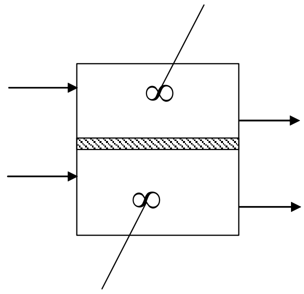
Principi di Ingegneria Chimica
7 settembre 2022

Problema 1



In applicazioni biotecnologiche e biomediche si utilizzano ossigenatori a membrana, in cui la soluzione da ossigenare non viene messa direttamente a contatto con la fase gassosa (aria o miscela contenente ossigeno), ma tra le due fasi viene interposta una membrana permeabile all'ossigeno.
Si consideri quindi l'apparecchiatura schematizzata in figura, costituita da due "camere" a perfetta miscelazione. La camera superiore (di volume V_G) è alimentata con una corrente gassosa avente portata volumetrica G contenente ossigeno in concentrazione $c_{G,IN}$, mentre la camera inferiore (di volume V_L) è alimentata con una corrente liquida (acquosa) avente portata volumetrica L contenente ossigeno in concentrazione $c_{L,IN}$. I coefficienti di trasporto dell'ossigeno in fase gas e in fase liquida sono, rispettivamente, $k_{c,G}$ e $k_{c,L}$, mentre D è il coefficiente di diffusione dell'ossigeno nella membrana (avente spessore δ e area superficiale A). Il coefficiente di partizione dell'ossigeno tra membrana e fase gas è k (definito come rapporto tra concentrazione nella membrana e quella in fase gas in condizioni di equilibrio), mentre unitario è il coefficiente di partizione membrana/liquido.
Sapendo che in fase liquida avviene una reazione che consuma ossigeno con cinetica del primo ordine (e costante cinetica k_1), si scrivano le equazioni di bilancio necessarie per la determinazione delle concentrazioni di ossigeno nella fase gassosa e liquida uscenti dall'apparecchiatura (in condizioni stazionarie), $c_{G,OUT}$ e $c_{L,OUT}$. Inoltre, si risolvano (simbolicamente) tali equazioni ricavando l'espressione di tali concentrazioni in funzione degli altri parametri (noti) del problema.

Problema 2

Si desidera recuperare completamente delle particelle solide di forma sferica presenti in un liquido di densità ρ e viscosità η. Il liquido riempie completamente un contenitore di altezza H e le sfere, disperse in maniera casuale all'interno dell'intero liquido, hanno un diametro compreso tra d_1 e d_2 e densità pari a ρ_s. Assumendo assenza di transitori (velocità terminale costante):
1) si determini: il tempo minimo necessario per completare la separazione di tutte le sferette;
2) affinché la presenza di eventuali transitori sia trascurabile, deve accadere che il tempo caratteristico per il raggiungimento della velocità terminale sia piccolo rispetto al tempo di sedimentazione delle sferette. Si stimi pertanto tale tempo caratteristico per una sferetta di diametro d_2.
Dati: $\rho = 1\ g/cm^3$; $\eta = 0.1\ poise$; $H = 20\ cm$; $d_1 = 0.1\ mm$; $d_2 = 1\ mm$; $\rho_s = 1.1\ g/cm^3$.

Soluzione

Problema 1

Si può prima di tutto scrivere un bilancio di materia sull'ossigeno scegliendo come volume di controllo l'intera apparecchiatura. Il bilancio, in condizioni stazionarie, include due termini di ingresso e due termini di uscita (relativi alle correnti liquide e gassose entranti e uscenti) ed un termine di consumo dovuto alla reazione in fase liquida, ed assume la seguente forma:

$$Gc_{G,IN} + Lc_{L,IN} = Gc_{G,OUT} + Lc_{L,OUT} + k_1 c_{L,OUT} V_L \qquad (1)$$

Tale equazione contiene le due incognite $c_{G,OUT}$ e $c_{L,OUT}$, e ad essa può essere accoppiato un bilancio sull'ossigeno o in fase gassosa o in fase liquida. Scegliendo di scrivere quello in fase gas, questo contiene un termine di ingresso e due termini di uscita:

$$Gc_{G,IN} = Gc_{G,OUT} + N \tag{2}$$

dove N è la portata di ossigeno che si trasferisce attraverso la membrana, risultante dalla combinazione di tre meccanismi di trasporto in serie: convezione in fase gas, diffusione nella membrana e convezione in fase liquida. In particolare, risulta (si consiglia come di consueto di fare un profilo qualitativo di concentrazione nelle varie fasi):

$$N = k_{c,G}\left(c_{G,OUT} - c_{G,I}\right)A = D\frac{kc_{G,I} - c_{L,I}}{\delta}A = k_{c,L}\left(c_{L,I} - c_{L,OUT}\right)A \tag{3}$$

dove $c_{G,I}$ è la concentrazione all'interfaccia gas-membrana (lato gas), e $c_{L,I}$ quella all'interfaccia membrana-liquido (su entrambi i lati essendo unitario il coefficiente di partizione. Come di consueto, queste concentrazioni all'interfaccia possono essere "eliminate" isolando le forze spingenti e sommando membro a membro (dopo avere moltiplicato la prima equazione per il coefficiente di partizione k). Si ottiene quindi la seguente espressione per la portata trasferita, in funzione della forza spingente globale $kc_{G,OUT} - c_{L,OUT}$:

