Classificazione dei sistemi

Alfredo Pironti

Sistemi astratti orientati

- E’ possibile dare una definizione estremamente generale di sistema astratto orientato.
- Per semplicità assumeremo che lo stato possa essere rappresentato da un vettore n-dimensionale a componenti reali
  - Implicitamente questo restringerà il nostro studio ai
    - Sistemi astratti orientati a stato vettore a dimensione finita

I sistemi a stato vettore a dimensione finita

- Abbiamo già visto che un sistema è definito attraverso le equazioni

Funzione di transizione

Funzione di uscita

$$x(t) = \varphi\left(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right)$$

$$y(t) = \eta\left(t, x(t), u(t)\right)$$

- dove

$t_0, t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{T}$ sottoinsieme ordinato

$x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$

$y(t) \in \mathbb{R}^p$

$u(t) \in \mathbb{R}^m$

$u_{[t_0,t)}$ restrizione all'insieme $[t_0, t) \cap \mathcal{T}$ della funzione $u: t \in \mathcal{T} \to u(t) \in \mathbb{R}^m$

I sistemi a stato vettore a dimensione finita

- La funzione di transizione soddisfa le proprietà
  - causalità

    Date due funzioni di ingresso u e v: $u_{[t_0,t)} = v_{[t_0,t)} \Rightarrow$
    $$\Rightarrow \varphi\left(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right) = \varphi\left(t, t_0, x_0, v_{[t_0,t)}\right)$$
  - consistenza
    $$\varphi\left(t_0, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right) = x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$
  - separazione
    $$\varphi\left(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right) = \varphi\left(t, t_1, \varphi\left(t_1, t_0, x_0, u_{[t_0,t_1)}\right), u_{[t_1,t)}\right)$$
    $$\forall t_1 \in [t_0, t)$$

Sistemi a tempo-continuo e a tempo-discreto

- Un sistema si dice tempo-discreto se l’insieme dei tempi $\mathcal{T}$ è discreto (ovvero è il codominio di una successione). In un sistema a tempo-discreto l’insieme dei tempi generalmente coincide (o si può far coincidere) con l’insieme dei numeri interi relativi
- Un sistema si dice tempo-continuo se l’insieme dei tempi $\mathcal{T}$ è continuo. In un sistema a tempo-continuo l’insieme dei tempi generalmente coincide (o si può far coincidere) con l’insieme dei numeri reali.

Rappresentazioni implicite

- La funzione di transizione e la funzione di uscita costituiscono una rappresentazione esplicita del sistema. Tale rappresentazione viene detta rappresentazione esplicita i-s-u (ingresso-stato-uscita)
- Un sistema a stato vettore a dimensione finita può essere rappresentato usando anche delle rappresentazioni implicite

Rappresentazioni implicite ~~stazionarie~~

- Sistemi a tempo continuo:

Funzione generatrice

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$

$$y(t) = \eta\big(t, x(t), u(t)\big)$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

  - oppure

$$F\big(t, \dot{x}(t), x(t), u(t)\big) = 0$$

$$\gamma\big(t, y(t), x(t), u(t)\big) = 0$$

  - oppure (rappresentazioni implicite i-u)

$$G\big(t, y^n(t), y^{n-1}(t), \dots, y(t), u^n(t), u^{n-1}(t), \dots, u(t)\big) = 0$$

Rappresentazioni implicite

- Sistemi a tempo ~~continuo~~ discreto:

$$x(t+1) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$$
$$y(t) = \eta\big(t, x(t), u(t)\big)$$

  – oppure

$$F\big(t, x(t+1), x(t), u(t)\big) = 0$$
$$\gamma\big(t, y(t), x(t), u(t)\big) = 0$$

  – oppure (rappresentazioni implicite i-u)

$$G\big(t, y(t-n), y(t-n+1), \dots, y(t), u(t-n), u(t-n+1), \dots, u(t)\big) = 0$$

