

Prova scritta Elettrodinamica Classica – Prof. Lorenzo Marrucci – 15/03/2022

Nota: per superare lo scritto è necessario impostare la soluzione di almeno un esercizio correttamente. Per ottenere un punteggio alto è necessario risolvere tutti e tre gli esercizi correttamente o con errori minori.

Esercizio 1

Due fili infiniti sono disposti lungo l'asse x e y , rispettivamente. A partire dall'istante di tempo $t = 0$, questi vengono percorsi da una corrente variabile $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ (dove τ è un tempo caratteristico molto lungo), che scorre secondo il verso crescente dei rispettivi assi. Una spira quadrata, di lato a , giace ferma nel primo quadrante del piano xy con i lati paralleli ai due fili. Il lato parallelo e più vicino all'asse y dista da questo x_0 , mentre il lato parallelo e più vicino all'asse x dista da questo y_0 . Sapendo che la spira è dotata di resistenza elettrica complessiva R , determinare (a) l'energia dissipata nella spira fino al completo spegnimento della corrente nei fili, ignorando eventuali effetti di autoinduzione. Supponendo invece che la spira si muova di moto rettilineo uniforme a partire dal momento di accensione della corrente lungo la bisettrice degli assi alla velocità v_0 , allontanandosi dall'origine, determinare (b) quanta carica ha complessivamente attraversato una sezione della spira fino al completo spegnimento delle correnti.

Esercizio 2

Si considerino due gusci sferici concentrici, di raggio a e $b > a$, rispettivamente. Sulla superficie del guscio interno, composto di materiale isolante, è depositata una carica libera totale Q distribuita uniformemente. Sul guscio esterno invece il potenziale elettrico è controllato in modo da variare con la legge $V = V_0 \cos \theta$ (con $V_0 \neq 0$), dove θ è l'angolo polare dall'asse z . Lo spazio tra i due gusci è riempito di materiale dielettrico, di costante dielettrica relativa ϵ_r , mentre all'interno e all'esterno c'è il vuoto. Lo spessore dei due gusci può essere considerato trascurabile. Assumendo che il potenziale sia nullo a distanza infinita dai gusci, calcolare l'andamento del potenziale in tutto lo spazio.

MEMO: *Laplaciano in coordinate sferiche:*
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Esercizio 3

Considerate un solenoide cilindrico che, nel riferimento proprio, è a base circolare di raggio R , altezza assimilabile ad infinita, ed è avvolto con n spire per unità di lunghezza percorse da una corrente I_0 . In questo riferimento il solenoide è elettricamente neutro. Nel riferimento di laboratorio, il solenoide è quindi posto in movimento a velocità relativistica v in una direzione perpendicolare all'asse del cilindro. Calcolare (a) i campi elettrici e magnetici presenti dentro e fuori il solenoide nel riferimento di laboratorio. Calcolare quindi (b) l'espressione della densità superficiale di carica elettrica $\sigma(\varphi)$ che si induce sulla superficie del solenoide in movimento in funzione della posizione, quest'ultima individuata dall'angolo polare φ attorno all'asse del solenoide, sempre misurato nel riferimento di laboratorio.

Soluzioni

Esercizio 1

In regime magnetostatico, l'andamento temporale della corrente si trasferisce direttamente ai campi magnetici generati dai singoli fili. Questi campi sono diretti lungo circonferenze disposte intorno ai fili stessi (questo risultato si può dimostrare facilmente applicando la quarta equazione di Maxwell in forma integrale). Per semplicità, indichiamo con '1' il filo disposto lungo l'asse x e con '2' il filo disposto lungo l'asse y . Nel piano in cui giace la spira, considerato il verso in cui scorrono le correnti, i due campi si scrivono:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(x, y, z = 0, t) &= \frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi y} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{B}_2(x, y, z = 0, t) &= -\frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi x} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

dove si è indicato con $\hat{\mathbf{z}}$ il versore orientato come l'asse z .

