Filtraggio Digitale

Alfredo Pironti

Ottobre 2012

Filtri Analogici (1)

Un filtro analogico è un sistema lineare tempo-invariante (LTI) a tempo continuo.

Nell'elaborazione dei segnali elettrici, i filtri sono realizzati

- ✔ con componenti passivi (resistenze, induttanze, capacità) $\rightarrow$ **filtri passivi**
  - ✘ non consumano potenza;
  - ✘ esempi: filtro RC, CR, RLC;
- ✔ con componenti attivi (amplificatori operazionali) $\rightarrow$ **filtri attivi**
  - ✘ consumano potenza.

Filtri Analogici (2)

- **Vantaggi:**
  - esistono metodologie di progetto semplici e consolidate (filtri di Butterworth, Chebishev, Bessel, ellittici)
  - sono veloci e semplici da realizzare con componenti discreti ed in piccole quantità
  - possono essere realizzati con componenti passivi (senza consumo di potenza)
- **Svantaggi:**
  - presentano prestazioni poco stabili nel tempo e sensibili alle variazioni di temperatura
  - richiedono componenti di qualità per progetti critici
  - sono costosi da realizzare in grandi quantità
  - sono difficili da realizzare con tecniche VLSI, esempio: difficile realizzare una induttanza in un circuito integrato

Filtri digitali

Un filtro digitale emula il comportamento di un filtro analogico, attraverso una elaborazione numerica del segnale realizzata in un sistema informatico (ad esempio un DSP)

I vantaggi dell'elaborazione numerica dei segnali, rispetto all'elaborazione analogica sono:

- ✔ programmabilità $\Rightarrow$ versatilità
- ✔ stabilità delle caratteristiche nel tempo
- ✔ costi

Modello Matematico di un filtro digitale

Un filtro digitale lineare e stazionario (LTI, Lineare Tempo Invariante) è rappresentato attraverso la sua equazione ingresso-uscita

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j y(k-j) = \sum_{m=0}^{M} \beta_m u(k-m) \tag{1}$$

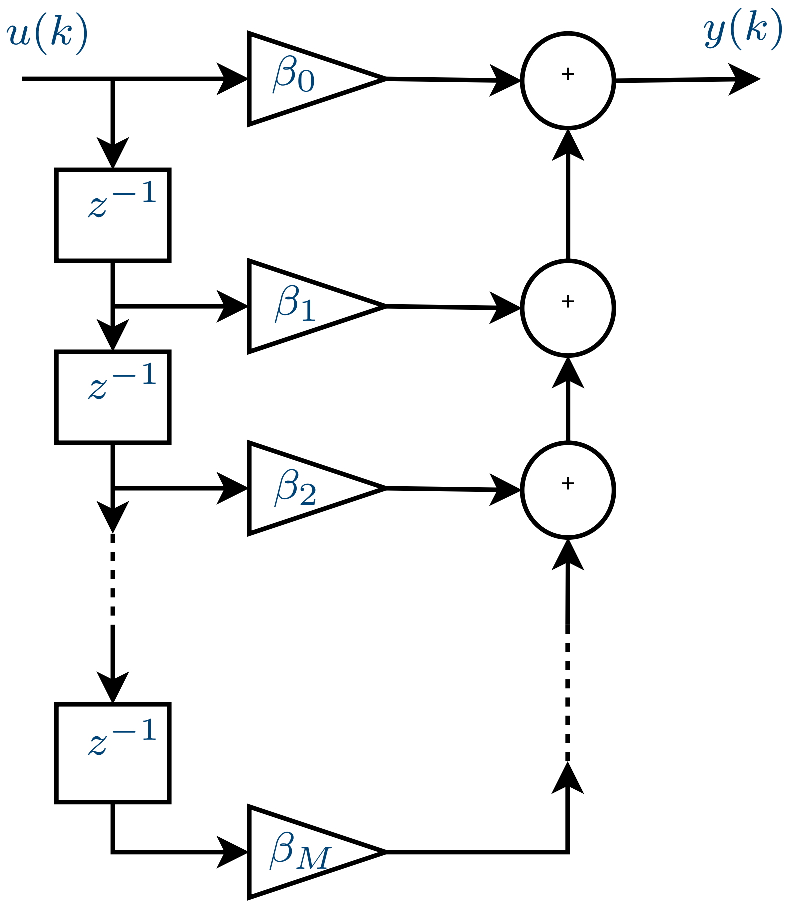
L'equazione (1) può essere rappresentata nel dominio della variabile complessa, attraverso l'uso della trasformata $\mathcal{Z}$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} \beta_m z^{-m}}{\sum_{j=0}^{N} \alpha_j z^{-j}}$$

