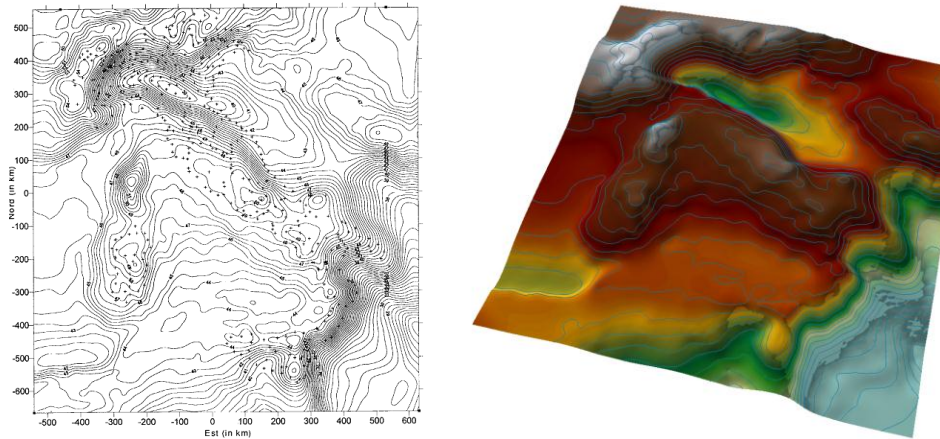


**Figura 10** – Modello del geoido EGM96 (GNU Free Documentation License).

EGM è l'acronimo di *Earth Gravitational Model*. I due modelli sono stati prodotti dalla collaborazione scientifica tra la NIMA (*National Imagery and Mapping Agency*) che è l'organismo cartografico del Dipartimento della Difesa americano, la NASA e la State University dell'Ohio (OSU). Tutti i modelli a scala planetaria presentano una risoluzione geometrica abbastanza modesta, nell'ordine del  $\frac{1}{2}$  grado di latitudine e di longitudine, motivo per cui non sono utilizzabili per applicazioni più rigorose a scala nazionale e sub-nazionale. Se si considera l'ellissoide WGS84 come superficie di confronto con il geoido, risulta che vi sono zone del pianeta dove l'ellissoide passa sotto il geoido (ondulazioni positive) e zone dove l'ellissoide passa sopra (ondulazioni negative). L'intervallo di variazione delle ondulazioni mondiali va da circa -107 metri a circa +85 metri. Valori elevati (in valore assoluto) delle ondulazioni, descrivibili come anomalie e legate a particolari addensamenti di masse, si riscontrano nell'oceano indiano a causa della catena montuosa Himalayana e a nord est dell'Oceania per la presenza della fossa delle Marianne.

In Italia il modello locale di geoido è stato determinato dal Politecnico di Milano in collaborazione con l'Istituto Geografico Militare (IGM) di Firenze ed è stato chiamato **ITALGEO**. Il modello ha subito molte revisioni e, a partire dal 1995 (ITALGEO95), è stato rilasciato in versioni successive sempre più accurate.

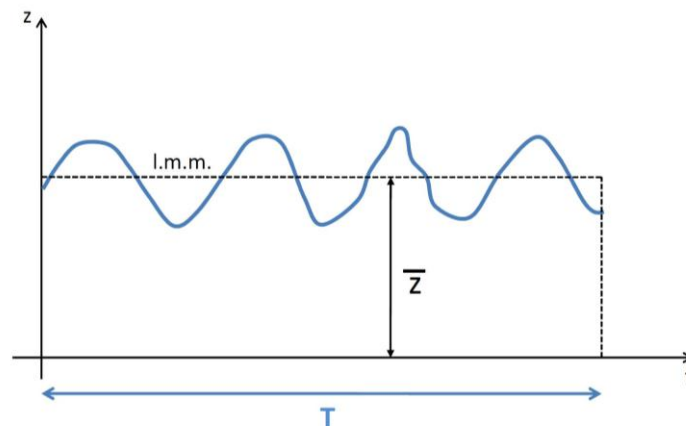
La figura seguente mostra il modello ITALGEO95: in Italia le ondulazioni sono tutte positive e (il geoido italiano passa sempre sopra l'ellissoide geocentrico WGS84), variabili in un intervallo che va da circa +35 metri a + 75 metri. Il modello è rappresentato attraverso curve di pari ondulazione, l'equidistanza tra queste curve è pari a mezzo metro.



**Figura 11** – Il modello geoidico nazionale ITALGEO95.

L'ultima revisione del modello geoidico nazionale è l'ITALGEO2005. Il geoide italiano, nelle edizioni del 1999 e del 2005, viene distribuito all'utenza dall'IGM in forma di griglie (in formato \*.gr1 e \*.gr2) del software VERTO. La precisione dichiarata per le ondulazioni dell'ITALGEO99 è di  $\pm 16$  cm mentre quella dell'ITALGEO2005 è di  $\pm 4$  cm. Il miglioramento delle stime nelle ondulazioni geoidiche si riflette sul miglioramento delle potenzialità dei sistemi di posizionamento satellitare GNSS (in particolare del più diffuso NAVSTAR GPS) sulla misura indiretta delle quote ortometriche.