Calcoliamo i flussi di questi due campi attraverso la superficie della spira, il cui versore normale risulta proprio orientato secondo $\hat{\mathbf{z}}$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} \int_0^a dx \int_{y_0}^{y_0+a} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} a \ln \left(1 + \frac{a}{y_0} \right) \\ \Phi_2(t) &= -\frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} \int_0^a dy \int_{x_0}^{x_0+a} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} a \ln \left(1 + \frac{a}{x_0} \right) \end{aligned}$$

La variazione temporale dei flussi genera una forza elettromotrice che induce nella spira una corrente I tale da opporsi alla variazione stessa:

$$I(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d(\Phi_1 + \Phi_2)}{dt} = \frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi R \tau} a \left[\ln \left(1 + \frac{a}{y_0} \right) - \ln \left(1 + \frac{a}{x_0} \right) \right] = \frac{\mu_0 i_0 a e^{-t/\tau}}{2\pi R \tau} \ln \left(\frac{1 + \frac{a}{y_0}}{1 + \frac{a}{x_0}} \right)$$

La presenza di questa corrente crea una dissipazione energetica che può essere calcolata integrando nel tempo (fino al completo spegnimento della corrente, cioè fino a $t \rightarrow +\infty$) la potenza dissipata per effetto Joule:

$$U = \int_0^{+\infty} R I^2(t) dt = \frac{\mu_0^2 i_0^2 a^2}{8\pi^2 R \tau} \ln^2 \left(\frac{1 + \frac{a}{y_0}}{1 + \frac{a}{x_0}} \right)$$

Per rispondere al quesito (b), notiamo che il moto della spira avviene nella direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Questo modifica l'espressione dei flussi calcolati per rispondere al quesito (a),

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} \int_{v_0 t/\sqrt{2}}^{a+v_0 t/\sqrt{2}} dx \int_{y_0+v_0 t/\sqrt{2}}^{y_0+a+v_0 t/\sqrt{2}} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} a \ln \left(\frac{y_0 + a + v_0 t/\sqrt{2}}{y_0 + v_0 t/\sqrt{2}} \right) \\ \Phi_2(t) &= -\frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} \int_{v_0 t/\sqrt{2}}^{a+v_0 t/\sqrt{2}} dy \int_{x_0+v_0 t/\sqrt{2}}^{x_0+a+v_0 t/\sqrt{2}} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 i_0 e^{-t/\tau}}{2\pi} a \ln \left(\frac{x_0 + a + v_0 t/\sqrt{2}}{x_0 + v_0 t/\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

La carica che attraversa la spira da $t = 0$ a $t = +\infty$ può essere ovviamente calcolata integrando nel tempo la corrente indotta, ottenuta nuovamente derivando rispetto al tempo le espressioni dei flussi, ma il calcolo

si prospetta piuttosto laborioso. Questo integrale può essere risolto più agevolmente e senza passare per l'espressione esplicita della corrente. Infatti:

$$Q = \int_0^{+\infty} I(t) dt = -\frac{1}{R} \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{1}{R} [\Phi(t=0) - \Phi(t=+\infty)]$$

Sostituendo i valori del flusso totale $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ agli istanti di tempo corrispondenti, si ottiene subito:

$$Q = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi R} a \left(\ln \left(1 + \frac{a}{y_0} \right) - \ln \left(1 + \frac{a}{x_0} \right) \right)$$

Esercizio 2

La configurazione assegnata presenta simmetria azimutale. Questo ci consente di includere solo le armoniche sferiche $Y_{\ell 0}(\theta)$ nella soluzione generale. Partendo dalla soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate polari sferiche e imponendo che la soluzione non diverga nelle varie regioni definite dal problema, possiamo scrivere:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{+\infty} A_{\ell} r^{\ell} Y_{\ell 0}(\theta) & 0 < r < a \\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(B_{\ell} r^{\ell} + \frac{C_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell 0}(\theta) & a < r < b \\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{D_{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell 0}(\theta) & r > b \end{cases}$$