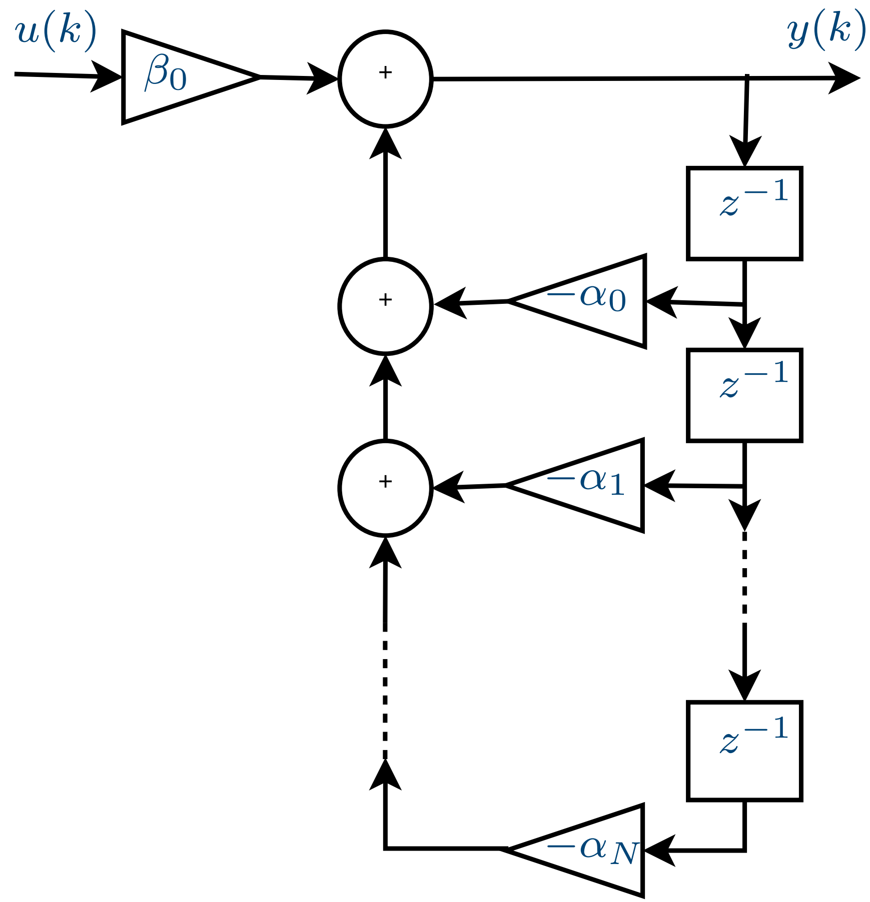
La funzione di variabile complessa $H(z)$ è la funzione di trasferimento del filtro. Un sistema definito attraverso l'equazione (1) viene anche detto sistema ARMA (Auto Regressive Moving Average). Casi particolari di sistemi ARMA sono i sistemi

- MA (Moving average): $y(k) = \sum_{m=0}^{N} \beta_m u(k-m)$
- AR (Auto Regressive): $y(k) = -\sum_{j=1}^{M} \alpha_j y(k-j) + \beta_0 u(k)$