Vediamo adesso quali procedure vengono adottate per determinare il livello medio del mare, utilizzato come zero altimetrico convenzionale. Il livello del mare subisce moltissime variazioni dovute principalmente al vento, al moto ondoso, alle variazioni di pressione atmosferica, all'attrazione gravitazionale di altri corpi celesti come il sole e la luna e alla forza centrifuga dello stesso pianeta Terra; le maree sono l'effetto delle due ultime interazioni elencate. Per questo motivo si preferisce parlare di livello medio del mare intendendo la posizione media che quest'ultimo assume in un lungo arco di tempo. Così facendo si eliminano gli effetti di breve e di medio periodo e il livello medio del mare misurato risulta molto più stabile. La rappresentazione grafica del livello del mare rispetto al tempo si chiama mareogramma. Si consideri un generico mareogramma riferito ad un periodo di tempo  $T$ , generalmente molto lungo:



**Figura 12** – Mareogramma

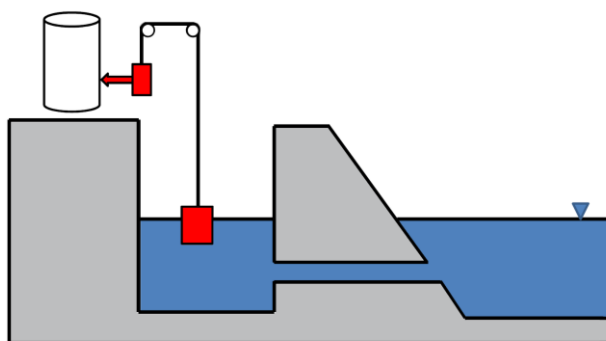
L'area  $A$  sottesa dalla curva del mareogramma nell'intervallo di tempo  $T$  risulta pari a:

$$A = \int_0^T z(t) dt$$

Il livello medio del mare è rappresentato dalla altezza media del diagramma  $\bar{z}$  che è pari all'area  $A$  precedentemente determinata diviso il periodo  $T$ :

$$l.m.m. = \bar{z} = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt$$

Il livello medio del mare rappresenta lo zero altimetrico di una nazione e viene rilevato da particolari strumentazioni chiamate mareografi.



**Figura 13** – Schema di funzionamento di un mareografo a galleggiante.

In Italia è presente una rete di rilevamento costituita da 28 stazioni mareografiche uniformemente distribuite sul territorio nazionale e dislocate prevalentemente all'interno dei porti. Le stazioni che compongono la Rete Mareografica Nazionale (RMN) sono composte da due strumenti di misura del livello del mare: uno (principale) ad ultrasuoni, ed uno (secondario) a galleggiante e registrazione cartacea per la verifica delle misure, l'analisi di eventi o fenomeni particolari ed il recupero dei dati nei casi di mancato funzionamento dello strumento principale. Tutti i mareografi della RMN sono riferiti ad un caposaldo quotato con livellazione geometrica di alta precisione, opportunamente verificato, sulla base del più vicino caposaldo della rete di livellazione IGM. Le stazioni sono dotate anche di un sensore anemometrico (velocità e direzione del vento a 10 metri dal suolo), di un sensore barometrico, di un sensore di temperatura dell'aria e di un sensore di temperatura dell'acqua. Tutte le stazioni mareografiche sono dotate di un sistema di gestione e memorizzazione dei dati e di un apparato di trasmissione in tempo reale alla sede centrale del Servizio Idrografico Mareografico Nazionale (SIMN) a Roma.

### Datum altimetrico

Per l'Italia continentale il livello medio del mare è stato fissato dal Mareografo di Genova in un intervallo di tempo che va dal 1937 al 1946. Questo riferimento altimetrico si suole indicare solitamente **Genova 1942**. Le due isole maggiori, Sicilia e Sardegna, hanno quote ortometriche riferite rispettivamente ai mareografi di Catania e di Cagliari. Il livello medio del mare italiano non coincide né con il livello medio di altre nazioni né con quello globale planetario. La seguente tabella mostra le differenze altimetriche tra alcuni mareografi europei e il mareografo italiano.

Nazione	Ungheria	Austria	Rep. Ceca	Finlandia	Francia
$\Delta h$ [cm]	+ 49	+ 6	+ 49	+ 54	+ 30

<b>Nazione</b>	Germania	Norvegia	Olanda	Polonia	Portogallo
<b><math>\Delta h</math> [cm]</b>	+ 31	+ 21	+ 33	+ 49	+ 45
<b>Nazione</b>	Spagna	Svezia	Svizzera	ITALIA	
<b><math>\Delta h</math> [cm]</b>	+ 25	+ 4	+ 25	0	

La Spagna ha fissato la sua quota zero (*cota cero*) in corrispondenza del palazzo del municipio di Alicante. La Francia ha la sua origine altimetrica presso l'osservatorio mareografico di Marsiglia. I Paesi Bassi riferiscono le loro quote, come si può facilmente immaginare, alla stazione mareografica di Amsterdam. La Germania, pur essendo bagnata a nord-ovest dal Mare del Nord e a nord-est dal Mar Baltico, per ragioni storiche, ha il suo zero altimetrico in corrispondenza del mareografo di Amsterdam.

