

Proprietà delle funzioni analitiche

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli “Federico II”



Anno Accademico 2022/2023

Funzioni analitiche

- Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità
- Proprietà di media e principio di massimo modulo. Ulteriori proprietà
- Sviluppo di Laurent. Singolarità isolate. Olomorfia e singolarità all' ∞

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Sia f definita in Ω ; diremo che $z_0 \in \Omega$ è uno *zero* di f se in tale punto la funzione si annulla:

$$f(z_0) = 0.$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Sia f definita in Ω ; diremo che $z_0 \in \Omega$ è uno *zero* di f se in tale punto la funzione si annulla:

$$f(z_0) = 0.$$

Supponiamo ora f analitica in Ω , quindi indefinitamente derivabile. Diremo che z_0 è zero di ordine $N \in \mathbb{N}$ di f se

$$f(z_0) = \dots = f^{(N-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(N)}(z_0) \neq 0, \quad (1)$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Sia f definita in Ω ; diremo che $z_0 \in \Omega$ è uno *zero* di f se in tale punto la funzione si annulla:

$$f(z_0) = 0.$$

Supponiamo ora f analitica in Ω , quindi indefinitamente derivabile. Diremo che z_0 è zero di ordine $N \in \mathbb{N}$ di f se

$$f(z_0) = \dots = f^{(N-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(N)}(z_0) \neq 0, \quad (1)$$

cioè z_0 è zero di f , ma non annulla tutte le derivate, N essendo l'ordine della prima derivata di f diversa da 0 in z_0 .

Uno zero di ordine 1 è detto anche *zero semplice*.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Dunque, z_0 zero di ordine N di f significa che lo sviluppo di Taylor di f intorno a z_0 è

$$f(z) = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} (z - z_0)^N + \frac{f^{(N+1)}(z_0)}{(N+1)!} (z - z_0)^{N+1} + \dots,$$

essendo diverso da zero il coefficiente del primo termine.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Esempio

1) Il punto $z_0 = 0$ è zero semplice della funzione $\sin z$, poiché $D \sin z|_{z=z_0} \neq 0$.

Lo sviluppo di Mac Laurin, com'è noto, è

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \dots$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Esempio

1) Il punto $z_0 = 0$ è zero semplice della funzione $\sin z$, poiché $D \sin z|_{z=z_0} \neq 0$.

Lo sviluppo di Mac Laurin, com'è noto, è

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \dots$$

2) Il punto $z_0 = 0$ è zero doppio (di ordine 2) della funzione $f(z) = 1 - \cos z$, in quanto $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$.

Lo sviluppo di Mac Laurin è

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \frac{z^8}{40320} + \dots$$

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Uno zero di un certo ordine $N \in \mathbb{N}$ sarà detto *zero di ordine finito*.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Uno zero di un certo ordine $N \in \mathbb{N}$ sarà detto *zero di ordine finito*.

Diremo invece che z_0 è *zero di ordine infinito* se annulla f e tutte le derivate:

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n)}(z_0) = \cdots .$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Uno zero di un certo ordine $N \in \mathbb{N}$ sarà detto *zero di ordine finito*.

Diremo invece che z_0 è *zero di ordine infinito* se annulla f e tutte le derivate:

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n)}(z_0) = \cdots .$$

In realtà, vedremo che in presenza di uno zero di ordine infinito la situazione si banalizza.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Proposizione (Caratterizzazioni)

Sia f analitica in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e siano $z_0 \in \Omega$ e $N \in \mathbb{N}$.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Proposizione (Caratterizzazioni)

*Sia f analitica in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e siano $z_0 \in \Omega$ e $N \in \mathbb{N}$.
Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- 1 z_0 è zero di ordine N di f ;

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Proposizione (Caratterizzazioni)

*Sia f analitica in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e siano $z_0 \in \Omega$ e $N \in \mathbb{N}$.
Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- ❶ z_0 è zero di ordine N di f ;
- ❷ intorno a z_0 risulta

$$f(z) = (z - z_0)^N \varphi(z),$$

con φ analitica e priva di zeri;

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Proposizione (Caratterizzazioni)

*Sia f analitica in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e siano $z_0 \in \Omega$ e $N \in \mathbb{N}$.
Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- ❶ z_0 è zero di ordine N di f ;
- ❷ intorno a z_0 risulta

$$f(z) = (z - z_0)^N \varphi(z),$$

con φ analitica e priva di zeri;

- ❸ $\frac{f(z)}{(z - z_0)^N}$ converge per $z \rightarrow z_0$ ad un valore non nullo.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Ci limitiamo a $(1) \Rightarrow (2)$; le altre implicazioni seguono similmente.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Ci limitiamo a $(1) \Rightarrow (2)$; le altre implicazioni seguono similmente.

