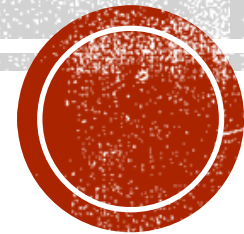


# TEORIA DEI SISTEMI

Decomposizione modale nel dominio del tempo



# RISPOSTA DI SISTEMI LTI

Dato il sistema lineare LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

La sua risposta è data da

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{cases} \quad \begin{cases} x(k) = \Phi(k - k_0)x(k_0) + \sum_{h=k_0}^{k-1} H(k - h)u(h) \\ y(k) = \Psi(k - k_0)x(k_0) + \sum_{h=k_0}^k W(k - h)u(h) \end{cases}$$



Dove

$$\begin{cases} \Phi(t) = e^{At}, & H(t) = \Phi(t)B\delta_{-1}(t) \\ \Psi(t) = C\Phi(t), W(t) = CH(t) + D\delta(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi(k) = A^k, & H(k) = \Phi(k-1)B\delta_{-1}(k-1) \\ \Psi(k) = C\Phi(k), W(k) = CH(k) + D\delta(k) \end{cases}$$

La matrice di transizione gioca un ruolo fondamentale nel calcolo della risposta dinamica di un sistema lineare.

Argomento di questa lezione è il calcolo di tale matrice direttamente nel dominio del tempo.

Si partirà dal caso tempo-continuo, in cui risulta

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots$$



# SIISTEMA COME INSIEME DI RAPPRESENTAZIONI EQUIVALENTI

Dato il sistema lineare LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

se si effettua il cambio di coordinate  $z = Tx$ , nelle nuove coordinate il sistema risulta descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAx(t) + TBu(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y = CT^{-1}z(t) + Du(t) = \tilde{C}z(t) + Du(t) \end{cases}$$

E' semplice verificare che

$$\tilde{\Phi}(t) = T\Phi(t)T^{-1}, \quad \tilde{H}(t) = TH(t), \quad \tilde{\Psi}(t) = \Psi(t)T^{-1}, \quad \tilde{W}(t) = W(t)$$



# CASO TEMPO-CONTINUO – AUTOVALORI DISTINTI

Sia  $A \in \mathbb{R}^n$  la matrice dinamica del sistema lineare in esame.

**Assunzione:** La matrice  $A$  ha  $\nu$  autovalori reale e  $\mu$  coppie di autovalori complessi e coniugati ( $\nu + 2\mu = n$ ). Inoltre tutti gli autovalori sono tra loro distinti.

Indichiamo con

- $\lambda_i$  gli autovalori reali ( $i = 1, 2, \dots, \nu$ )
- $u_i$  gli autovettori relativi agli autovalori reali
- $\alpha_i \pm j\omega_i$  le coppie di autovalori complessi e coniugati ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ )
- $v_i \pm jw_i$  gli autovettori relativi alle coppie di autovalori complessi e coniugati

**Teorema:** se gli autovalori sono tutti distinti, la matrice

$$T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_\nu \ u_{a1} \ u_{b1} \ u_{a2} \ u_{b2} \ \dots \ u_{a\mu} \ u_{b\mu}]$$

è invertibile



Per gli autovalori reali si ha

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

Mentre per gli autovalori complessi si ha

$$A(u_{ai} + ju_{bi}) = (\alpha_i + j\omega_i)(u_{ai} + ju_{bi}) \Leftrightarrow Au_{ai} + jAu_{bi} = \alpha_i u_{ai} - \omega_i u_{bi} + j(\alpha_i u_{bi} + \omega_i u_{ai})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Au_{ai} = \alpha_i u_{ai} - \omega_i u_{bi} \\ Au_{bi} = \alpha_i u_{bi} + \omega_i u_{ai} \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} u_{ai} & u_{bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ai} & u_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i & \omega_i \\ -\omega_i & \alpha_i \end{bmatrix}$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned} AT &= A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_\nu & u_{a1} & u_{b1} & u_{a2} & u_{b2} & \dots & u_{a\mu} & u_{b\mu} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \dots & \lambda_\nu u_\nu & \begin{bmatrix} u_{a1} & u_{b1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} u_{a\mu} & u_{b\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_\mu & \omega_\mu \\ -\omega_\mu & \alpha_\mu \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_\nu, \begin{bmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_\mu & \omega_\mu \\ -\omega_\mu & \alpha_\mu \end{bmatrix})$ , si ha

$$AT = T\Lambda \Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$$



Quindi

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = T \operatorname{diag} \left( e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_\nu t}, e^{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} t}, \dots, e^{\begin{bmatrix} \alpha_\mu & \omega_\mu \\ -\omega_\mu & \alpha_\mu \end{bmatrix} t} \right) T^{-1}$$

Per completare la discussione resta da calcolare la matrice  $e^{\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} t}$ .