## DATUM

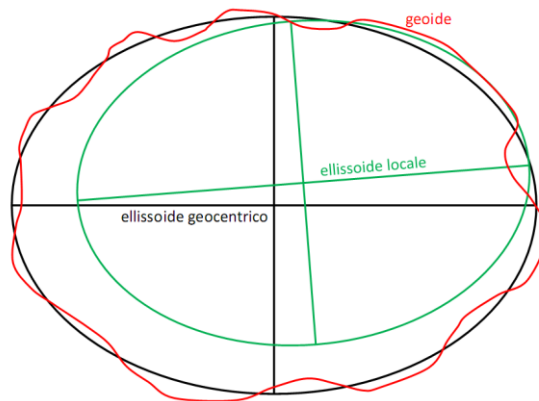
Per la redazione delle cartografie nazionali è necessario adottare un ellissoide di riferimento e posizionarlo in un punto prefissato convenzionalmente. Un **Datum** geodetico viene scelto fissando un ellissoide e posizionandolo in un prefissato punto del pianeta. L'ellissoide così orientato risulta pertanto solidale alla Terra nel suo moto. Questa definizione è in realtà soltanto teorica in quanto un Datum viene solitamente materializzato da una rete compensata di punti topografici, opportunamente materializzati, che ne costituisce una **realizzazione**.

Considerato l'ellissoide come un corpo rigido (avente 6 gradi di libertà), per definire un Datum sono necessari 8 parametri: 2 parametri geometrici dell'ellissoide (ad es. semiasse maggiore  $a$  e schiacciamento  $\alpha$ ), 3 parametri di traslazione rigida e 3 parametri di rotazione rigida.

Si distinguono **Datum locali** e **Datum globali**. Nei primi l'ellissoide è reso tangente al geoide in un punto localizzato al centro di una nazione e lo approssima con valori di ondulazione accettabili su tutto il territorio della nazione. Nei Datum globali l'ellissoide è geocentrico: il centro dell'ellissoide si fa coincidere con il centro di massa della Terra.

Il punto di orientamento dell'ellissoide, nei Datum locali, prende il nome di **punto di emanazione** e su di esso si devono verificare alcune condizioni:

- ❖ la normale all'ellissoide coincide con la verticale (deviazione della verticale nulla);
- ❖ la quota ellissoidica coincide con la quota ortometrica (ondulazione nulla);
- ❖ la direzione del meridiano ellissoidico coincide con la direzione del meridiano astronomico (rotazione rigida dell'ellissoide).



**Figura 14** – Tipi di Datum.

Si è detto del punto di emanazione come punto di tangenza tra l'ellissoide e il geode. In realtà, ogni ellissoide è materializzato da una rete geodetica di punti topografici. Le coordinate dei punti della rete vengono misurate e compensate in modo che la rete materializzi l'ellissoide anche nei punti dove questo non coincide con il geode. Gli inevitabili errori di misura commessi nella misurazione delle coordinate dei vertici della rete influenzano la materializzazione del Datum.

Se il territorio a cui si riferisce un Datum è molto esteso (interi continenti) si può adottare il cosiddetto **orientamento medio**. In questo caso il punto di emanazione viene scelto in un punto di posizione baricentrica rispetto al continente e si utilizzano molti più punti, appartenenti a tutte le nazioni coinvolte, per la compensazione della rete geodetica che lo materializza. Per rendere minimi gli scostamenti tra ellissoide e geode su tutto il territorio interessato la deviazione della verticale non viene annullata in nessun punto ma viene mediata la posizione di una superficie rispetto all'altra in modo che, secondo il principio statistico dei minimi quadrati, risulti minima la deviazione in questi punti. Dette  $\varepsilon$  e  $\eta$  le componenti dell'angolo solido (lungo il meridiano e il parallelo astronomico) costituenti la deviazione, deve risultare in accordo con il principio dei minimi quadrati:

$$\sum(\varepsilon^2 + \eta^2) = \min$$

## Il Datum Roma40

Nel Datum italiano **Roma40** l'ellissoide è quello internazionale (Hayford) e il punto di emanazione coincide con un punto dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario a Roma. L'ellissoide è orientato misurando l'azimut di un vertice del I ordine della rete geodetica dell'IGM posizionato sul vicino Monte Soratte, in modo tale che risulti:

$$\text{Azimut M.Mario} \rightarrow \text{M.Soratte} = 6^\circ 35' 00,88''$$

La rete geodetica che materializza il Datum è quella dell'IGM distinta in punti del I, II, III e IV ordine in base alla precisione delle coordinate di questi ultimi.