Sia z_0 zero di ordine N .

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Ci limitiamo a $(1) \Rightarrow (2)$; le altre implicazioni seguono similmente.

Sia z_0 zero di ordine N .

Come osservato, lo sviluppo di Taylor di f intorno a z_0 è

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^N \varphi(z), \quad (2)$$

dove abbiamo posto

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+N)}(z_0)}{(n+N)!} (z - z_0)^n.$$

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Essendo somma di una serie di potenze, φ è una funzione analitica intorno a z_0 e quindi in particolare continua in z_0 .

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Essendo somma di una serie di potenze, φ è una funzione analitica intorno a z_0 e quindi in particolare continua in z_0 .

Inoltre

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} \neq 0,$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Essendo somma di una serie di potenze, φ è una funzione analitica intorno a z_0 e quindi in particolare continua in z_0 .

Inoltre

$$\varphi(z_0) = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} \neq 0,$$

quindi $\varphi(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 .

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Esempio

Usando (3) $\Rightarrow$ (1) della proposizione 1 è immediato verificare che

$$f(z) = (1 - \cos z^2) \sin(e^{z^3} - 1)$$

ha in 0 uno zero di ordine 7:

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Esempio

Usando (3) $\Rightarrow$ (1) della proposizione 1 è immediato verificare che

$$f(z) = (1 - \cos z^2) \sin(e^{z^3} - 1)$$

ha in 0 uno zero di ordine 7:

Infatti è chiaro che

$$\frac{f(z)}{z^7} = \frac{1 - \cos z^2}{z^4} \cdot \frac{\sin(e^{z^3} - 1)}{z^3}$$

converge per $z \rightarrow 0$ e il limite è diverso da 0.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Corollario

Uno zero di ordine finito è isolato, cioè esiste un suo intorno nel quale non cadono altri zeri della funzione.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Corollario

Uno zero di ordine finito è isolato, cioè esiste un suo intorno nel quale non cadono altri zeri della funzione.

Ovviamente, invece, se z_0 è zero di ordine infinito, f si annulla in un intorno:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0,$$

essendo per ipotesi i coefficienti della serie tutti nulli.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Corollario

Uno zero di ordine finito è isolato, cioè esiste un suo intorno nel quale non cadono altri zeri della funzione.

Ovviamente, invece, se z_0 è zero di ordine infinito, f si annulla in un intorno:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0,$$

essendo per ipotesi i coefficienti della serie tutti nulli.

Se Ω è connesso, in realtà la funzione è identicamente nulla.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Proposizione

Se f è analitica nell'aperto connesso Ω ed ammette uno zero di ordine infinito, essa si annulla in ogni punto.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Proposizione

Se f è analitica nell'aperto connesso Ω ed ammette uno zero di ordine infinito, essa si annulla in ogni punto.

Per la dimostrazione, poniamo

$$A = \{\text{zeri di ordine infinito di } f\}, \quad B = \Omega - A.$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Proposizione

Se f è analitica nell'aperto connesso Ω ed ammette uno zero di ordine infinito, essa si annulla in ogni punto.

Per la dimostrazione, poniamo

$$A = \{\text{zeri di ordine infinito di } f\}, \quad B = \Omega - A.$$

Dunque $z_0 \in B$ significa che tale punto non annulla f , o è zero di ordine finito.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Proposizione

Se f è analitica nell'aperto connesso Ω ed ammette uno zero di ordine infinito, essa si annulla in ogni punto.

Per la dimostrazione, poniamo

$$A = \{\text{zeri di ordine infinito di } f\}, \quad B = \Omega - A.$$

Dunque $z_0 \in B$ significa che tale punto non annulla f , o è zero di ordine finito.

