

# Esercizi di Microeconomia Avanzata

## Teoria del Consumatore - Soluzioni

April 6, 2016

### Esercizio 1

Si consideri la seguente funzione di utilità:  $u(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ .

1. Determinare le funzioni di domanda Marshalliane.

*Anzitutto si noti che non possono esserci soluzioni d'angolo, dato che l'utilità marginale del bene  $x_i$  tende ad infinito per  $x_i$  che tende a zero. La Lagrangiana per questo problema di massimizzazione vincolata è  $L(x_1, x_2, \lambda) = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2 - M)$  e le condizioni del primo ordine sono:*

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1^2} - \lambda p_1 = 0 & (1) \\ \frac{1}{x_2^2} - \lambda p_2 = 0 & (2) \\ x_1 p_1 + x_2 p_2 = M & (3) \end{cases}$$

Dalla (1) otteniamo  $\lambda = \frac{1}{x_1^2 p_1}$  e dalla (2) otteniamo  $\lambda = \frac{1}{x_2^2 p_2}$ . Si ha quindi  $\frac{1}{x_1^2 p_1} = \frac{1}{x_2^2 p_2} \implies x_2^2 = x_1^2 \frac{p_1}{p_2} \implies x_2 = x_1 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$ . Sostituendo questa espressione nel vincolo di bilancio (3), si ottiene:  $x_1 p_1 + x_1 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} p_2 = M \implies x_1 p_1 + x_1 \sqrt{p_1 p_2} = M$ . Mettendo in evidenza  $x_1 \sqrt{p_1}$ , si ha  $x_1 \sqrt{p_1} (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}) = M \implies x_1(p, M) = \frac{M}{\sqrt{p_1}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}$  e  $x_2(p, M) = \frac{M}{\sqrt{p_2}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}$ .

2. Mostrare che la funzione di utilità indiretta è  $-\frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}{M}$ , dove  $M$  è il reddito.

*Deriviamo la funzione di utilità indiretta sostituendo le funzioni di domanda marshalliane nella funzione di utilità:*

$$v(p, M) = -\frac{1}{x_1(p, M)} - \frac{1}{x_2(p, M)} = -\left( \frac{\sqrt{p_1}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}{M} + \frac{\sqrt{p_2}(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}{M} \right) = -\frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}{M}.$$

3. Derivare la funzione della spesa.

*Deriviamo la funzione della spesa partendo dalla funzione di utilità indiretta:  $v(p, e(p, u)) \equiv u \implies -\frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}{e(p, u)} = u \implies e(p, u) = -\frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}{u}$ . Si noti che, essendo  $u < 0$ , la funzione della spesa è positiva!*

4. Determinare le funzioni di domanda Hicksiane.

*Deriviamo le funzioni di domanda hicksiane dalla funzione della spesa utilizzando il Lemma di Shephard:  $h_1(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_1} = -\frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}{u\sqrt{p_1}}$  e  $h_2(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_2} = -\frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}{u\sqrt{p_2}}$ . Si noti che, essendo  $u < 0$ , le funzioni di domanda hicksiane sono positive!*

## Esercizio 2

Mostrare che se  $u(x, y)$  è omogenea di grado uno, la funzione di utilità indiretta è lineare nel reddito.

$u(x, y)$  omogenea di grado uno  $\iff u(tx, ty) = tu(x, y) \forall t > 0$ . Vogliamo dimostrare che la funzione di utilità indiretta è lineare nel reddito:  $v(p, m) = v(p) \cdot m$ .

1. Dimostriamo che  $u(x, y)$  omogenea di grado uno implica funzioni di domanda marshalliane lineari nel reddito ( $x(p, m) = x(p) \cdot m$ ). Sia  $z(p, m)$  il vettore delle domande marshalliane per i beni  $x$  e  $y$ . Per definizione  $z(p, m) = \arg \max_{(x, y) \in B_{p, m}} u(x, y)$ . Si vuole dimostrare che  $z(p, tm) = t \cdot z(p, m)$ .

(a) Si noti che  $z(p, m) \in B_{p, m} \implies t \cdot z(p, m) \in B_{p, tm}$ , quindi il nuovo paniere appartiene al vincolo di bilancio.

(b) Per dimostrare che il nuovo paniere  $t \cdot z(p, m)$  è di massimo, procediamo per contraddizione.

Supponiamo che esista un altro paniere  $\hat{z} \in B_{p, tm}$  tale che  $u(\hat{z}) > u(tz)$ . Essendo  $t > 0$  ed essendo  $u(\cdot)$  omogenea di grado uno, si ha  $u(\hat{z}) > u(tz) \implies u\left(\frac{\hat{z}}{t}\right) > u(z) \rightarrow \leftarrow$  che è in contraddizione con l'ipotesi iniziale che  $z$  è di massimo.