E' stato adottato nella cartografia ufficiale italiana dopo il 1940 insieme al sistema di rappresentazione cartografica di Gauss/Boaga. Associato al sistema di rappresentazione di Cassini/Soldner è adottato per la cartografia catastale di alcune province. L'origine delle longitudini nel Datum Roma40 è fissata convenzionalmente in un punto limitrofo all'Osservatorio di Roma Monte Mario (la c.d. *torretta del primo meridiano d'Italia*).

Dal 27 febbraio 2012, data di entrata in vigore del D.M. 10/11/2011, non è più il Datum Ufficiale Italiano essendo stato dimesso a favore del riferimento geodetico europeo ETRS89 “realizzato” attraverso la Rete Dinamica Nazionale, basata sulle moderne tecnologie di acquisizione satellitare GNSS.



Figura 15 – Osservatorio astronomico di Monte Mario e torretta del “Primo Meridiano d’Italia”

## Il Datum ED50

ED è l’acronimo di **European Datum**. Nel 1950 l’Europa, uscita dal secondo conflitto mondiale, necessitava di un aggiornamento delle cartografie dei paesi appartenenti all’alleanza atlantica. Il Datum si basa sull’adozione dell’ellissoide internazionale orientato con orientamento medio europeo a Potsdam in Germania, una città a SW di Berlino. A Potsdam, in corrispondenza del punto di emanazione coincidente con la Torre di Helmert, la deviazione della verticale non si annulla ma resta un piccolo angolo solido residuo, reso minimo applicando il principio dei minimi quadrati.

Le componenti di questo angolo solido sono pari a:

$$\varepsilon = 3,36''$$

$$\eta = 1,78''$$

La rete che materializza il Datum è stata costruita mettendo insieme le reti geodetiche del I ordine dei Paesi coinvolti e poi compensata in blocco.

L’origine delle longitudini è fissata a Greenwich. Il Datum ED50 è stato adottato, anche in Italia, come riferimento planimetrico per il sistema UTM che sfrutta la rappresentazione conforme di Gauss.

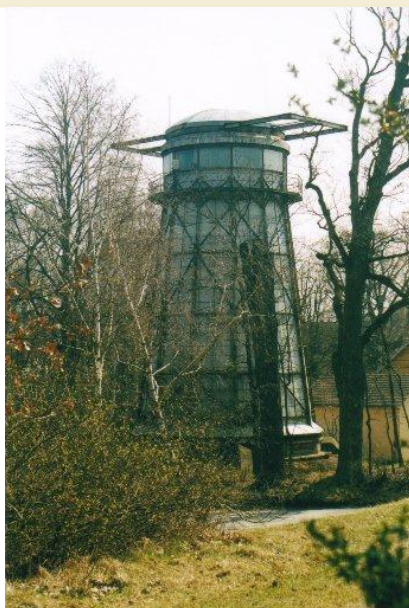


Figura 16 – Torre di Helmert a Potsdam.

## I Datum GRS80 e WGS84

Si è già detto che, ai fini cartografici, i due Datum sono equivalenti. Per questo motivo, nella trattazione a seguire, ci si riferirà soltanto all'ellissoide WGS84, il più noto dei due.

Al Datum WGS84 non è associato, in via ufficiale, alcun sistema di rappresentazione cartografica anche se è sempre più usato, anche in Italia, il sistema UTM. L'ellissoide WGS84, al contrario degli ellipsoidi locali, approssima il modello geoidico nel suo intero complesso e non in corrispondenza di un'area di vastità nazionale. Le realizzazioni del WGS84 sono molteplici e si suddividono in globali/internazionali, continentali e nazionali.

Lo IERS (International Earth Rotation Service) è una commissione scientifica internazionale, fondata nel 1987, dalla International Astronomical Union (IAU) e dalla International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG). Uno dei compiti principali dello IERS è la definizione del sistema di riferimento internazionale (International Terrestrial Reference System) e il mantenimento della sua realizzazione ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

L'EUREF è la commissione per l'Europa, fondata sempre nel 1987, della Associazione Internazionale di Geodesia (IAG) poi inglobata nella IUGG. L'EUREF gestisce una rete di stazioni permanenti GPS/GLONASS che coprono l'intero continente e su cui si basa la rete fondamentale **ETRS89**. ETRS è l'acronimo di European Terrestrial Reference System.

Nel 1990 si è tenuto un simposio EUREF a Firenze in cui è stata adottata la seguente risoluzione:

“La Commissione EUREF per il Sistema di Riferimento Europeo dell'Associazione Internazionale di Geodesia raccomanda che si adotti un sistema di riferimento coincidente con l'ITRS all'epoca 1989 e che tale sistema sia solidale alla parte stabile della placca Eurasiatica. Tale sistema sarà denominato **ETRS89** (European Terrestrial Reference System 1989)”.