Mostriamo che A e B sono aperti.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

A è aperto:

come visto per ogni punto di A troviamo un intorno nel quale f è identicamente nulla, che è quindi formato da zeri di ordine infinito e dunque è contenuto in A .

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

A è aperto:

come visto per ogni punto di A troviamo un intorno nel quale f è identicamente nulla, che è quindi formato da zeri di ordine infinito e dunque è contenuto in A .

B è aperto:

se $z_0 \in B$, o $f(z_0) \neq 0$ e quindi per la continuità $f(z)$ rimane non nulla in un intorno,

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

A è aperto:

come visto per ogni punto di A troviamo un intorno nel quale f è identicamente nulla, che è quindi formato da zeri di ordine infinito e dunque è contenuto in A .

B è aperto:

se $z_0 \in B$, o $f(z_0) \neq 0$ e quindi per la continuità $f(z)$ rimane non nulla in un intorno,
oppure z_0 è zero di ordine finito e quindi isolato.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

A è aperto:

come visto per ogni punto di A troviamo un intorno nel quale f è identicamente nulla, che è quindi formato da zeri di ordine infinito e dunque è contenuto in A .

B è aperto:

se $z_0 \in B$, o $f(z_0) \neq 0$ e quindi per la continuità $f(z)$ rimane non nulla in un intorno,

oppure z_0 è zero di ordine finito e quindi isolato.

In ogni caso troviamo un intorno del punto in cui non cadono zeri di ordine infinito, quindi contenuto in B .

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Essendo evidentemente

$$\Omega = A \cup B \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset,$$

per l'ipotesi che Ω sia connesso, uno tra i due insiemi è vuoto.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Essendo evidentemente

$$\Omega = A \cup B \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset,$$

per l'ipotesi che Ω sia connesso, uno tra i due insiemi è vuoto.

Se f ha uno zero di ordine infinito, è $A \neq \emptyset$ e quindi $B = \emptyset$, cioè

$$\Omega = A,$$

vale a dire che ogni punto è zero (di ordine infinito).

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Essendo evidentemente

$$\Omega = A \cup B \quad \text{e} \quad A \cap B = \emptyset,$$

per l'ipotesi che Ω sia connesso, uno tra i due insiemi è vuoto.

Se f ha uno zero di ordine infinito, è $A \neq \emptyset$ e quindi $B = \emptyset$, cioè

$$\Omega = A,$$

vale a dire che ogni punto è zero (di ordine infinito).

Dal risultato precedente, segue il primo principio di identità.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Teorema (Il principio di identità delle funzioni analitiche)

Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se esiste un punto nel quale coincidono le due funzioni e ordinatamente tutte le derivate, le due funzioni coincidono ovunque.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Teorema (Il principio di identità delle funzioni analitiche)

Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se esiste un punto nel quale coincidono le due funzioni e ordinatamente tutte le derivate, le due funzioni coincidono ovunque.

Per ipotesi, esiste z_0 in cui risulta

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Evidentemente, il caso $g = 0$ è contenuto nella proposizione precedente.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Teorema (Il principio di identità delle funzioni analitiche)

Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se esiste un punto nel quale coincidono le due funzioni e ordinatamente tutte le derivate, le due funzioni coincidono ovunque.

Per ipotesi, esiste z_0 in cui risulta

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Evidentemente, il caso $g = 0$ è contenuto nella proposizione precedente.

Il caso generale segue da questo particolare, ragionando sulla differenza $f - g$, per la quale z_0 è zero di ordine infinito.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Dal primo principio si ricava il secondo.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Dal primo principio si ricava il secondo.

Teorema (Il principio di identità delle funzioni analitiche)

Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se l'insieme dei punti in cui le funzioni coincidono ammette un punto di accumulazione appartenente all'aperto, le due funzioni coincidono ovunque.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Dal primo principio si ricava il secondo.

Teorema (Il principio di identità delle funzioni analitiche)

Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se l'insieme dei punti in cui le funzioni coincidono ammette un punto di accumulazione appartenente all'aperto, le due funzioni coincidono ovunque.

Siano f e g funzioni analitiche in Ω aperto connesso. Per ipotesi, l'insieme

$$E = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

ha un punto di accumulazione $z_0 \in \Omega$.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Ovviamente E è l'insieme degli zeri della funzione differenza

$$h = f - g,$$

analitica in Ω .