2.  $z(p, tm) = t \cdot z(p, m) \implies v(p, tm) = u(t \cdot z(p, m)) = tu(z(p, m)) = tv(p, m)$ .

## Esercizio 4

Si consideri la seguente funzione di utilità:

$$u(x_1, x_2) = [\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho}$$

1. Mostrare che quando  $\rho = 1$ , le curve di indifferenza diventano lineari.

Se  $\rho = 1$  la funzione di utilità diventa  $u(x_1, x_2) = [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]$ .

2. Mostrare che quando  $\rho \rightarrow 0$ , questa funzione di utilità rappresenta le stesse preferenze della funzione di utilità Cobb-Douglas  $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ .

$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \exp(\log([\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho})) = \exp\left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \log([\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho})\right) = \exp\left(\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \log[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]\right)$ . Applicando L'Hopital otteniamo:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \log[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 x_1^\rho \log x_1 + \alpha_2 x_2^\rho \log x_2}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho} = \frac{\alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \log(x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha})$$

con  $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ .

3. Mostrare che quando  $\rho \rightarrow -\infty$ , le curve di indifferenza diventano ad angolo retto.

- $\rho < 0, x_1 < x_2 \implies x_1^\rho > x_2^\rho \implies x_1^\rho \leq x_1^\rho + x_2^\rho \leq 2x_1^\rho \implies x_1 \leq (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \leq 2^{\frac{1}{\rho}} x_1$ . Per  $\rho \rightarrow -\infty$ ,  $2^{\frac{1}{\rho}} x_1 \rightarrow x_1$ , quindi  $(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \rightarrow x_1$
- $\rho < 0, x_1 > x_2 \implies x_1^\rho < x_2^\rho \implies x_2^\rho \leq x_1^\rho + x_2^\rho \leq 2x_2^\rho \implies x_2 \leq (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \leq 2^{\frac{1}{\rho}} x_2$ . Per  $\rho \rightarrow -\infty$ ,  $2^{\frac{1}{\rho}} x_2 \rightarrow x_2$ , quindi  $(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \rightarrow x_2$
- quindi la funzione di utilità tende a  $\min\{x_1, x_2\}$  per  $\rho \rightarrow -\infty$ .

Assumere che  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

1. Determinare le funzioni di domanda Marshalliane e la funzione di utilità indiretta.

$$x_1(p, m) = \frac{p_1^{\delta/\rho}}{p_1^\delta + p_2^\delta} m, x_2(p, m) = \frac{p_2^{\delta/\rho}}{p_1^\delta + p_2^\delta} m, v(p, m) = [p_1^\delta + p_2^\delta]^{-1/\delta} \cdot m \text{ con } \delta = \frac{\rho}{\rho-1}$$

2. Determinare le funzioni di domanda compensate e la funzione della spesa.

$$v(p, m) = [p_1^\delta + p_2^\delta]^{-1/\delta} \cdot m \implies e(p, u) = [p_1^\delta + p_2^\delta]^{1/\delta} \cdot u \implies h_1(p, u) = [p_1^\delta + p_2^\delta]^{1/\delta-1} p_1^{\delta-1} u \text{ e}$$

$$h_2(p, u) = [p_1^\delta + p_2^\delta]^{1/\delta-1} p_2^{\delta-1} u$$

## Esercizio 5

La funzione di utilità di Tommaso può essere scritta come  $U(x_1, x_2) = u(x_1) + v(x_2)$  dove  $u$  e  $v$  sono funzioni strettamente crescenti e strettamente concave. Mostrare che entrambi i beni sono normali.

*Dalla condizione SMS =  $\frac{p_1}{p_2}$  abbiamo  $\frac{u'(x_1)}{v'(x_2)} = \frac{p_1}{p_2}$  che può essere riscritta come  $u'(x_1) - \frac{p_1}{p_2} v'(x_2) = 0$ .*

*Al variare di  $m$  le domande marshalliane si modificano in modo da lasciare invariata questa relazione, quindi  $u''(x_1) \frac{\partial x_1}{\partial m} - \frac{p_1}{p_2} v''(x_2) \frac{\partial x_2}{\partial m} = 0$ , da cui  $\frac{\partial x_1}{\partial m} = \frac{p_1}{p_2} \frac{v''(x_2)}{u''(x_1)} \frac{\partial x_2}{\partial m}$ . Dato che le due funzioni sono strettamente concave il segno di  $\frac{\partial x_1}{\partial m}$  è uguale al segno di  $\frac{\partial x_2}{\partial m}$ . Ne segue che, essendo almeno uno dei due beni normale, l'altro lo deve essere a sua volta. NB: non possono essere entrambi inferiori perchè ad un aumento del reddito se entrambe le quantità di riducono non si spende tutto il reddito (che non può essere ottimo con preferenze strettamente monotone).*

## Esercizio 6

Si consideri la seguente funzione di utilità

$$U(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\log(x_i)}{N}$$

Sia  $p_i$  il prezzo del bene  $i$ .