L'ETRS si muove, rispetto all'ITRS, solidalmente al continente eurasiatico. Quindi le coordinate delle nazioni europee nel sistema ETRS sono stabili nel tempo. Le zolle eurasiatiche si muovono rispetto all'ITRS di circa 2 cm all'anno in direzione Nord-Est.

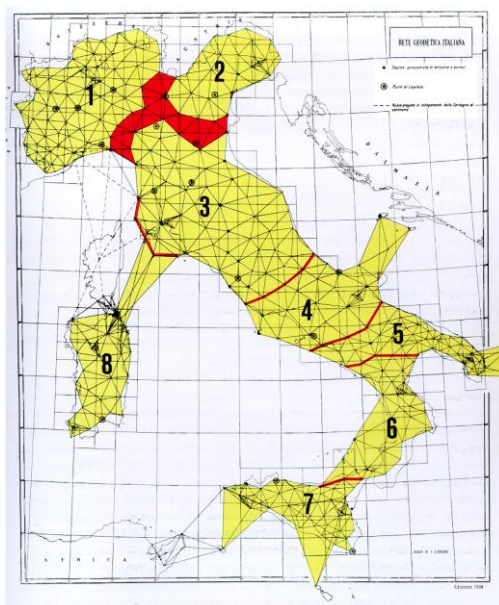
La maggior parte delle nazioni europee ha adottato lo standard ETRS. In Italia le materializzazioni dello standard ETRS sono le reti IGM95 e la Rete Dinamica Nazionale (RDN). Entrambe le reti geodetiche sono state istituite e sono gestite dall'Istituto Geografico Militare.

Con il citato Decreto Ministeriale anche l'Italia ha seguito le raccomandazioni della Commissione EUREF adottando la **realizzazione ETRF2000** - all'epoca 2008.0 - del Sistema di riferimento geodetico europeo ETRS89, ottenuta nell'anno 2009 dall'Istituto Geografico Militare mediante l'individuazione delle stazioni permanenti, l'acquisizione dei dati ed il calcolo della Rete Dinamica Nazionale (RDN).

### Reti di realizzazione dei diversi Datum

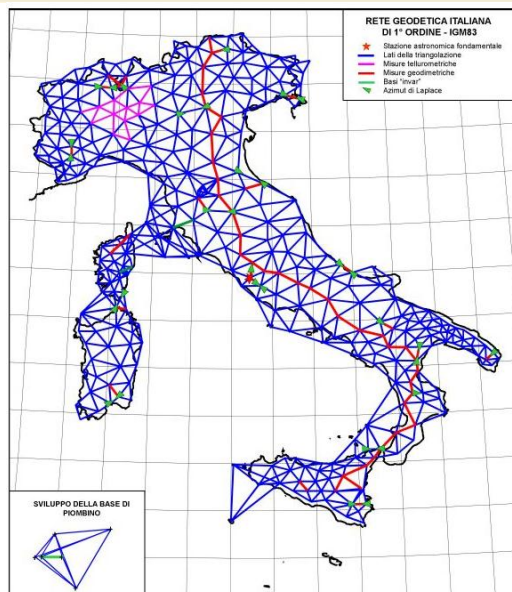
Come si è detto, un ellissoide è definito geometricamente dai suoi semiassi ma per la definizione di un Datum l'ellissoide da solo non basta, bisogna scegliere un ellissoide e orientarlo da qualche parte. Questa operazione è possibile attraverso una rete di punti di coordinate note che, come si usa dire, costituisce una **realizzazione del Datum**.

Il primi Datum nazionali sono stati istituiti a partire dell'800, a questi Datum è stata associata la proiezione di Sanson – Flamsteed modificata e la relativa rete topografica di realizzazione è stata compensata, per parti, tra il 1908 e il 1919.



**Figura 17** – Vecchia rete geodetica italiana

Nel 1940 la Commissione Geodetica Italiana decise di passare al nuovo Datum Roma40 e, di conseguenza, si presentò la necessità di istituire una nuova rete geodetica di inquadramento le cui coordinate dei vertici fossero riferite al sistema Roma40 (in cui l'ellissoide di riferimento e il punto di emanazione erano stati sostituiti). L'operazione fu condotta, solo per i vertici del primo ordine, senza una ricompensazione delle misure, ma attraverso una trasposizione delle coordinate della precedente rete. Così facendo, i vertici della neonata rete Roma40 si portarono dietro le inesattezze del vecchio sistema. Con il passare degli anni e l'evoluzione delle tecniche di rilievo e di calcolo, le inesattezze sulle coordinate dei vertici della rete sono rimaste. La rete trigonometrica Roma40, discendendo dalla rete di precedente istituzione, è stata realizzata per triangolazione e trilaterazione. La rete consta di circa 20000 vertici trigonometrici suddivisi in quattro ordini e distribuiti uniformemente sul territorio nazionale con una distanza media di circa 5 km.



