

Geometria ed Algebra (D)  
luglio 2022

nome, cognome	
matricola	

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Q6	
Q7	
Q8	

- **quesito 1.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  una matrice fissata, e sia  $f: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  la funzione definita da

$$X \mapsto AX - XA.$$

- (a)  $f$  è iniettiva.
  - (b) Il nucleo di  $f$  ha dimensione 1.
  - (c)  $f$  ammette l'autovalore nullo.
- **quesito 2.** Sia  $(V, g)$  uno spazio vettoriale euclideo a dimensione finita.
    - (a) Due vettori  $u, v$  ortogonali sono linearmente indipendenti.
    - (b) Due vettori  $u, v$  sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti.
    - (c) Due vettori  $u, v$  linearmente indipendenti sono ortogonali.
  - **quesito 3.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  una matrice con almeno un autovalore nullo.
    - (a) si ha  $\det(A) = 0$ .
    - (b) si ha  $\text{Tr}(A) = 0$ .
    - (c)  $A$  è diagonalizzabile.
  - **quesito 4.** Sia  $S = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$  l'insieme delle matrici triangolari inferiori.
    - (a)  $S$  è un gruppo rispetto al prodotto matriciale.
    - (b)  $S$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n(n-1)/2$ .
    - (c)  $S$  è un anello, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto matriciale.
  - **quesito 5.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  la matrice che rappresenta l'azione di un endomorfismo  $f$  in  $\mathbb{R}^n$  rispetto ad una base arbitraria, con  $n \geq 3$ , e siano  $\{0, \pm 2\}$  tra i suoi autovalori
    - (a)  $f$  è iniettiva.
    - (b)  $f$  è diagonalizzabile.
    - (c) Il polinomio caratteristico  $p_A(\lambda)$  è divisibile per  $(\lambda^2 - 4)$ .
  - **quesito 6.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  iniettiva con  $\dim V = n$ , e sia  $A$  la sua matrice rappresentativa rispetto ad una base arbitraria di  $V$ .
    - (a)  $f$  ammette l'autovalore nullo.
    - (b) la traccia di  $A$  può essere nulla.
    - (c) il determinante di  $A$  può essere nullo.
  - **quesito 7.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ .
    - (a)  $A$  è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.
    - (b)  $A$  è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico  $p_A(\lambda)$  ammette tutte radici reali.
    - (c) Se  $A$  è diagonalizzabile, allora il suo polinomio caratteristico  $p_A(\lambda)$  ammette tutte radici reali.
  - **quesito 8.** Sia  $AX = B$  un sistema di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite, con  $n > m$ , e sia  $\text{rk}(A) = m - 1$ .
    - (a) L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale.
    - (b) Il sistema è compatibile.
    - (c) Il sistema è compatibile solo se il vettore colonna  $B$  dipende linearmente dai vettori colonna di  $A$ .

**Esercizio 1.**

- Definisci cosa sia un sistema lineare, ed enuncia il teorema di Rouché-Capelli.
- Considera il sistema lineare  $\Sigma$  (con  $a \in \mathbb{R}$ ) nelle incognite  $x, y, z, u, w$  dato da

$$\begin{cases} x + ay + u + az = 0 \\ z + u - 2y + aw = 0 \end{cases}$$

Determina lo spazio delle soluzioni di  $\Sigma$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ .

- Dimostra che lo spazio delle soluzioni  $S_\Sigma$  è uno spazio vettoriale
- Per un valore arbitrario di  $a$  a tua scelta, determina lo spazio  $S_\Sigma^\perp$  perpendicolare a  $S_\Sigma$  rispetto al prodotto scalare euclideo standard in  $\mathbb{R}^5$ , ed una base di  $S_\Sigma^\perp$ .

**Esercizio 2.**

- Definisci cosa sia uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , e cosa sia una base  $B$  per esso. Dimostra che ogni elemento di  $v \in V$  si può scrivere in modo univoco come combinazione lineare lungo  $B$ .
- Considera lo spazio vettoriale  $V = \mathbb{R}_2[x]$  dei polinomi in una variabile a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Esibisci una base per esso.
- Considera la funzione

$$f : p(x) \mapsto xp'(x) + ap''(x)$$

in  $V$ . Analizza, al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , se sia iniettiva e/o suriettiva. Per un valore di  $a$  a tua scelta, determina una base del suo nucleo e della sua immagine.

- Analizza, al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , se  $f$  sia diagonalizzabile. Scelto un valore di  $a$  per cui lo sia, determina una base di  $V$  composta da autovettori per  $f$ .

**Esercizio 3.**

- Definisci cosa sia un prodotto scalare euclideo in uno spazio vettoriale reale  $V$  a dimensione finita. Dimostra la disuguaglianza di Schwarz.
- Dimostra che, se  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  è una base di  $V$  data da vettori ortonormali rispetto a  $g$ , allora le componenti di un generico vettore  $u \in V$  rispetto a  $B$  sono date dal prodotto scalare  $g(u, u_j)$ .

- Se  $V = \mathbb{R}^3$ , determina le condizioni su  $a \in \mathbb{R}$  per cui la funzione

$$g : (x, y, z) \times (x', y', z') \quad \mapsto \quad a(xx' + yy' + zz') + (xy' + yx')$$

sia un prodotto scalare euclideo.

- Per una tua scelta di  $a$  che soddisfi questa condizione, determina una base di  $V$  ortogonale rispetto a  $g$ , e determina gli angoli fra i vettori della base canonica  $\mathcal{E}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 4.**

- Argomenta in dettaglio la dimostrazione di tre quesiti a tua scelta tra quelli del test iniziale.