Le condizioni al bordo suggeriscono che, in ciascuna regione, la soluzione si possa scrivere come combinazione lineare delle sole prime due armoniche (ossia $Y_{00}(\theta, \varphi) \sim \text{cost.}$, $Y_{10}(\theta, \varphi) \sim \cos \theta$). Questo *ansatz* consente di riscrivere:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} A_0 + A_1 r \cos \theta & 0 < r < a \\ B_0 + \frac{C_0}{r} + \left(B_1 r + \frac{C_1}{r^2} \right) \cos \theta & a < r < b \\ \frac{D_0}{r} + \frac{D_1}{r^2} \cos \theta & r > b \end{cases}$$

La continuità del potenziale in $r = a$ ed in $r = b$ implica le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$\begin{aligned} C_0 &= (A_0 - B_0)a, & C_1 &= (A_1 - B_1)a^3 \\ D_0 &= B_0b + C_0, & D_1 &= B_1b^3 + C_1 \end{aligned}$$

Imponendo che in $r = b$ il potenziale segua l'andamento specificato si ottengono altre due equazioni che restituiscono direttamente il valore di due delle otto costanti incognite:

$$D_0 = 0, \quad D_1 = V_0 b^2$$

Le ultime due equazioni per chiudere il sistema si trovano imponendo che la densità superficiale di carica libera depositata in corrispondenza dell'interfaccia $r = a$ sia uniforme:

$$\sigma = D_r(a^+) - D_r(a^-) = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial V}{\partial r}(r = a^+) + \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}(r = a^-) = \epsilon_0 \epsilon_r \left[\frac{C_0}{a^2} + \left(\frac{2C_1}{a^3} - B_1 \right) \cos \theta \right] + \epsilon_0 A_1 \cos \theta$$

dove abbiamo usato la relazione tra i vettori campo e spostamento elettrico: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$.
Richiedendo dunque:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

si ottengono le ultime due equazioni:

$$\epsilon_0 \epsilon_r C_0 = \frac{Q}{4\pi}, \quad \epsilon_r (2C_1 - B_1 a^3) + A_1 a^3 = 0$$

Risolvendo il sistema, otteniamo:

$$A_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad A_1 = \frac{3b^2 \epsilon_r}{a^3 (\epsilon_r - 1) + b^3 (2\epsilon_r + 1)} V_0,$$

$$B_0 = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r b}, \quad B_1 = \frac{b^2 (2\epsilon_r + 1)}{a^3 (\epsilon_r - 1) + b^3 (2\epsilon_r + 1)} V_0,$$

$$C_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}, \quad C_1 = \frac{a^3 b^2 (\epsilon_r - 1)}{a^3 (\epsilon_r - 1) + b^3 (2\epsilon_r + 1)} V_0,$$

$$D_0 = 0, \quad D_1 = V_0 b^2$$

In definitiva, il potenziale in tutto lo spazio è dato dalla seguente espressione:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{3b^2 \epsilon_r}{a^3 (\epsilon_r - 1) + b^3 (2\epsilon_r + 1)} V_0 r \cos \theta & 0 < r < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{a^3 (\epsilon_r - 1) + r^3 (2\epsilon_r + 1)}{a^3 (\epsilon_r - 1) + b^3 (2\epsilon_r + 1)} V_0 \frac{b^2}{r^2} \cos \theta & a < r < b \\ V_0 \frac{b^2}{r^2} \cos \theta & r > b \end{cases}$$

Esercizio 3

Consideriamo un riferimento S' solidale con il solenoide, con l'asse z' parallelo all'asse del solenoide e l'asse x' parallelo alla direzione del movimento. Assumiamo che le spire si avvolgano attorno al solenoide in senso antiorario se visto dalla direzione positiva di z' . Nel riferimento S' il campo magnetico generato dal solenoide è nullo all'esterno di questo ed è pari a

$$B'_z = \mu_0 n I_0 \quad (1)$$

all'interno. Le altre componenti di campo magnetico sono nulle, così com'è nullo in S' il campo elettrico in tutto lo spazio.