**Figura 18** – Rete dei punti trigonometrici Roma40

Nel 1995 l'IGM, forte del consolidamento delle tecniche di posizionamento satellitare, ha realizzato la rete di vertici IGM95 che rappresenta la prima realizzazione italiana della rete europea ETRF2000. I vertici della rete IGM95, acquisiti interamente con tecniche GPS e non necessitando della intervisibilità reciproca, sono materializzati in luoghi molto più accessibili rispetto a quelli della vecchia rete Roma40. Alcuni vertici della vecchia rete Roma40 sono stati inseriti anche nella rete IGM95 in modo da avere le coordinate in entrambi i sistemi e determinare i 7 parametri necessari ad operare una trasformazione di Helmert (rototraslazione spaziale con variazione di scala necessaria per operare un cambio di Datum). La rete nazionale IGM95 è costituita da oltre 2000 punti caratterizzati da precisione elevata ed aventi una distanza reciproca media di circa 20 km.



**Figura 19** – Rete geodetica IGM95

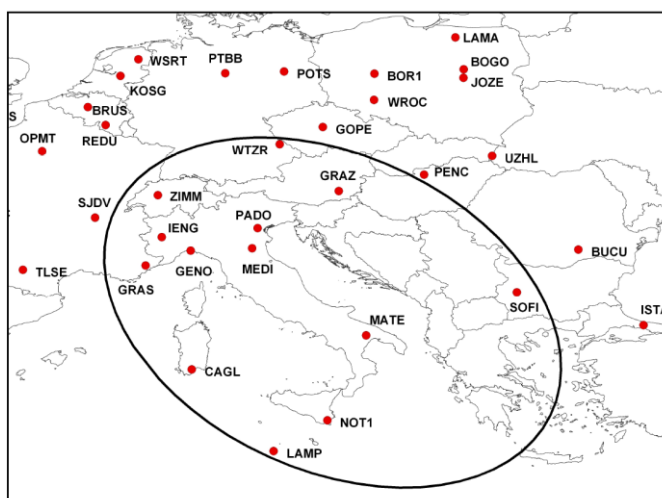
## La Rete Dinamica Nazionale (RDN)

La Rete Dinamica Nazionale è la nuova rete geodetica di realizzazione inserita nel sistema di riferimento geodetico ETRS89. La Rete sostituisce, in parte, e ammoderna la precedente rete geodetica IGM95. La RDN è costituita da 99 stazioni permanenti GPS che acquisiscono in continuo la loro posizione e la trasmettono ad un centro di calcolo istituito presso l'IGM. Alcune di queste stazioni sono state collegate alla precedente rete IGM95. Il calcolo delle coordinate della RDN è stato condotto attraverso il software di compensazione *Bernese* e ripetuto indipendentemente presso i laboratori delle Università di Milano (Prof. Sansò) e Padova (Prof. Caporali).



**Figura 19** – La Rete Dinamica Nazionale (immagine acquisita dal sito web dell'IGM).

Il Datum convenzionale per l'allineamento della RDN è l'ITRF2005 (tempo-riferito all'epoca 2000). All'interno dell'ITRF2005 sono state scelte 13 stazioni permanenti, quelle che circondano la nazione.



**Figura 20** – Le 13 stazioni permanenti della realizzazione ITRF2005

Le coordinate delle 13 stazioni risultavano riferite all'epoca 2000 di riferimento del sistema ITRF2005, motivo per il quale è stato necessario aggiornarle all'epoca 2008 utilizzando le velocità di deriva delle stazioni stesse note dalla analisi delle serie storiche dei dati di posizione.

La seguente tabella (fonte IGM) mostra le coordinate geocentriche di 5 delle 99 stazioni permanenti della RDN.

Coordinate della RDN nel Sistema ITRF05 all'epoca 2008.0

<b>STAZ.</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
	<b>[m]</b>	<b>[m]</b>	<b>[m]</b>
ACOM	4273810.7131	1027226.7129	4608635.0230
ALFE	4625139.9124	1156125.3800	4224241.4339
AMUR	4626450.9382	1379560.0767	4155004.8655
AQUI	4592507.5212	1089876.4200	4276393.0358
BIEL	4429584.5389	626326.5529	4531541.9606

Più interessante, dal punto di vista tecnico, è l'analisi dello scarto quadratico medio sulle coordinate piane (fonte IGM).

Valutazione della ripetibilità dei risultati.

<b>STAT</b>	<b><math>\sigma_N</math> [mm]</b>	<b><math>\sigma_E</math> [mm]</b>	<b><math>\sigma_h</math> [mm]</b>
ACOM	0.7	1.3	3.2
ALFE	1.0	1.0	4.5
AMUR	0.6	0.6	2.5
AQUI	0.5	0.4	2.8
BIEL	1.3	0.6	4.4

I valori degli s.q.m. sono dell'ordine del mm. Come è ragionevole attendersi, lo scarto quadratico medio sulla quota ellissoidica è sensibilmente più elevato (raggiunge picchi nell'ordine del centimetro).