Schema a blocchi dei filtri MA ed AR

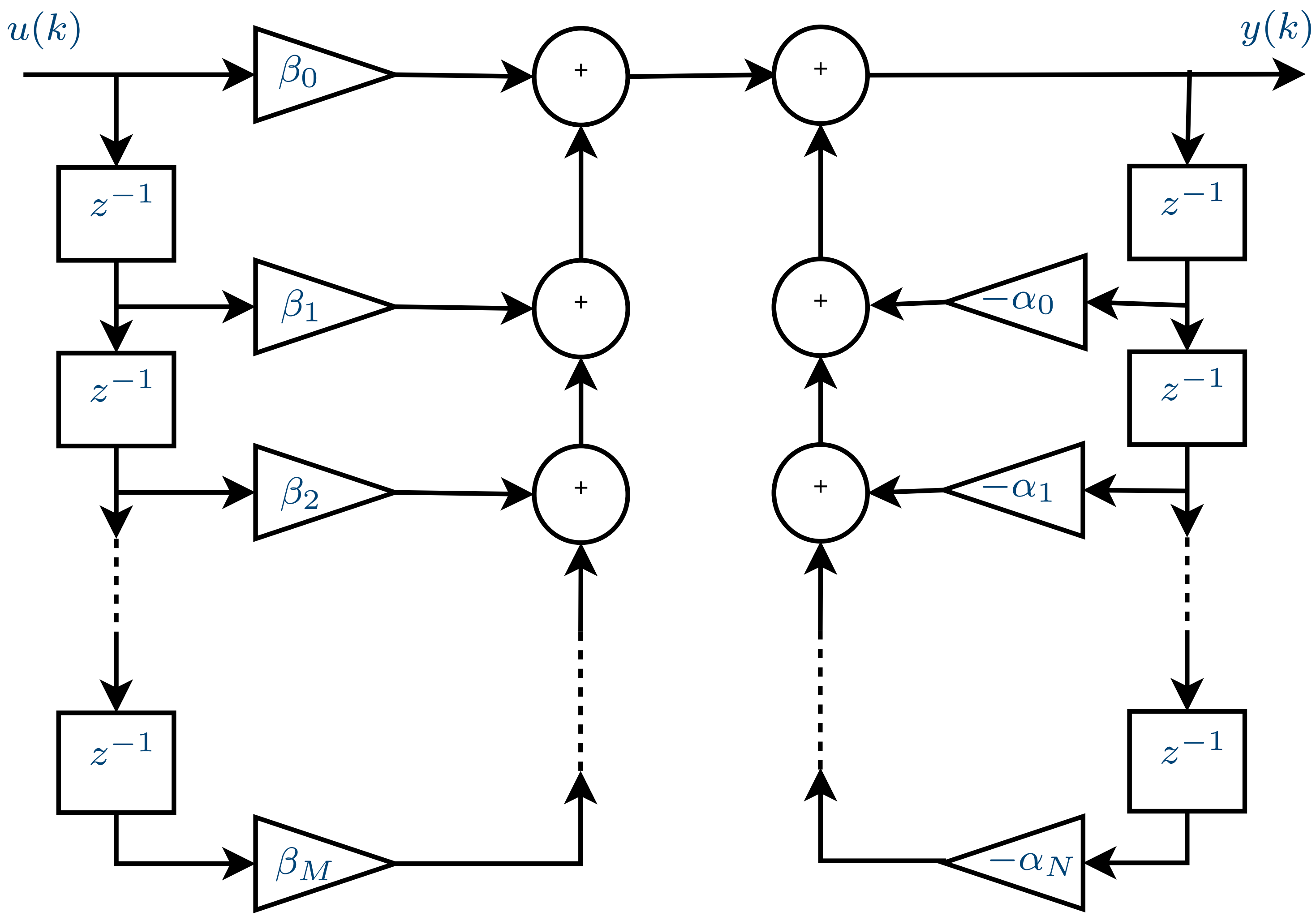


Schema realizzativo di un filtro MA



Schema realizzativo di un filtro AR

Schema a blocchi dei filtri ARMA



Schema realizzativo di un filtro ARMA

La risposta impulsiva

Usando il teorema della convoluzione è possibile dimostrare che

$$y(k) = h(k) * u(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(k-m)u(m)$$

Dove $h(k)$ è la risposta impulsiva del filtro, che può essere ottenuta antitrasformando la funzione di trasferimento $H(z)$

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z)\right] \quad \Leftrightarrow H(z) = \mathcal{Z}\left[h(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}\,.$$

Si noti che se $|u(k)| \leq L$ allora

$$|y(k)| \leq L \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)|$$

Quindi se la risposta impulsiva è assolutamente sommabile, ad una sequenza limitata in ingresso corrisponde una sequenza limitata in uscita (si noti che vale anche il teorema inverso: solo se la risposta impulsiva è assolutamente sommabile allora a qualsiasi sequenza d'ingresso limitata corrisponde una sequenza d'uscita limitata). In questo caso il sistema si dice stabile BIBO (Bounded Input Bounded Output).

La risposta impulsiva e la causalità

Un sistema si dice causale se la sua uscita all'istante k non dipende dai valori dell'ingresso assunti negli istanti $k+1$, $k+2$, $\ldots$. La causalità è una proprietà fondamentale per la fisica realizzabilità di un sistema.
Un sistema LTI è causale se e solo se

$$h(k) = 0\,, \qquad \forall k < 0\,. \tag{2}$$

In seguito considereremo solo filtri causali. Filtri non causali vengono presi in considerazione qualora un ritardo nella risposta del filtro sia accettabile, oppure quando la variabile indipendente k non rappresenta un tempo (ad esempio nella elaborazione di immagini).

Esempio di filtro digitale

Si consideri il filtro MA

$$y(k) = \frac{1}{3}\left(u(k) + u(k-1) + u(k-2)\right)$$

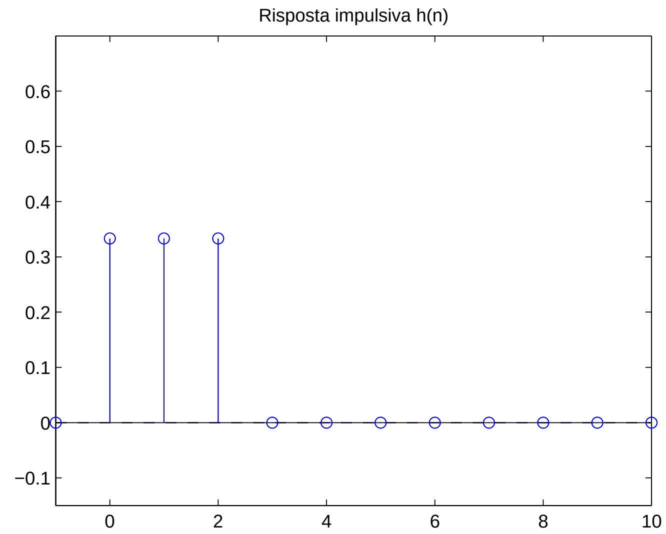
Questo filtro esegue la media sugli ultimi tre campioni dell'ingresso. In questo caso la funzione di trasferimento è data da

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{3} = \frac{z^2 + z + 1}{3z^2}$$

La risposta impulsiva è data da

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{3}\mathcal{Z}^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2}) \\ &= \frac{1}{3}(\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2)) \end{aligned}$$

Si noti che la risposta impulsiva ha durata finita.