**Teorema:**  $e^{\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos(\omega t) & e^{\alpha t} \sin(\omega t) \\ -e^{\alpha t} \sin(\omega t) & e^{\alpha t} \cos(\omega t) \end{bmatrix}$

**dim.**

$$e^{\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} t} = e^{(\alpha I t + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} t)} = e^{\alpha t} e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} t}$$

Ora

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}^{2k} = \begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} = \begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k+1} \\ -(-1)^k \omega^{2k+1} & 0 \end{bmatrix}$$



da cui

$$\begin{aligned} e^{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}^k t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} (-1)^k \omega^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \omega^{2k} \end{bmatrix} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} 0 & (-1)^k \omega^{2k+1} \\ -(-1)^k \omega^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mettendo insieme i vari termini si ottiene la dimostrazione.



Si è già posto

$$T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_\nu \ u_{a1} \ u_{b1} \ u_{a2} \ u_{b2} \ \dots \ u_{a\mu} \ u_{b\mu}]$$

Sia ora

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_\nu^T \\ v_{a1}^T \\ v_{b1}^T \\ v_{a2}^T \\ v_{b2}^T \\ \vdots \\ v_{a\mu}^T \\ v_{b\mu}^T \end{bmatrix}$$



Si ha

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{\nu} u_k v_k^T e^{\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\mu} [u_{ak} \quad u_{bk}] \begin{bmatrix} \cos(\omega_k t) & \sin(\omega_k t) \\ -\sin(\omega_k t) & \cos(\omega_k t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ak}^T \\ v_{bk}^T \end{bmatrix} e^{\alpha_k t}$$

La matrice di transizione è quindi decomposta nella combinazione lineare di  $n$  funzioni, dette modi naturali del sistema.

Si noti che l'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale  $x_0$  è data da

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\nu} e^{\lambda_k t} u_k c_k + \sum_{k=1}^{\mu} [u_{ak} \quad u_{bk}] \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_k \\ g_k \end{bmatrix} e^{\alpha_k t}$$

Dove gli scalari  $c_k$ ,  $d_k$  ed  $g_k$  sono dati da

$$c_k = v_k^T x_0, \quad d_k = v_{ak}^T x_0, \quad g_k = v_{bk}^T x_0$$

In questo modo l'evoluzione libera è decomposta lungo la base di  $\mathbb{R}^n$  composta dagli autovettori.



## Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#)

```
>> A
```

```
A =
```

```
  0   1  
 -5  -6
```

```
>> [U,D]=eig(A)
```