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Ovviamente E è l'insieme degli zeri della funzione differenza

$$h = f - g,$$

analitica in Ω .

Il punto z_0 , essendo di analiticità e quindi di continuità, è zero di h .

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Ovviamente E è l'insieme degli zeri della funzione differenza

$$h = f - g,$$

analitica in Ω .

Il punto z_0 , essendo di analiticità e quindi di continuità, è zero di h .

Esso non è isolato, in quanto per costruzione in ogni suo intorno cadono infiniti punti di E , cioè zeri di h .

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Ovviamente E è l'insieme degli zeri della funzione differenza

$$h = f - g,$$

analitica in Ω .

Il punto z_0 , essendo di analiticità e quindi di continuità, è zero di h .

Esso non è isolato, in quanto per costruzione in ogni suo intorno cadono infiniti punti di E , cioè zeri di h .

Pertanto z_0 è zero di ordine infinito e, per il I principio, h è identicamente nulla, cioè f e g coincidono.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Osservazione

L'ipotesi che z_0 appartenga a Ω è essenziale per la conclusione.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Osservazione

L'ipotesi che z_0 appartenga a Ω è essenziale per la conclusione.

Ad esempio, la funzione

$$f(z) = \sin(1/z)$$

è analitica nell'aperto connesso $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Osservazione

L'ipotesi che z_0 appartenga a Ω è essenziale per la conclusione.

Ad esempio, la funzione

$$f(z) = \sin(1/z)$$

è analitica nell'aperto connesso $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$.

L'insieme degli zeri è formato dai reciproci dei numeri del tipo $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ed ammette $z_0 = 0$ come punto di accumulazione, che però non è di analiticità.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Osservazione

L'ipotesi che z_0 appartenga a Ω è essenziale per la conclusione.

Ad esempio, la funzione

$$f(z) = \sin(1/z)$$

è analitica nell'aperto connesso $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$.

L'insieme degli zeri è formato dai reciproci dei numeri del tipo $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ed ammette $z_0 = 0$ come punto di accumulazione, che però non è di analiticità.

Evidentemente f non è identicamente nulla in Ω .

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Come conseguenza dei risultati precedenti, abbiamo il seguente principio.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Come conseguenza dei risultati precedenti, abbiamo il seguente principio.

Teorema (Permanenza delle proprietà analitiche)

Una proprietà espressa da un'uguaglianza tra funzioni analitiche in un aperto connesso, che valga in un insieme dotato di punti di accumulazione appartenenti all'aperto, vale in tutto l'aperto.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Come conseguenza dei risultati precedenti, abbiamo il seguente principio.

Teorema (Permanenza delle proprietà analitiche)

Una proprietà espressa da un'uguaglianza tra funzioni analitiche in un aperto connesso, che valga in un insieme dotato di punti di accumulazione appartenenti all'aperto, vale in tutto l'aperto.

Esempio

Per il II principio di identità esiste un'unica estensione dell'esponenziale come funzione intera.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Esempio

Quando abbiamo esteso seno e coseno al campo complesso, abbiamo osservato che continua a valere la relazione fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La verifica si ottiene con un calcolo diretto.

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Esempio

Quando abbiamo esteso seno e coseno al campo complesso, abbiamo osservato che continua a valere la relazione fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La verifica si ottiene con un calcolo diretto.

Tale relazione segue anche dal principio di permanenza delle proprietà analitiche: essa consiste nell'uguaglianza tra le funzioni analitiche in $\mathbb{C}$

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z \quad \text{e} \quad g(z) = 1,$$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Esempio

Quando abbiamo esteso seno e coseno al campo complesso, abbiamo osservato che continua a valere la relazione fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La verifica si ottiene con un calcolo diretto.

Tale relazione segue anche dal principio di permanenza delle proprietà analitiche: essa consiste nell'uguaglianza tra le funzioni analitiche in $\mathbb{C}$

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z \quad \text{e} \quad g(z) = 1,$$

che è nota per $z = x \in \mathbb{R}$

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Esempio

Quando abbiamo esteso seno e coseno al campo complesso, abbiamo osservato che continua a valere la relazione fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La verifica si ottiene con un calcolo diretto.