1. Scrivere il problema di massimizzazione dell'utilità e determinare le condizioni del primo ordine.

*La Lagrangiana per il problema di massimizzazione è  $L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{\log(x_i)}{N} - \lambda \left( \sum_{i=1}^N x_i p_i - m \right)$ . Le condizioni del primo ordine sono:*

$$\begin{cases} \frac{1}{N x_i} - \lambda p_i = 0 & \forall i \\ \sum_{i=1}^N x_i p_i = m \end{cases} \quad (1)$$

2. Derivare le funzioni di domanda marshalliane.

Consideriamo due beni  $i$  e  $j$ .  $\frac{1}{N x_i p_i} = \lambda = \frac{1}{N x_j p_j} \implies x_j = x_i \frac{p_i}{p_j}$  (2). Il vincolo di bilancio (1) può essere riscritto come  $x_i p_i + \sum_{j \neq i} x_j p_j = m$ . Sostituiamo la condizione (2) ottenuta precedentemente per ottenere:  $x_i p_i + \sum_{j \neq i} x_i p_i = m \implies x_i(p, m) = \frac{1}{N} \frac{m}{p_i} \forall i$ .

3. Determinare la funzione di utilità indiretta.

Per ottenere la funzione di utilità indiretta sostituiamo le funzioni di domanda marshalliane nella funzione di utilità:  $v(p, m) = U(x(p, m)) = \sum_{i=1}^N \frac{\log(x_i(p, m))}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{\log\left(\frac{1}{N} \frac{m}{p_i}\right)}{N} = \log(m) - \log(N) - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log(p_i)$

4. Mostrare che l'identità di Roy è verificata.

Identità di Roy:

$$x_i(p, m) = -\frac{\partial v(p, m)/\partial p_i}{\partial v(p, m)/\partial m} = -\frac{-\frac{1}{N p_i}}{\frac{1}{m}} = \frac{m}{N p_i}$$

## Esercizio 7

Sia  $x_l(p, m)$  la funzione di domanda marshalliana per il bene  $l = 1, \dots, L$  dove  $p$  è il vettore dei prezzi e  $m$  è il reddito. Mostrare che nel caso di preferenze omotetiche si ha:

$$\frac{\partial x_l}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial p_l}$$

- Nel caso di preferenze omotetiche le funzioni di domanda marshalliane sono lineari nel reddito, quindi  $x(p, m) = x(p) \cdot m$ . Dall'identità  $x(p, e(p, u)) \equiv h(p, u)$  si ottiene

—

$$\frac{\partial x_l}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l}{\partial m} x_k = \frac{\partial h_l}{\partial p_k} \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial h_k}{\partial p_l} = \frac{\partial x_k}{\partial p_l} + \frac{\partial x_k}{\partial m} x_l$$

dove per il passaggio (1) si è usata la simmetricità della matrice Hessiana della funzione della spesa e il fatto che  $\frac{\partial h_l}{\partial p_k} = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_k}$ .

—

$$\frac{\partial x_l}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial p_l} + \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial m} x_l - \frac{\partial x_l}{\partial m} x_k}_{=0}$$

si deve quindi dimostrare che il termine in parentesi graffa è zero. Dall'omogeneità di grado 1 della funzione di utilità deriva  $\frac{\partial x_k}{\partial m} = x_k(p)$ , quindi  $\frac{\partial x_k}{\partial m} x_l = x_k(p) \cdot x_l(p) \cdot m$  e  $\frac{\partial x_l}{\partial m} x_k = x_l(p) \cdot x_k(p) \cdot m$ . Quindi  $\frac{\partial x_l}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k}{\partial p_l}$  c.v.d.

## Esercizio 8

Si consideri la seguente funzione di utilità:  $u(x, y) = \min(\alpha x, \beta y)$ . Il prezzo del bene  $x$  è  $p$  e il prezzo del bene  $y$  è 1, mentre il consumatore ha reddito pari ad  $m$ .