## IL D.M. DEL 10/11/2011

### COSA CAMBIA PER LE AMMINISTRAZIONI E I PROFESSIONISTI

L'articolo 2 del D.M. recita:

Art. 2

Sistema di Riferimento Geodetico Nazionale

1. A decorrere dalla data di pubblicazione sulla Gazzetta Ufficiale della Repubblica italiana del presente decreto, il Sistema di riferimento geodetico nazionale adottato dalle amministrazioni italiane e' costituito dalla realizzazione ETRF2000 - all'epoca 2008.0 - del Sistema di riferimento geodetico europeo ETRS89, ottenuta nell'anno 2009 dall'Istituto Geografico Militare, mediante l'individuazione delle

stazioni permanenti, l'acquisizione dei dati ed il calcolo della Rete Dinamica Nazionale.

L'art. 2 del Decreto Ministeriale introduce il nuovo sistema di riferimento geodetico nazionale. Ciò implica la decadenza del Datum Roma40 che per 70 anni aveva servito la Nazione.

Particolarmente interessante è l'articolo 3:

Art. 3

Formazione di nuovi dati

1. A decorrere dalla data di pubblicazione sulla Gazzetta Ufficiale della Repubblica italiana del presente decreto, le amministrazioni utilizzano il Sistema di riferimento geodetico nazionale per georeferenziare le proprie stazioni permanenti, nonché per i risultati di nuovi rilievi, le nuove realizzazioni cartografiche, i nuovi prodotti derivati da immagini fotografiche aeree e satellitari, le banche dati geografiche e per qualsiasi nuovo documento o dato da georeferenziare.

L'articolo precedente, di fatto, impone alle amministrazioni che:

- ✓ le proprie stazioni permanenti (GPS/GNSS) siano aggiornate al nuovo sistema;
- ✓ i rilievi effettuati vengano condotti nel nuovo sistema;
- ✓ le nuove cartografie vengano prodotte nel nuovo sistema.

A questo punto sarebbe legittimo chiedersi cosa fare della mole infinita di cartografie realizzate prima dell'approvazione del Decreto e che sicuramente non sono state georeferenziate nel nuovo sistema. Il repertorio di dati cartografici nazionali, a tutte le scale (nazionale, regionale, provinciale e comunale) comprende cartografie e banche dati prodotte (o convertite) in uno dei seguenti sistemi:

<b>Sistema di rappresentazione</b>	<b>Datum</b>	<b>Note ed esempi</b>
Gauss-Boaga (carta di Gauss)	Roma40	Gran parte della cartografia tecnica regionale (raster o vettoriale) è georeferenziata in questo sistema.
UTM (carta di Gauss)	ED50	Il reticolato chilometrico sovrainciso sulle tavolette 1:25000 dell'IGM è in questo sistema. Molte cartografie locali sono state prodotte in questo sistema.
UTM (carta di Gauss)	WGS84	E' il sistema cartografico più vicino a quello introdotto. Purtroppo, fino ad oggi, la sua diffusione è stata abbastanza limitata.

Al quesito precedente risponde l'articolo 4 del D.M.:

Art. 4

Conversione dei dati pregressi

1. Le amministrazioni rendono disponibili secondo le regole del Sistema di cui all'art. 2, mediante procedimento di conversione, i dati pregressi espressi secondo regole afferenti ad altri Sistemi di riferimento, sulla base di una specifica pianificazione documentata nel Repertorio di cui all'art. 59, comma 3, del CAD e del relativo provvedimento di attuazione.  
 2. La conversione dei dati territoriali, precedentemente prodotti, ed espressi nei Sistemi di riferimento geodetico ROMA40, ED50 e ETRF89 e' effettuata utilizzando i dati e le procedure messi gratuitamente a disposizione delle amministrazioni dall'Istituto Geografico Militare e, previa convenzione ai sensi del CAD, anche utilizzabili presso il Geoportale nazionale.

In tutti i casi precedenti di cui alla tabella, per il passaggio dal vecchio sistema al nuovo occorre operare un **cambio di Datum**. Il modo migliore per eseguire questa operazione è operare una trasformazione di Helmert (a 7 parametri).

L'istituto Geografico Militare, nel sito <http://www.igmi.org/rdn/>, ha pubblicato le monografie relative a tutte le stazioni permanenti della RDN e pubblica i dati di posizione delle stazioni permanenti in tempo reale.

Sempre l'IGM produce il software VERTO indispensabile per condurre, nel modo più accurato possibile, le trasformazioni di coordinate necessarie a seguito dell'avvenuto aggiornamento.