Tale relazione segue anche dal principio di permanenza delle proprietà analitiche: essa consiste nell'uguaglianza tra le funzioni analitiche in $\mathbb{C}$

$$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z \quad \text{e} \quad g(z) = 1,$$

che è nota per $z = x \in \mathbb{R}$ e può essere estesa al piano complesso mediante il secondo principio di identità.

Zeri delle funzioni analitiche. Princìpi di identità

Esercizio

Sia z_0 zero di ordine $N > 1$ di f . Osservare che z_0 è zero di ordine $N - 1$ della derivata f' .

Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Esercizio

Sia z_0 zero di ordine $N > 1$ di f . Osservare che z_0 è zero di ordine $N - 1$ della derivata f' .

Esercizio

Mostrare che se z_0 è zero di ordine M di f e zero di ordine N di g , esso è zero di ordine $M + N$ del prodotto $f g$. Ad esempio, dire qual è l'ordine di $z_0 = 0$ come zero della funzione

$$f(z) = (e^z - 1)(1 - \cos z) \sin^2 z.$$

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come conseguenza della formula di Cauchy, ricaviamo la proprietà di media delle funzioni analitiche.

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come conseguenza della formula di Cauchy, ricaviamo la proprietà di media delle funzioni analitiche.

Teorema

Sia f una funzione analitica nell'aperto Ω . Se il cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r è contenuto in Ω , risulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) ds. \quad (3)$$

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come conseguenza della formula di Cauchy, ricaviamo la proprietà di media delle funzioni analitiche.

Teorema

Sia f una funzione analitica nell'aperto Ω . Se il cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r è contenuto in Ω , risulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) ds. \quad (3)$$

In (3) la quantità $2\pi r$ è la lunghezza della circonferenza di centro z_0 e raggio r , alla quale è esteso l'integrale, quindi a secondo membro figura l'integrale diviso per la lunghezza, cioè la media integrale di f : essa uguaglia il valore di f nel centro.

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Per la verifica di (3), applichiamo la formula di Cauchy a f sul cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r .

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Per la verifica di (3), applichiamo la formula di Cauchy a f sul cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r .

Una rappresentazione parametrica della circonferenza è
 $z = z_0 + r e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Per la verifica di (3), applichiamo la formula di Cauchy a f sul cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r .

Una rappresentazione parametrica della circonferenza è $z = z_0 + r e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{jt})}{r e^{jt}} j r e^{jt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{jt}) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) ds, \end{aligned}$$

poiché $r dt = ds$.

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Dalla proprietà di media ricaviamo il seguente

Teorema (Principio di massimo modulo)

Sia f olomorfa nell'aperto connesso Ω . Se f non è costante, $|f|$ è privo di massimi relativi.

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Dalla proprietà di media ricaviamo il seguente

Teorema (Principio di massimo modulo)

Sia f olomorfa nell'aperto connesso Ω . Se f non è costante, $|f|$ è privo di massimi relativi.

Mostriamo che, se $|f|$ ha un massimo relativo, f risulta costante.

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Dalla proprietà di media ricaviamo il seguente

Teorema (Principio di massimo modulo)

Sia f olomorfa nell'aperto connesso Ω . Se f non è costante, $|f|$ è privo di massimi relativi.

Mostriamo che, se $|f|$ ha un massimo relativo, f risulta costante.

Sia dunque $z_0 \in \Omega$ punto di massimo relativo per $|f|$: esiste quindi un intorno di tale punto nel quale $|f|$ assume valori non superiori a $|f(z_0)|$, vale a dire che per $r > 0$ opportuno risulta

$$|z - z_0| < r \quad \Rightarrow \quad z \in \Omega \quad \text{e} \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|. \quad (4)$$

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Per la proprietà di media, se $0 < \rho < r$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z_0)| \, ds &= 2\pi\rho |f(z_0)| = \left| \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \, ds \right| \\ &\leq \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| \, ds \end{aligned}$$

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Per la proprietà di media, se $0 < \rho < r$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z_0)| \, ds &= 2\pi\rho |f(z_0)| = \left| \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \, ds \right| \\ &\leq \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| \, ds \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (|f(z)| - |f(z_0)|) \, ds \geq 0.$$

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Per la proprietà di media, se $0 < \rho < r$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z_0)| \, ds &= 2\pi\rho |f(z_0)| = \left| \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \, ds \right| \\ &\leq \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| \, ds \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (|f(z)| - |f(z_0)|) \, ds \geq 0.$$

Per (4) l'integrando è non-positivo, quindi esso è identicamente nullo, cioè

$$|f(z)| \equiv |f(z_0)|$$

sulla circonferenza di centro z_0 e raggio ρ . Per l'arbitrarietà di $\rho < r$, risulta $|f|$ costante nel cerchio di centro z_0 e raggio r .