Per determinare i campi nel riferimento S basta ora utilizzare le formule di trasformazione relativistica dei campi, che nelle nostre notazioni si scrivono come segue:

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel}, \quad B_{\parallel} = B'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_{\perp}), \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}'_{\perp}\right)$$

Quindi gli unici campi diversi da zero che ne risultano, all'interno del solenoide, sono:

$$E_y = \gamma v B'_z = \gamma v \mu_0 n I_0 \quad (2)$$

$$B_z = \gamma B'_z = \gamma \mu_0 n I_0 \quad (3)$$

dove $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. All'esterno del solenoide i campi restano nulli. Dato che la regione interna del solenoide in S' è fissata dalla disequazione $x'^2 + y'^2 < R^2$, nel sistema S la stessa regione è identificata dalla disequazione seguente (che può essere ottenuta con le normali trasformazioni di Lorentz):

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 < R^2$$

Questa equazione descrive un cilindro a base ellittica, con semiassi dell'ellisse pari a R e R/γ , a causa della contrazione di Lorentz lungo l'asse x : L'asse del cilindro è in movimento a velocità v lungo l'asse x , come già riportato nel testo.

Per calcolare la densità superficiale di carica $\sigma(\varphi)$ sarà necessario considerare con attenzione anche l'effetto di questa contrazione di Lorentz del solenoide nella direzione dell'asse x . Si può procedere in due metodi diversi.

Nel primo metodo consideriamo le trasformazioni di Lorentz della densità di carica e corrente. In particolare, ci serve la seguente relazione:

$$\rho = \gamma \left(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x \right) = \gamma \frac{v}{c^2} J'_x \quad (4)$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che il solenoide è neutro nel sistema S' . Il modulo della densità di corrente in S' è a sua volta ricavabile dal numero di spire e la corrente in ciascuna spira come segue:

$$J' = \frac{n I_0}{d_0}$$

dove d_0 è lo spessore (molto piccolo) delle pareti del solenoide, che è costante nel riferimento S' . La componente x' è quindi $J'_x = -J' \sin \varphi'$, dove φ' è l'angolo azimutale della posizione considerata sulla superficie del solenoide nel riferimento S' (va notato che l'orientazione locale di $\mathbf{J}$ è ortogonale alla posizione). Quindi otteniamo

$$\rho = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{n I_0}{d_0} \sin \varphi' \quad (5)$$

Abbiamo bisogno adesso di trasformare l'angolo φ' nel corrispondente angolo φ . Tenendo conto della contrazione di Lorentz abbiamo, per una qualsiasi coppia ordinata di punti nello spazio che definiscono un'orientazione, la seguente relazione:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}, \quad \Delta y = \Delta y'$$

per cui il corrispondente angolo risulta trasformato con la regola seguente:

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \gamma \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \gamma \tan \varphi' \quad (6)$$

Applicata al seno questa ci fornisce la seguente trasformazione:

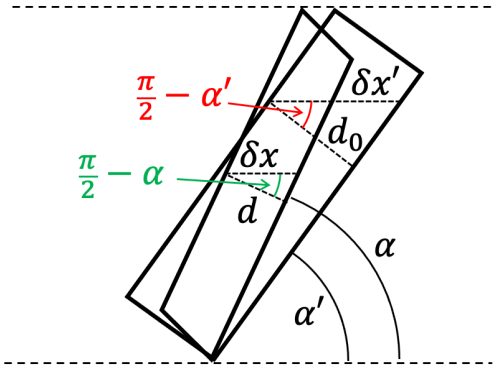
$$\sin \varphi' = \frac{\tan \varphi'}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi'}} = \frac{\frac{1}{\gamma} \tan \varphi}{\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2} \tan^2 \varphi}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Sostituendo questa nella (5) abbiamo

$$\rho = -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{n I_0}{d_0} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\gamma^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \quad (7)$$