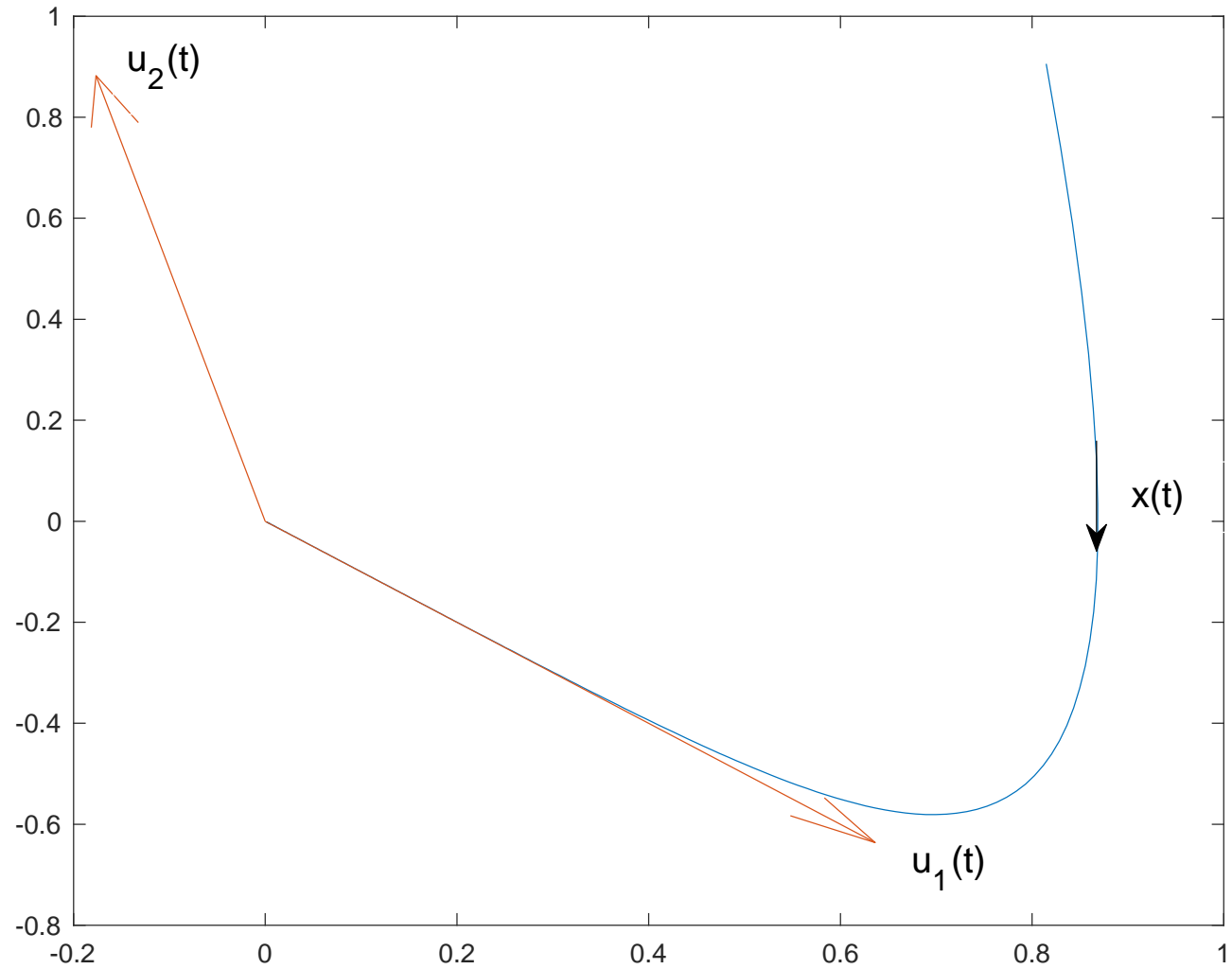
```
U =
```

```
  0.7071  -0.1961  
 -0.7071   0.9806
```

```
D =
```

```
 -1   0  
  0  -5
```

```
f_x >> |
```



# CASO TEMPO-DISCRETO – AUTOVALORI DISTINTI

Nel caso tempo-discreto la matrice di transizione è data da  $A^k$ , che può essere calcolata come

$$A^k = T \Lambda^k T^{-1} = T \text{diag} \left( \lambda_1^k, \dots, \lambda_\nu^k, \begin{bmatrix} \alpha_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}^k, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_\mu & \omega_\mu \\ -\omega_\mu & \alpha_\mu \end{bmatrix}^k \right) T^{-1}$$

**Teorema:**  $\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix}^k = \rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$ , dove  $\rho e^{\pm j\theta} = \alpha \pm j\omega$

Il teorema può essere dimostrato per induzione, facendo vedere che esso è valido per  $k = 1$ , e che se è valido per  $k = h$  allora esso è valido per  $k = h + 1$ .

Quindi

$$A^k = \sum_{i=1}^{\nu} u_i v_i^T \lambda_i^k + \sum_{i=1}^{\mu} \begin{bmatrix} u_{ai} & u_{bi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k\theta_i) & \sin(k\theta_i) \\ -\sin(k\theta_i) & \cos(k\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ai}^T \\ v_{bi}^T \end{bmatrix} \rho_i^k$$



# TEOREMA DI CALEY-HAMILTON

Sia  $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  il polinomio caratteristico della matrice  $A$ , allora

$$p_A(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI = 0$$

Dim.

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} + \dots + P_n}{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n} \Rightarrow$$

$$(\lambda I - A)(P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} + \dots + P_n) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n)I$$



Eseguendo la moltiplicazione al primo membro ed uguagliando i coefficienti dei termini aventi lo stesso grado si ottiene:

$$\begin{aligned} \lambda^n P_1 &= \lambda^n I \quad \Rightarrow \quad P_1 = I \\ \lambda^{n-1} P_2 - AP_1 \lambda^{n-1} &= \lambda^{n-1} a_1 I \quad \Rightarrow \quad P_2 - AP_1 = a_1 I \\ \lambda^{n-2} P_3 - AP_2 \lambda^{n-2} &= \lambda^{n-2} a_2 I \quad \Rightarrow \quad P_3 - AP_2 = a_2 I \\ &\vdots \\ \lambda P_n - AP_{n-1} \lambda &= \lambda a_{n-1} I \quad \Rightarrow \quad P_n - AP_{n-1} = a_{n-1} I \\ -AP_n &= a_n I \quad \Rightarrow \quad -AP_n = a_n I \end{aligned}$$