Poli e zeri di un filtro digitale (1)

La funzione di trasferimento di un filtro digitale è una funzione razionale nella variabile z

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

- n è l'ordine del filtro
- le radici del polinomio $A(z)$ sono detti zeri del filtro
- le radici del polinomio $B(z)$ sono detti poli del filtro

La condizione di causalità comporta che il grado del numeratore sia minore, o al più uguale, a quello del denominatore. Se l'uscita all'istante k dipende anche dall'ingresso all'istante k, A e B avranno lo stesso grado, se invece l'uscita all'istante k dipende dai valori passati dell'ingresso, e non da quello presente, il grado di A sarà inferiore al grado di B. Se i polinomi A e B non hanno fattori comuni, in altre parole se non ci sono poli e zeri coincidenti, il filtro si dice in forma minima. In seguito assumeremo sempre che il filtro sia in forma minima.

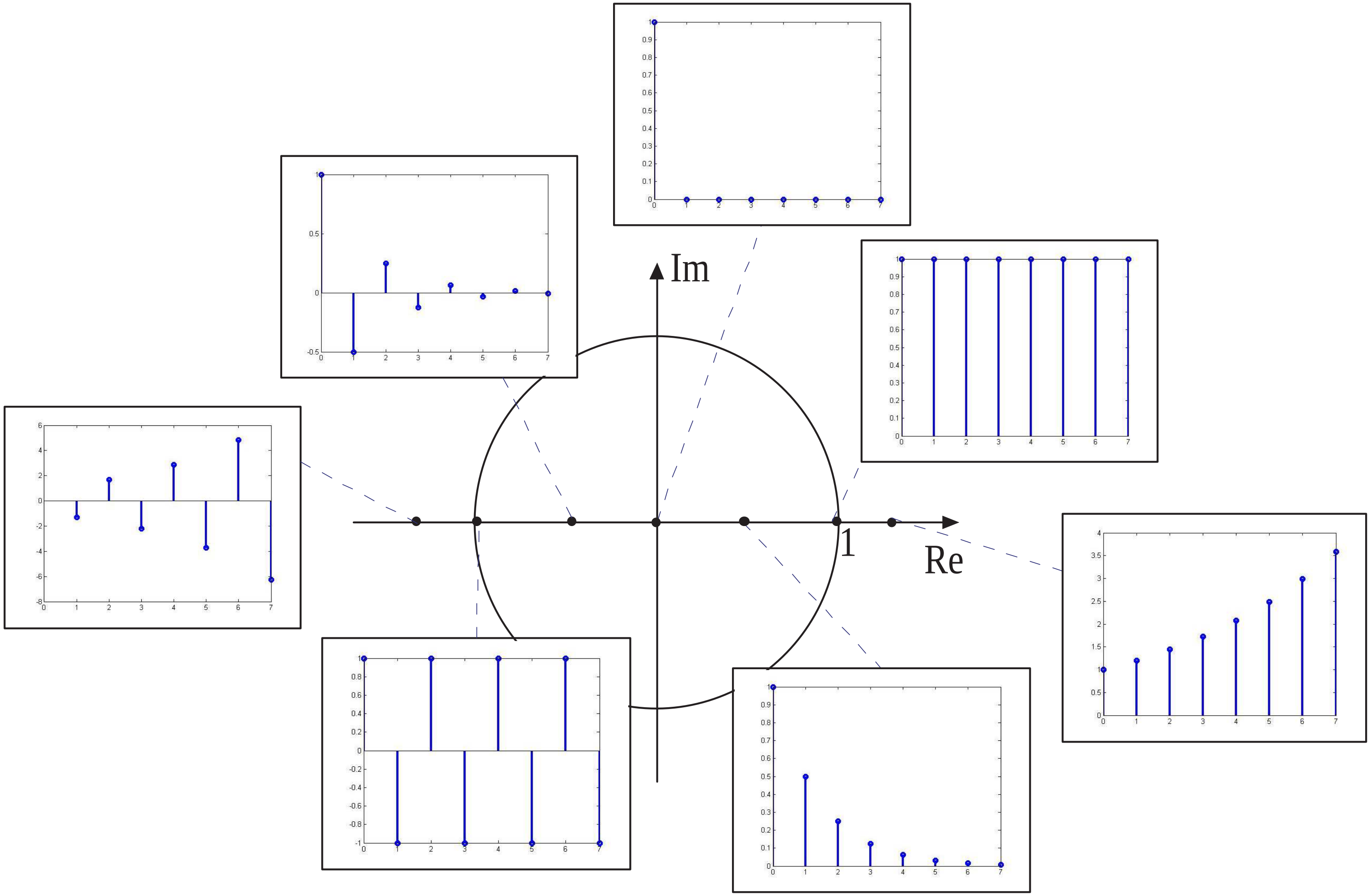
Poli e zeri di un filtro digitale (2)