$$N = \frac{1}{\frac{k}{k_{c,G}} + \frac{\delta}{D} + \frac{1}{k_{c,L}}}\left(kc_{G,OUT} - c_{L,OUT}\right)A = K_{c,L}\left(kc_{G,OUT} - c_{L,OUT}\right)A \tag{4}$$

in cui è stato anche definito il coefficiente globale di scambio (lato liquido) $K_{c,L}$. Sostituendo la (4) nella (2) si ottiene:

$$Gc_{G,IN} = Gc_{G,OUT} + K_{c,L}\left(kc_{G,OUT} - c_{L,OUT}\right)A \tag{5}$$

Le equazioni (1) e (5) rappresentano un sistema di due equazioni algebriche lineari nelle sole incognite $c_{G,OUT}$ e $c_{L,OUT}$ e possono essere risolte, ad esempio ricavando $c_{G,OUT}$ in funzione di $c_{L,OUT}$ dalla (1) e sostituendo il risultato nella (5) che così contiene la sola incognita $c_{L,OUT}$.

Problema 2

1) Il tempo minimo necessario alla separazione totale delle particelle è quello che permette alle particelle più lente e più lontane dal fondo (quindi quelle che si trovano sul pelo libero) di arrivare sul fondo del recipiente. Siccome la velocità di sedimentazione delle particelle è, a parità di tutte le altre condizioni, crescente al crescere del loro diametro, il tempo in questione è quello di sedimentazione delle particelle di diametro d_1. Tale tempo è dato da:

$$\mathrm{t}_1 = \frac{\mathrm{H}}{v_{1,\infty}} \tag{1}$$

dove $v_{1,\infty}$, per le ipotesi fatte, è la velocità terminale di sedimentazione.
Per determinare quest'ultima dobbiamo risolvere il bilancio di forze sulla particella:

$$\frac{\pi d_1^3}{6}(\rho_s - \rho)\mathrm{g} - c_D\frac{\pi\rho^2 v_{1,\infty}^2 d_1^2}{8} = 0 \tag{2}$$

Nella (2) il primo termine è la differenza tra forza peso e forza di Archimede e il secondo termine è la forza di attrito tra sfera e fluido. La (2) contiene come unica incognita la velocità di sedimentazione, essendo nascosta anche nel coefficiente di attrito c_D. Per risolverla dobbiamo ipotizzare il regime di flusso. Considerato il piccolo diametro e la grande viscosità, oltre che la piccola differenza di densità, ipotizziamo che il numero di Reynolds sia minore di uno e che quindi si possa supporre flusso puramente viscoso. In questo caso si ha:

$$\frac{\pi d_1^3}{6}(\rho_s - \rho)\mathrm{g} - 3\pi v_{1,\infty} d_1 \eta = 0 \tag{3}$$

da cui

$$v_{1,\infty} = \frac{d_1^2(\rho_s - \rho)\mathrm{g}}{18\eta} \approx \frac{10^{-4} \cdot 10^{-1} \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-1}} = 5.6 \cdot 10^{-3}\ cm/s \tag{4}$$

Siccome il numero di Reynolds vale $Re_1 = \frac{\rho v_{1,\infty} d_1}{\eta} \approx \frac{1 \cdot 5.6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} = 5.6 \cdot 10^{-4}$, l'ipotesi di moto puramente viscoso è valida, e si ottiene così dalla (1) il tempo di sedimentazione: $\mathrm{t}_1 \approx 3600\ s = 1h$.

2) La particella di diametro d_2 ha una velocità terminale (ipotizzando ancora moto viscoso, cosa che implica $v_\infty \propto d^2$, come si evince dalla eq 4) pari a

$$v_{2,\infty} = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_{1,\infty} = 10^2 \cdot 5.6 \cdot 10^{-3} = 0.56\ cm/s$$

che implica $Re_2 = \frac{\rho v_{2,\infty} d_2}{\eta} = \frac{1 \cdot 0.56 \cdot 0.1}{10^{-1}} = 0.56$. Questo significa che il moto sarà sempre puramente viscoso, dalla partenza al raggiungimento delle condizioni stazionarie. Con tale velocità il tempo di sedimentazione risulta essere $\mathrm{t}_2 = \frac{H}{v_{2,\infty}} \approx 36\ s$.
Per determinare il tempo caratteristico del transitorio scriviamo un bilancio di forze in transitorio:

$$\frac{\pi d_2^3}{6}(\rho_s - \rho)\mathrm{g} - 3\pi d_2 \eta v_2 = \frac{\pi d_2^3}{6} \rho_s \frac{dv_2}{dt} \tag{5}$$

da risolvere con la condizione iniziale $t = 0 \ \rightarrow \ v_{2,\infty} = 0$.
Dopo alcuni passaggi algebrici, usando la (4) che esprime la velocità terminale e considerando che:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{d(v_2 - v_{2\infty})}{dt} \tag{6}$$

la (5) può essere riscritta come:

$$\frac{\rho_s v_{2\infty}}{(\rho_s - \rho)g} \frac{d(v_2 - v_{2\infty})}{dt} = -(v_2 - v_{2\infty}) \tag{7}$$

Dalla (7) si evince che il tempo caratteristico del transitorio è dato da:

$$\tau = \frac{\rho_s v_{2\infty}}{(\rho_s - \rho)g} \approx \frac{1.1 \cdot 0.56}{10^{-1} \cdot 10^3} \approx 6 \cdot 10^{-3} s \tag{8}$$

ovvero molto più piccolo del tempo di sedimentazione.