Moltiplicando ciascuna relazione per  $A^n, A^{n-1}, \dots, A^0 = I$ , si ottiene

$$\begin{aligned} A^n P_1 &= A^n \\ A^{n-1} P_2 - A^n P_1 &= a_1 A^{n-1} \\ &\vdots \\ AP_n - A^2 P_{n-1} &= a_{n-1} A \\ -AP_n &= a_n I \end{aligned}$$

Sommando le ultime  $n + 1$  equazioni si ottiene  $p_A(A) = 0$ .



# CENNO AL CASO IN CUI SONO PRESENTI AUTOVALORI MULTIPLI

Consideriamo ora il caso generale in cui il polinomio caratteristico può essere scritto come

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

dove con  $\lambda_i$  si è indicata la generica radice del polinomio (sia essa reale o complessa) e con  $n_i$  la sua molteplicità (**chiamata molteplicità algebrica**).

Ovviamente

$$\sum_{i=1}^r n_i = n$$

La possibilità di diagonalizzare la matrice  $A$  nel caso in cui gli autovalori sono distinti, discende dal fatto che in quel caso gli autovettori costituiscono una base di  $\mathbb{C}^n$  (si deve qui considerare  $\mathbb{C}^n$  e non  $\mathbb{R}^n$  perché autovalori reali e complessi non vengono distinti).



Preso il generico autovalore  $\lambda_i$ , definiamo la sua **molteplicità geometrica**  $m_i$  come

$$m_i = \dim[\mathcal{N}(\lambda_i I - A)] = m - \dim(\mathcal{R}(\lambda_i I - A))$$

Si noti che se un vettore appartiene a  $\mathcal{N}(\lambda_i I - A)$ , esso è un autovettore di  $\lambda_i$ . Quindi se la molteplicità geometrica è uguale alla molteplicità algebrica, per l'autovalore  $\lambda_i$  sarà possibile selezionare  $m_i = n_i$  autovettori linearmente indipendenti.

In generale

$$1 \leq m_i \leq n_i$$

Nel caso in cui  $m_i < n_i$  gli autovettori linearmente indipendenti che si possono estrarre per l'autovalore  $\lambda_i$  sono inferiori alla molteplicità algebrica. In questo caso non è possibile formare una matrice  $T$  invertibile che consenta di diagonalizzare la matrice  $A$ .

Si può quindi verificare che nel caso di autovalori multipli, la matrice  $A$  è diagonalizzabile se e solo se  $m_i = n_i$  per ciascun autovalore  $\lambda_i$ .



Esempio.  $A_1 = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A_1| = |\lambda I - A_2| = (\lambda - p)^2$$

Quindi entrambe le matrici considerate hanno un autovalore in  $p$  con molteplicità algebrica pari a 2.

D'altra parte

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[pI - A_1] &= 2 \\ \mathcal{N}[pI - A_2] &= 1 \end{aligned}$$

La prima matrice è quindi diagonalizzabile (in effetti già lo è), la seconda non è diagonalizzabile.

Quando una matrice non è diagonalizzabile, essa può essere portata nella cosiddetta forma canonica di Jordan, la quale dà luogo ai modi naturali del tipo  $t^k e^{\lambda t}$  (nel caso tempo continuo)



# IL POLINOMIO MINIMO

Si torni ora a considerare la funzione di transizione

$$\Phi(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{P_1 \lambda^{n-1} + P_2 \lambda^{n-2} + \dots + P_n}{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n}$$

Se, nell'espressione razionale, è possibile operare delle semplificazioni, dopo aver eliminato tutti i fattori comuni, al denominatore comparirà il cosiddetto polinomio minimo.

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$$

Si noti che

1.  $r_i \geq 1$ , quindi nessuna radice del polinomio caratteristico può completamente sparire nel polinomio minimo
2.  $m_i = n_i$  se e solo se  $r_i = 1$ , quindi se nel polinomio minimo non vi sono radici multiple la matrice  $A$  è diagonalizzabile.
3.  $\chi_A(A) = 0$ , in particolare il polinomio minimo è il polinomio monico di ordine minimo che ha  $A$  come radice

Si può facilmente verificare che

$$\chi_{A_1}(\lambda) = \lambda - p, \quad \chi_{A_2} = (\lambda - p)^2$$