I poli del sistema caratterizzano i modi di evoluzione naturale del sistema, che compaiono nell'evoluzione libera del sistema e nella risposta impulsiva. Assumendo per semplicità che tutte le radici del polinomio $B(z)$ siano distinte, ed indicando con λ_i le radici reali e con $\rho_i \mathrm{e}^{\pm j\theta_i}$ le coppie di radici complesse coniugate, la risposta impulsiva è infatti data da una combinazione lineare delle funzioni

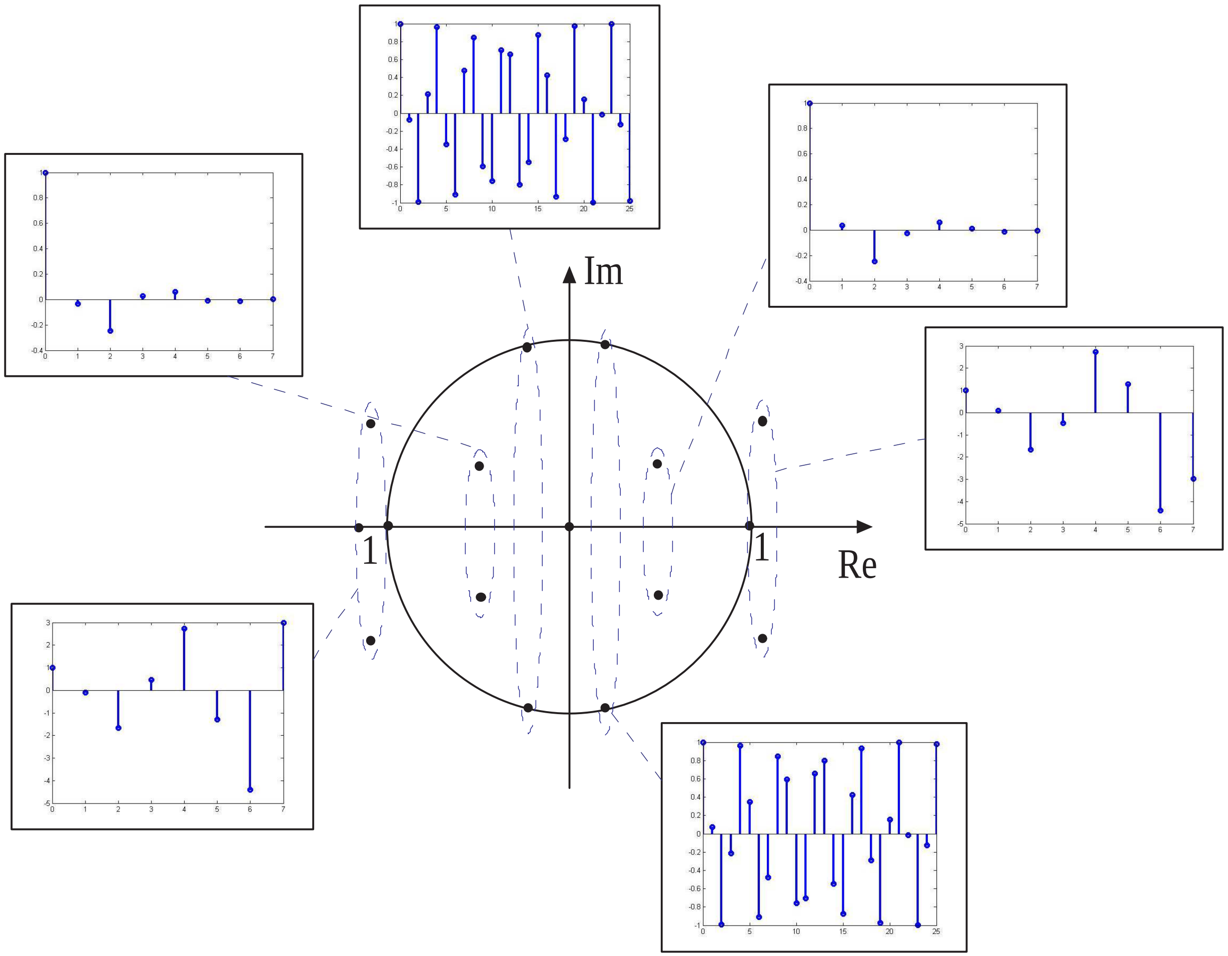
$$\lambda_i^k\,, \qquad \rho_i^k \cos(\theta_i k)\,, \qquad \rho_i^k \sin(\theta_i k)$$

Gli zeri del sistema determinamo l'ampiezza di ciascun modo all'interno della risposta impulsiva.
Si noti che perchè la risposta impulsiva sia assolutamente sommabile è necessario che tutte le radici del polinomio $B(z)$ abbiano modulo minore di 1. Quindi un filtro digitale sarà stabile BIBO se e solo se è verificata tale condizione.