Sistemi SISO e MIMO

- La dimensione n del vettore di stato viene detta dimensione del sistema.
- La dimensione m del vettore di ingresso fornisce il numero degli ingressi.
- La dimensione p del vettore di uscita fornisce il numero delle uscite.
- Se $p=m=1$, allora il sistema si dirà monovariabile o anche SISO (Single Input Single Output)
- Se $p>1$ e $m>1$, allora il sistema si dirà multivariabile o anche MIMO (Multiple Input Multiple Output)
- Se $p=1$ e $m>1$, allora il sistema si dirà MISO
- Se $p>1$ e $m=1$, allora il sistema si dirà SIMO

Sistemi algebrici

- Un sistema si dice puramente algebrico o statico o privo di memoria se l'uscita può essere espressa in funzione del solo ingresso (oltre che del tempo), in altre parole:

$$y(t) = \eta(t, u(t))$$

- Un sistema non combinatorio si dice dinamico o con memoria

Sistemi strettamente propri

- Un sistema si dice strettamente proprio se l'uscita può essere espressa in funzione del solo stato (oltre che del tempo), in altre parole:

$$x(t) = \varphi\left(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right)$$
$$y(t) = \eta(t, x(t))$$

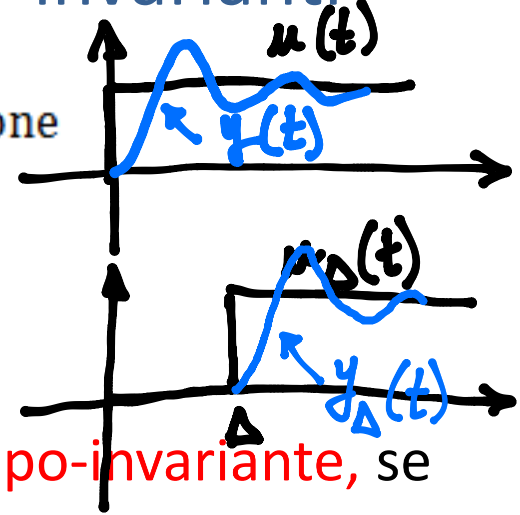
Sistemi Autonomi

- Un sistema si dice autonomo se esso non ha ingressi, in altre parole:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$$
$$y(t) = \eta(t, x(t))$$

Sistemi stazionari o tempo-invarianti

Data una funzione u, si definisce sua traslazione di ampiezza Δ la funzione



$$u_\Delta(t) = u(t-\Delta)$$

- Un sistema si dice stazionario o tempo-invariante, se esso verifica le seguenti proprietà

1) $\forall$ possibile funzione d'ingresso u, $\forall \Delta \in \mathcal{T}$

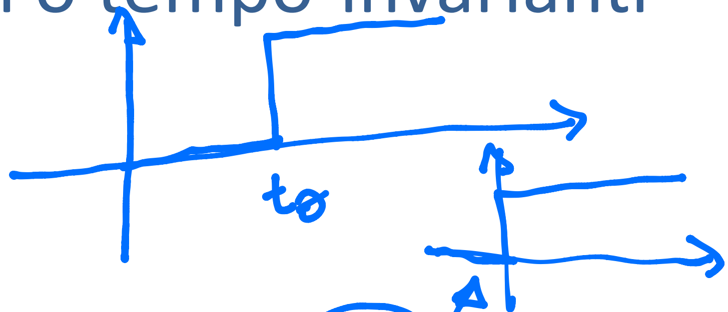
$$\varphi\left(t+\Delta, t_0+\Delta, x_0, u_{\Delta[t_0+\Delta, t+\Delta)}\right) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)})$$

2) $\eta(t+\Delta, x, u) = \eta(t, x, u), \qquad \forall t \in \mathcal{T}, \forall \Delta \in \mathcal{T}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^m$

Sistemi stazionari o tempo-invarianti

- Ponendo

$$\Delta = -t_0$$



- Si ha

$$\varphi\left(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right) = \varphi\left(t - t_0, 0, x_0, u_{-t_0\,[0,t-t_0)}\right)$$

- Inoltre la funzione di uscita risulta essere indipendente dal tempo
- Con un abuso di notazione si può quindi scrivere

$$x(t) = \varphi\left(t - t_0, x_0, u_{[t_0,t)}\right)$$

$$y(t) = \eta\left(x(t), u(t)\right)$$

Sistemi stazionari o tempo-invarianti

- In un sistema stazionario l'evoluzione del tempo nello stato e nell'uscita dipende solo dall'intervallo di tempo passato dall'applicazione dell'ingresso. E non dall'istante in cui l'ingresso comincia ad essere applicato.
- Es.

