Geometria ed Algebra
marzo 2022

- **Esercizio 1**
  - Definisci cosa sia una equazione lineare ed un sistema Σ di equazioni lineari;
  - Enuncia il teorema di Rouché-Capelli.
  - Dimostra che lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale, e che lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo è uno spazio affine.
  - Sia Σ il sistema di equazioni lineari nelle incognite (x, y, z, u, w) dato da
  $$\begin{cases} ax - y - az + au - aw = 0 \\ ax - ay = -1 \end{cases}$$
  Determina lo spazio delle sue soluzioni S_Σ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
  - Denotando con V lo spazio vettoriale rispetto a cui S_Σ è uno spazio affine, determina (per una scelta arbitraria di a) una base dello spazio vettoriale $V^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^5$.

- **Esercizio 2**
  - Definisci cosa sia una funzione lineare $f : V \to W$, e definisci cosa sono il suo nucleo e la sua Immagine.
  - Dimostra che una funzione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è banale.
  - Dato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, considera l'endomorfismo f in V che, rispetto ad una base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, sia

$$f(u_1) = a(u_1 + u_2), \qquad f(u_2) = b(u_3 + bu_1) + a^2 u_2, \qquad f(u_3) = a(u_1 + u_2).$$

    Studia l'iniettività e la suriettività di f al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.
  - Studia la diagonalizzabilità di f al variare di a, b. Per i valori dei parametri per cui f risulta diagonalizzabile, determina una base di V rispetto a cui la matrice che rappresenta l'azione di f sia diagonale.
  - Per una scelta arbitraria di a, b, determina lo spazio $(\ker(f))^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare definito dalla condizione che la base B sia ortonormale.

- **Esercizio 3**
  - Definisci cosa sia una forma quadratica, e cosa sia un prodotto scalare euclideo su uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ a dimensione finita.
  - Dimostra che, se $I = \{u_1, \ldots, u_k\}$ è un insieme di vettori ortogonali rispetto ad un prodotto scalare euclideo g, allora è libero. Dimostra anche che, se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V, allora le componenti di un vettore u rispetto a tale base si ottengono come prodotto scalare di u con i vettori v_j.
  - Considera in $\mathbb{R}^3$ la funzione
    $$g : (x, y, z) \times (x', y', z') \quad \mapsto \quad a(xx' + yy' + zz') + xz' + x'z$$
    Analizza per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ essa definisce un prodotto scalare euclideo.
  - Per tali valori, determina una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto a g.

- **Esercizio 4**
  Analizza le seguenti frasi.
  - Definisci il determinante di una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. È una funzione lineare? Dimostra che, se
  $$A, S \in \mathbb{R}^{2,2}$$
  con $A = -A^T$ e $S = S^T$, allora $\det(A + S) = \det A + \det S$.
  - Definisci la somma diretta di sottospazi vettoriali A, B di uno stesso spazio vettoriale V, ed enuncia il teorema di Grassmann. Dimostra che, se
  $$A = \{M \in \mathbb{R}^{n,n} : M_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i > j\}, \qquad B = \{M \in \mathbb{R}^{n,n} : M_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i < j\}$$
  allora $A + B = \mathbb{R}^{n,n}$ e che la somma non è diretta.