Modi naturali legati a radici reali



Modi naturali legati a radici complesse



Filtri FIR

Un filtro si dice di tipo FIR (Finite Impulsive Response) di lunghezza N se la sua risposta impulsiva verifica la condizione

$$\exists N : \qquad h(k) = 0\,, \qquad \forall k \geq N\,,$$

in altre parole solo i primi N campioni (da $k = 0$ a $k = N - 1$) sono diversi da zero. In questo caso si ha:

$$h(k) = h(0)\delta(k) + h(1)\delta(k-1) + \cdots + h(N-1)\delta(k-N+1)$$

e quindi

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \cdots + h(N-1)z^{-N+1} = \frac{h(0)z^N + h(1)z^{N-1} + \dots h(N-1)}{z^{N-1}}$$

Un filtro FIR è quindi caratterizzato da $N-1$ poli tutti posti nell'origine (per cui esso è sempre un filtro stabile), e da zeri la cui posizione dipende dai valori assunti dalla risposta impulsiva. L'equazione ingresso-uscita si ricava facilmente a partire dalla funzione di trasferimento:

$$y(k) = h(0)u(k) + h(1)u(k-1) + \dots h(N)u(k-N+1)$$

I filtri FIR quindi coincidono con i filtri MA.

Filtri IIR

Un filtro si dice di tipo IIR (Infinite Impulsive Response), se la sua risposta impulsiva non ha durata limitata. Considerando il fatto che la risposta impulsiva può essere vista come una combinazione lineare dei modi naturali del sistema, si deduce immediatamente che se la funzione di trasferimento del filtro presenta anche un solo polo non locato nell'origine, il filtro sarà di tipo FIR.