Ora però dobbiamo moltiplicare la densità per lo spessore del solenoide nel riferimento S per ottenere la σ . Questo passo è reso più complicato dal fatto che anche lo spessore del solenoide è influenzato dalla contrazione di Lorentz, per cui risulta dipendente da φ . Per ottenere le variazioni di spessore in un punto arbitrario della superficie del solenoide identificato dalla posizione φ consideriamo innanzitutto che l'orientazione locale di un tratto infinitesimo di superficie rispetto all'asse x è fissata da un angolo locale $\alpha(\varphi)$ che dobbiamo determinare. Nel sistema S' quest'angolo è dato semplicemente da $\alpha' = \varphi' + \frac{\pi}{2}$, ossia la superficie è localmente ortogonale al raggio vettore. Nel sistema S l'angolo può essere ottenuto con la stessa legge di trasformazione delle orientazioni (6) già ottenuta per φ in quanto si può fare un ragionamento del tutto analogo, per cui si ha

$$\tan \alpha = \gamma \tan \alpha' \quad (8)$$



Ora per trovare lo spessore consideriamo che da un segmento che attraversa tutto lo spessore in direzione orizzontale di lunghezza $\delta x'$ nel riferimento S' si contrae in un segmento che attraversa tutto lo spessore δx nel riferimento S, con la normale relazione $\delta x = \delta x' / \gamma$. Questi due segmenti possono essere messi in relazione con gli spessori tramite gli angoli di inclinazione, come si vede dalla figura a fianco.

Si ha in particolare

$$\delta x' = \frac{d_0}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha')} = \gamma \delta x = \gamma \frac{d}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

da cui ricaviamo

$$d = \frac{d_0 \sin \alpha}{\gamma \sin \alpha'}$$

Esprimendo questa espressione in termini delle tangenti e poi sostituendo la (8) possiamo esprimere tutta la variazione di spessore in termini dell'angolo di orientazione della superficie nel sistema S' :

$$d = \frac{d_0}{\sqrt{\cos^2 \alpha' + \gamma^2 \sin^2 \alpha'}} \quad (9)$$

Questo è un risultato importante e generale che fornisce la variazione di spessore di una sbarra o una lastra causata dalla contrazione di Lorentz in funzione dell'orientazione della stessa nel riferimento proprio. Nel nostro caso dobbiamo passare alla dipendenza da φ . Per farlo sostituiamo prima $\alpha' = \varphi' + \frac{\pi}{2}$ e poi usiamo la (6). Dopo alcuni passaggi otteniamo:

$$d = d_0 \sqrt{\frac{\gamma^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\gamma^4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \quad (10)$$

Combinando questo risultato con la (7) otteniamo finalmente il risultato richiesto:

$$\sigma(\varphi) = \rho(\varphi)d(\varphi) = -\frac{vnI_0}{c^2} \frac{\gamma \sin \varphi}{\sqrt{\gamma^4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \quad (11)$$

Vediamo ora il secondo metodo. Questo si basa sull'imporre la condizione di raccordo sulle componenti normali del campo elettrico direttamente nel sistema S (va notato che questa condizione di raccordo non viene modificata dal movimento, al contrario di quelle relative alle componenti tangenziali). Abbiamo quindi:

$$\sigma(\varphi) = \varepsilon_0(E_{n,\text{out}} - E_{n,\text{in}}) = -\varepsilon_0 E_{n,\text{in}}(\varphi)$$

dove “out” e “in” indicano l'esterno e l'interno del solenoide, rispettivamente e il campo esterno è nullo. Il campo elettrico interno è dato dalla (2), che è costante e orientato ovunque come l'asse y . Dobbiamo quindi considerare la proiezione di questo campo sulla normale locale alla superficie (uscente), ossia la direzione identificata dall'angolo $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Si ha quindi:

$$\sigma(\varphi) = -\varepsilon_0 E_{n,\text{in}}(\varphi) = -\varepsilon_0 \gamma v \mu_0 n I_0 \sin \beta = \varepsilon_0 \gamma v \mu_0 n I_0 \cos \alpha$$

Trasformando ora prima α in α' , poi in φ' e infine in φ usando le relazioni tra questi angoli già trovate sopra, otteniamo la seguente espressione del coseno di α :

$$\cos \alpha = -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{\gamma^4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Sostituendola nell'espressione precedente e usando $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, otteniamo nuovamente il risultato (11).