***Cambi di Datum. La trasformazione di Helmert.***

La trasformazione di Helmert è semplicemente un caso di trasformazione affine nello spazio con variazione di scala. Tenendo conto che un corpo rigido nello spazio ha sei gradi di libertà e aggiungendo il fattore di scala risulta che la trasformazione di Helmert è una operazione che richiede la conoscenza di 7 parametri motivo per il quale è chiamata anche trasformazione a 7 parametri.

La forma concisa della trasformazione a 7 parametri è la seguente:

$$X_2 = X_0 + (1+k)RX_1$$

dove

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \text{ è il vettore delle coordinate del punto } P \text{ nel secondo Datum}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \text{ è il vettore di traslazione}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos R_y \cos R_z & \cos R_x \sin R_z + \sin R_x \sin R_y \cos R_z & \sin R_x \sin R_z - \cos R_x \sin R_y \cos R_z \\ -\cos R_y \sin R_z & \cos R_x \cos R_z - \sin R_x \sin R_y \sin R_z & \sin R_x \cos R_z + \cos R_x \sin R_y \sin R_z \\ \sin R_y & -\sin R_x \cos R_y & \cos R_x \cos R_y \end{pmatrix}$$

è la matrice di rotazione definita in funzione dei tre angoli di rotazione  $R_x, R_y$  e  $R_z$

$k$  è il fattore di scala.

L'introduzione del fattore di scala  $k$  è necessaria per sopperire alle inevitabili differenze geometriche tra i due Datum originate da cause diverse: differenti set di misure, differenti compensazioni delle reti di materializzazione, strumenti di misura diversi, epoche diverse, etc...

La matrice di rotazione  $R$  risulta dalla sovrapposizione degli effetti di tre rotazioni successive  $R_z, R_y$  e  $R_x$  (in questo ordine) di un sistema cartesiano rispetto all'altro.

Le rotazioni sono positive se antiorarie.

Se le rotazioni sono piccole la matrice di rotazione può essere linearizzata come segue ricordando che il coseno di un angolo piccolo tende ad uno e che il seno di un angolo piccolo tende a 0:

$$R_L = \begin{bmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice precedente mantiene la stessa forma qualunque sia l'ordine delle rotazioni operate. Le rotazioni tra Datum sono in realtà molto piccole motivo per cui è lecito usare la  $R_L$  al posto della  $R$  introducendo una incertezza inferiore a quella adducibile ad altre cause e quindi ammissibile.

La determinazione dei 7 parametri (qualora non siano noti come ad es. nel caso delle monografie dei punti della rete IGM95) implica la conoscenza di un certo numero di "punti doppi" cioè di punti di coordinate note in entrambi i sistemi.

Ogni punto tridimensionale, noto cioè in planimetria e in altimetria, consente di scrivere attraverso

la  $X_2 = X_0 + (1+k)RX_1$  tre equazioni nelle quali i termini incogniti sono 7 (i 7 parametri !).

Risulta quindi necessario disporre di almeno tre punti tridimensionali con coordinate note nei due sistemi. Nella pratica operativa si utilizzano sempre un numero maggiore di punti in modo da potere controllare l'affidabilità della trasformazione attraverso i residui risultanti da una stima ai minimi quadrati.

Se le reti di materializzazione dei due sistemi geodetici fossero prive di errori la trasformazione di Helmert darebbe residui nulli: ciò non accade mai a causa delle motivazioni a cui si è fatto cenno.

La trasformazione di Helmert non è una trasformazione esatta, è sempre approssimata.

Per i punti della Rete IGM95 istituiti precedentemente al 01/01/2009 l'IGM ha istituito un convertitore online.

Il convertitore (raggiungibile alla pagina [http://87.30.244.175/rdn/calcola\\_differenze.php](http://87.30.244.175/rdn/calcola_differenze.php)) consente di convertire le coordinate dei punti IGM95 dalla realizzazione ETRF89 alla nuova realizzazione ETRF2000. Lo strumento restituirà 5 valori ( $\Delta\phi$ ,  $\Delta\lambda$  e  $\Delta h$  ;  $\Delta N$  e  $\Delta E$ ) da sommare algebricamente ai valori di latitudine, longitudine, quota ellissoidica e coordinate piane UTM (Nord ed Est) della scheda monografica del punto in ETRF89.

Nelle figure a seguire si evidenzia un test di conversione condotto su un punto della rete IGM95 avente codice 13094.

Codice Punto:

**Figura 21** – Il convertitore IGM per la conversione da IGM95(ETRF89) a RDN(ETRF2000)

$\Delta\phi$ sec	$\Delta\lambda$ sec	$\Delta h$ m	$\Delta N$ m	$\Delta E$ m
0.0020	-0.0001	-0.095	0.062	0.0

**Figura 22** – Esempio di *output* del convertitore

Come è facile notare lo scostamento tra le due realizzazioni è cartograficamente piccolo ma non trascurabile.

Nel caso in esame lo scostamento massimo si ha sulla quota ellissoidica ed è pari a circa un decimetro. La variazione massima sulle coordinate piane si ha sulla coordinata Nord dove si registrano 6,2 centimetri.