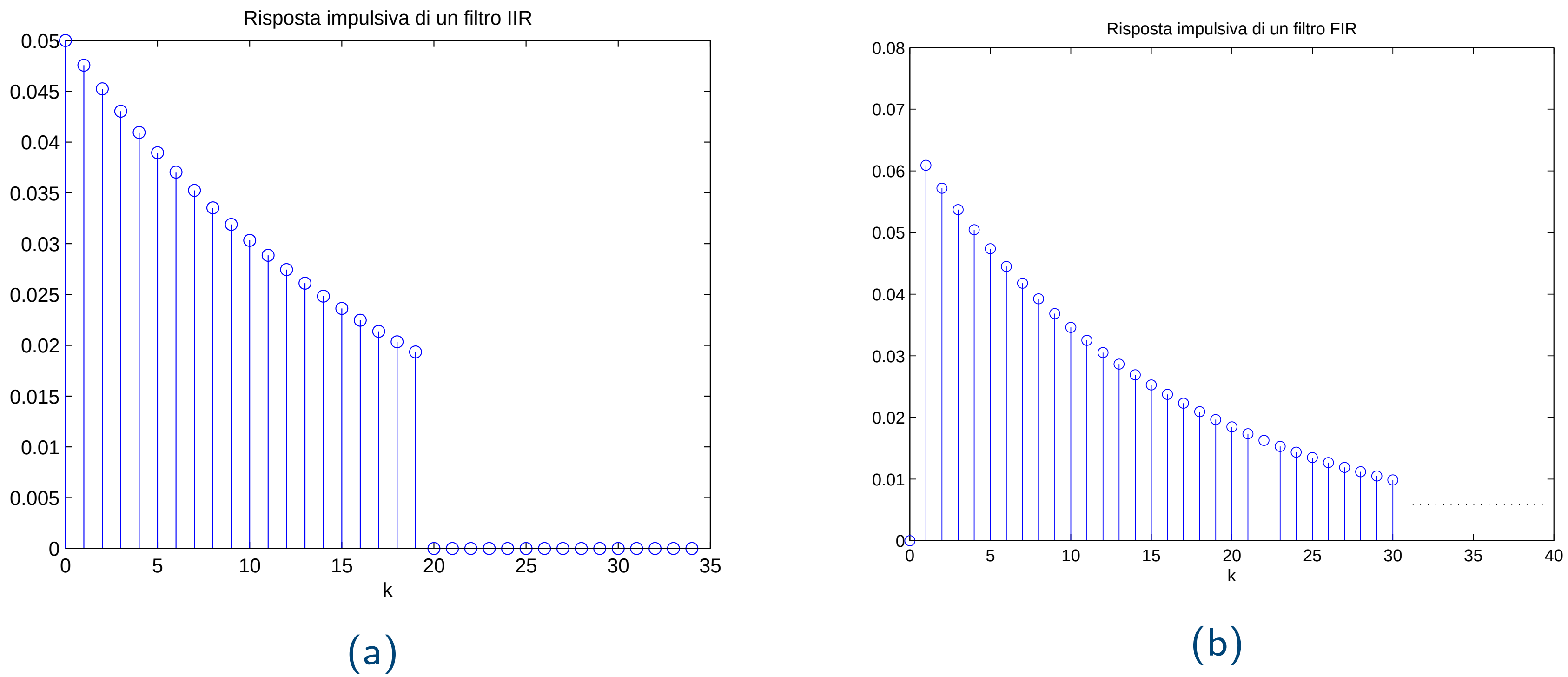


Figura 2: Esempi di risposta impulsiva di filtri FIR (a) e IIR (b)

Risposta in frequenza di un filtro

Nel dominio della trasformata di Fourier (discreta) il legame ingresso-uscita di un filtro LTI stabile si scrive

$$Y(\theta) = \widehat{H}(\theta)U(\theta)\,.$$

dove

$$\widehat{H}(\theta) = \left. H(z)\right|_{z=\mathrm{e}^{j\theta}} = H(\mathrm{e}^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\mathrm{e}^{-jk\theta}\,.$$

La risposta in frequenza consente di calcolare agevolmente la risposta ad un segnale di ingresso di tipo sinusoidale

$$u(k) = u_0 \sin(\theta_0 k + \varphi) \Rightarrow y(k) = u_0|H(\mathrm{e}^{j\theta_0})| \sin(\theta_0 k + \varphi + \angle H(\mathrm{e}^{j\theta_0}))$$

Si noti che:

- ✔ la funzione $H(\mathrm{e}^{j\theta})$ è una funzione persiodica di periodo 2π;

- ✔ la variabile indipendente θ rappresenta fisicamente una pulsazione, alternativamente si può considerare come variabile indipendente la frequenza $\upsilon = \frac{\theta}{2\pi}$. Come funzione della variabile υ la funzione H è periodica di periodo pari a 1

Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode forniscono una rappresentazione grafica della risposta in frequenza di un filtro. Sull'asse delle ascisse, in scala logaritmica, viene riportata la pulsazione, sull'asse delle ordinate sono riportati, rispettivamente, il modulo espresso in decibel (dB), e la fase. Siccome Modulo e fase sono funzioni periodiche di periodo 2π, ed inoltre esse sono, rispettivamente, una funzione pari ed una funzione dispari, i diagrammi di Bode possono essere tracciati solo per l'intervallo $\theta \in (0, \pi)$.

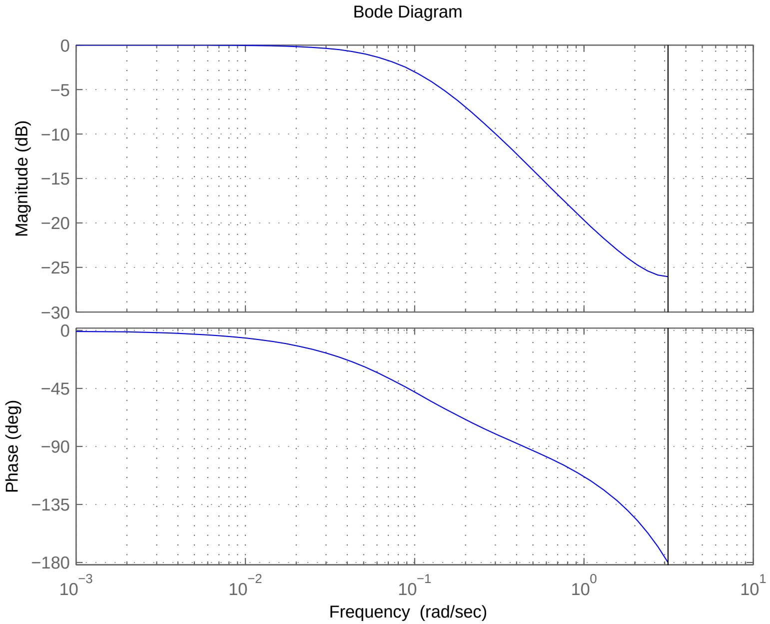


Figura 3: Tipico diagramma di Bode di un filtro del I^o ordine

Proprietà della fase lineare dei filtri FIR

Se un filtro FIR di lunghezza N soddisfa la proprietà di simmetria

$$h(k) = h(N-1-k) \qquad 0 \leq k \leq N-1\,,$$

allora la fase della risposta in frequenza risulterà essere una funzione lineare di θ nell'intervallo $(-\pi, \pi)$. Assumendo N dispari (per N pari il ragionamento è analogo) si ha infatti