$$x(t) = e^{-a(t-t_0)}x_0 + b\int_{t_0}^{t} e^{-a(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

$$= e^{-a(t-t_0)}x_0 + be^{-at}\int_{t_0}^{t} e^{a\tau}u(\tau)d\tau$$

$\sigma = \tau - t_0$

$$= e^{-a(t-t_0)}x_0 + be^{-a(t-t_0)}\int_{0}^{t-t_0} e^{a\sigma}u(\sigma + t_0)d\sigma$$

$$y(t) = x(t)$$

Sistemi stazionari o tempo-invarianti

- Un sistema non stazionario si dice tempo-variante

Rappresentazioni implicite stazionarie

- Sistemi a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$$
$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

  - oppure

$$F\big(\dot{x}(t), x(t), u(t)\big) = 0$$
$$\gamma\big(y(t), x(t), u(t)\big) = 0$$

  - oppure

$$G\big(y^n(t), y^{n-1}(t), \dots, y(t), u^n(t), u^{n-1}(t), \dots, u(t)\big) = 0$$

Rappresentazioni implicite stazionarie

- Sistemi a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) &= \eta(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

  – oppure

$$\begin{aligned} F\big(x(t+1), x(t), u(t)\big) &= 0 \\ \gamma\big(y(t), x(t), u(t)\big) &= 0 \end{aligned}$$

  – oppure

$$G\big(y(t-n), y(t-n+1), \dots, y(t), u(t-n), u(t-n+1), \dots, u(t)\big) = 0$$

Sistemi lineari

- Un sistema si dice lineare se la sua rappresentazione esplicita soddisfa le relazioni

$$
\begin{aligned}
&\varphi(t, t_0, \overset{x_0}{\alpha_1 x_{01} + \alpha_2 x_{02}}, \overset{u}{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2}) = \\
&\qquad = \alpha_1 \varphi(t, t_0, x_{01}, u_1) + \alpha_2 \varphi(t, t_0, x_{02}, u_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta(t, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \\
&\qquad = \alpha_1 \eta(t, x_1, u_1) + \alpha_2 \eta(t, x_2, u_2)
\end{aligned}
$$

Sistemi lineari

- Ponendo

$$x_{01} = x_0, \qquad x_{02} = 0$$
$$u_1 = 0, \qquad u_2 = u$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

- per un sistema lineare si ha

$x_0 = 1 \cdot x_0 + 0$

$u = 0 + 1 \cdot u$

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u) =$$
$$= \varphi(t, t_0, x_0, 0) + \varphi(t, t_0, 0, u) = x_l(t) + x_f(t)$$
$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) =$$
$$= \eta(t, x_l(t), 0) + \eta\big(t, x_f(t), u(t)\big) = y_l(t) + y_f(t)$$

- La risposta si decompone, quindi, in evoluzione libera + risposta forzata

Rappresentazioni implicite di sistemi lineari

- Si può dimostrare che la linearità di un sistema è equivalente alla linearità della funzioni generatrice (oltre che a quella di uscita). Per cui in un sistema lineare si ha

$$f(t, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 f(t, x_1, u_1) + \alpha_2 f(t, x_2, u_2)$$

- Relazioni analoghe si hanno per gli altri tipi di rappresentazioni ~~esplicite~~ implicite

Teorema di rappresentazione di una funzione lineare

- Sia *F* la funzione

$$F : q \in \mathbb{R}^l \to p = F(q) \in \mathbb{R}^h$$

- *F* si dice lineare se è soddisfatta la relazione

$$F(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) = \alpha_1 F(q_1) + \alpha_2 F(q_2)$$

- *Teorema: F* è lineare se e solo se

$$\exists H \in \mathbb{R}^{h \times l} : F(q) = Hq$$

Matrice

Prodotto riga per colonna

Rappresentazioni implicite di sistemi lineari

- Un sistema lineare ha una rappresentazione implicita i-s-u del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

- Oppure per sistemi a tempo-discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

- Se il sistema è stazionario le matrici *A*, *B*, *C*, e *D* non dipendono dal tempo.