1. Determinare le scelte ottime di  $x$  e  $y$ .

Nel punto di ottimo si ha  $\alpha x = \beta y \implies y = \frac{\alpha}{\beta} x$ . Sostituendo nel vincolo di bilancio otteniamo:

$$xp_x + \frac{\alpha}{\beta} xp_y = m \implies x(p, m) = \frac{\beta}{\beta p_x + \alpha p_y} m \text{ e } y(p, m) = \frac{\alpha}{\beta p_x + \alpha p_y} m.$$

2. Determinare l'impatto di un aumento di  $\alpha$  sulla funzione di utilità indiretta.

La funzione di utilità indiretta è  $v(p, m) = \frac{\alpha\beta}{\beta p_x + \alpha p_y} m$ . Per determinare l'effetto di una variazione in  $\alpha$ , calcoliamo la derivata della funzione di utilità indiretta rispetto ad  $\alpha$ :

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\beta m (\beta p_x + \alpha p_y) - p_y \alpha \beta m}{(\beta p_x + \alpha p_y)^2} = \frac{\beta^2 p_x m}{(\beta p_x + \alpha p_y)^2} > 0$$

3. Determinare le funzioni di domanda compensata.

$$v(p, m) = \frac{\alpha\beta}{\beta p_x + \alpha p_y} m \implies e(p, u) = \frac{\beta p_x + \alpha p_y}{\alpha\beta} u \implies h_x(p, u) = \frac{u}{\alpha} \text{ e } h_y(p, u) = \frac{u}{\beta}$$

4. Determinare la funzione della spesa.

$$e(p, u) = p_x h_x(p, u) + p_y h_y(p, u) = \left( \frac{p_x}{\alpha} + \frac{p_y}{\beta} \right) u$$

5. Verificare l'identità di Roy.

$$x_i(p, m) = - \frac{\partial v(p, m) / \partial p_i}{\partial v(p, m) / \partial m} = - \frac{\frac{-\beta^2 \alpha}{(\beta p_x + \alpha p_y)^2} m}{\frac{\alpha\beta}{\beta p_x + \alpha p_y}} = \frac{\beta}{\beta p_x + \alpha p_y} m$$

## Esercizio 9

Si consideri la seguente funzione di utilità:  $U(x, y) = x + y$ .

1. Determinare le funzioni di domanda marshalliane.

$$x(p, m) = \begin{cases} \frac{m}{p_x} & \text{se } p_x < p_y \\ \frac{m}{p_x} - y & \text{se } p_x = p_y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y(p, m) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_x < p_y \\ \frac{m}{p_y} - x & \text{se } p_x = p_y \\ \frac{m}{p_y} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. Determinare la funzione di utilità indiretta.

$$v(p, m) = \frac{m}{\min\{p_x, p_y\}}$$

3. Determinare la funzione della spesa.

$$e(p, u) = \min\{p_x, p_y\} \cdot u$$

4. Determinare le funzioni di domanda compensata.

$$h_x(p, u) = \begin{cases} u & \text{se } p_x < p_y \\ u - y & \text{se } p_x = p_y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h_y(p, u) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_x < p_y \\ u - x & \text{se } p_x = p_y \\ u & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## Esercizio 10

Supponiamo che le preferenze di un consumatore siano rappresentate dalla funzione di utilità  $u(x, y) = (x - \bar{x})^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ . Si fissi il prezzo del bene  $y$  a 1.

1. Determinare le scelte ottime di  $x$  e  $y$ .

La Lagrangiana per il problema di massimizzazione è  $L(x, y, \lambda) = (x - \bar{x})^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \lambda(xp_x + yp_y - m)$ . Le condizioni del primo ordine sono:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - \bar{x})^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \lambda p_x = 0 & (1) \\ \frac{1}{2}(x - \bar{x})^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_y = 0 & (2) \\ xp_x + yp_y = m & (3) \end{cases}$$

Consideriamo la (1) e la (2) assieme:  $\frac{y}{x - \bar{x}} = \frac{p_x}{p_y} \implies y = \frac{p_x}{p_y}(x - \bar{x})$ . Sostituiamo la condizione ottenuta nel vincolo di bilancio:  $xp_x + p_x(x - \bar{x}) = m \implies x(p, m) = \frac{1}{2} \frac{m}{p_x} + \frac{1}{2} \bar{x}$  che può essere riscritto come  $x(p, m) = \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{p_x} + \bar{x}$ , e  $y(p, m) = \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{p_y}$ .

2. Determinare l'impatto di un aumento di  $\bar{x}$  sulla funzione di utilità indiretta.

La funzione di utilità indiretta è  $v(p, m) = \left( \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{p_x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{p_y} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{\sqrt{p_x p_y}}$ . Per determinare l'effetto di una variazione in  $\bar{x}$ , calcoliamo la derivata della funzione di utilità indiretta rispetto ad  $\bar{x}$ :

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{p_x}}{\sqrt{p_y}}$$

In alternativa, per determinare l'effetto di una variazione in  $\bar{x}$ , possiamo utilizzare il teorema dell'involuppo:

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{2} (x(p, m) - \bar{x})^{-\frac{1}{2}} y(p, m)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{p_x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \frac{m - p_x \bar{x}}{p_y} \right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{p_x}}{\sqrt{p_y}}$$