$$\begin{aligned}
\widehat{H}(\theta) &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\mathrm{e}^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h(k)\mathrm{e}^{-j\theta k} + h(\frac{N-1}{2})\mathrm{e}^{-j\theta\frac{N-1}{2}} + \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(k)\mathrm{e}^{-j\theta k} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h(k)\mathrm{e}^{-j\theta k} + h(\frac{N-1}{2})\mathrm{e}^{-j\theta\frac{N-1}{2}} + \sum_{l=0}^{\frac{N-3}{2}} h(N-1-l)\mathrm{e}^{-j\theta(N-1-l)} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(k)\mathrm{e}^{-j\theta\frac{N-1}{2}}\cos(\theta(k-\frac{N-1}{2})) + h(\frac{N-1}{2})\mathrm{e}^{-j\theta\frac{N-1}{2}} \\
&= \mathrm{e}^{-j\theta\frac{N-1}{2}}\left[h(\frac{N-1}{2}) + 2\sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} h(k)\cos(\theta(k-\frac{N-1}{2}))\right] \Rightarrow \angle\widehat{H}(\theta) = -\frac{N-1}{2}\theta\,.
\end{aligned}$$

Risposta impulsiva ed in frequenza di un filtro FIR a fase lineare

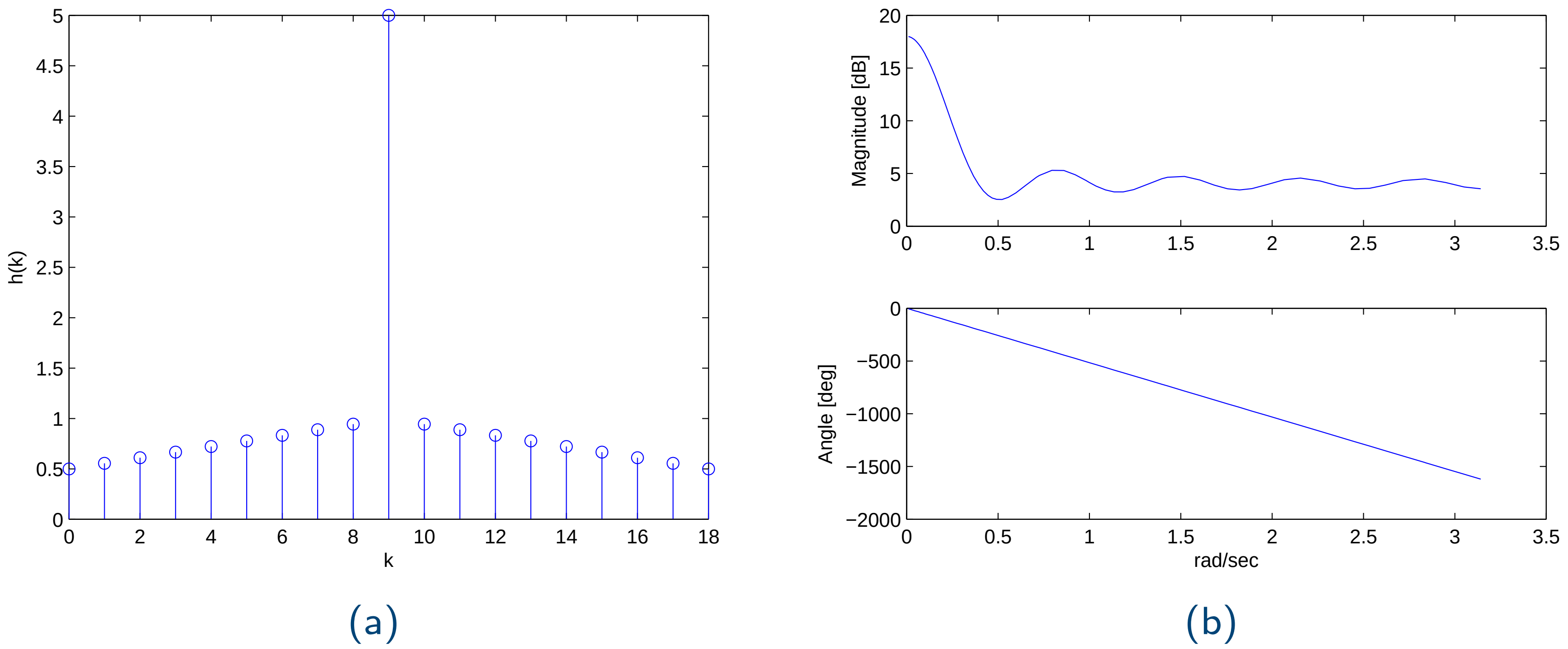


Figura 4: Risposta impulsiva ed in frequenza di un filtro FIR a fase lineare