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come sappiamo, per l'olomorfia, sul cerchio

$$|f| \text{ costante} \Rightarrow f \text{ costante,}$$

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come sappiamo, per l'olomorfia, sul cerchio

$$|f| \text{ costante} \Rightarrow f \text{ costante},$$

quindi, per il secondo principio di identità, f è costante in Ω .

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come sappiamo, per l'olomorfia, sul cerchio

$$|f| \text{ costante} \Rightarrow f \text{ costante},$$

quindi, per il secondo principio di identità, f è costante in Ω .

Dal teorema precedente ricaviamo subito

Teorema

Se f è continua in un dominio limitato ed olomorfa nei punti interni, il massimo di $|f|$ è assunto sulla frontiera.

Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come sappiamo, per l'olomorfia, sul cerchio

$$|f| \text{ costante} \Rightarrow f \text{ costante},$$

quindi, per il secondo principio di identità, f è costante in Ω .

Dal teorema precedente ricaviamo subito

Teorema

Se f è continua in un dominio limitato ed olomorfa nei punti interni, il massimo di $|f|$ è assunto sulla frontiera.

Osserviamo che il massimo esiste essendo $|f|$ continua su un compatto. Detto D il dominio, la tesi vuol dire che risulta $\forall z \in D$

$$|f(z)| \leq \max_{FD} |f|.$$

Ulteriori proprietà

Se f è una funzione intera, possiamo svilupparla in serie di Mac Laurin:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

dove

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

con $r > 0$ arbitrario.

Ulteriori proprietà

Se f è una funzione intera, possiamo svilupparla in serie di Mac Laurin:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

dove

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

con $r > 0$ arbitrario.

Ne segue

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| ds \leq \frac{M_r}{r^n}, \quad (5)$$

essendo $M_r = \max_{|z|=r} |f(z)|$. (Le (5) sono dette *disuguaglianze di Cauchy*.)

Ulteriori proprietà

Una immediata applicazione delle (5) è il seguente

Teorema (di Liouville)

Ogni funzione intera limitata è costante.

Ulteriori proprietà

Una immediata applicazione delle (5) è il seguente

Teorema (di Liouville)

Ogni funzione intera limitata è costante.

Poiché f è limitata, possiamo maggiorare $M_r \leq M$, indipendentemente da r , quindi dalle (5) otteniamo

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad \forall r > 0.$$

Ulteriori proprietà

Una immediata applicazione delle (5) è il seguente

Teorema (di Liouville)

Ogni funzione intera limitata è costante.

Poiché f è limitata, possiamo maggiorare $M_r \leq M$, indipendentemente da r , quindi dalle (5) otteniamo

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad \forall r > 0.$$

Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, otteniamo $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, quindi

$$f(z) = a_0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ricordiamo che l'impossibilità di risolvere in campo reale una generica equazione algebrica è stata la nostra motivazione per la costruzione del campo complesso.

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ricordiamo che l'impossibilità di risolvere in campo reale una generica equazione algebrica è stata la nostra motivazione per la costruzione del campo complesso.

Sia P un polinomio di grado positivo.

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ricordiamo che l'impossibilità di risolvere in campo reale una generica equazione algebrica è stata la nostra motivazione per la costruzione del campo complesso.

Sia P un polinomio di grado positivo. Per assurdo, supponiamo $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ricordiamo che l'impossibilità di risolvere in campo reale una generica equazione algebrica è stata la nostra motivazione per la costruzione del campo complesso.

Sia P un polinomio di grado positivo. Per assurdo, supponiamo $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Ne segue che $f = 1/P$ è una funzione intera.

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ricordiamo che l'impossibilità di risolvere in campo reale una generica equazione algebrica è stata la nostra motivazione per la costruzione del campo complesso.

Sia P un polinomio di grado positivo. Per assurdo, supponiamo $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Ne segue che $f = 1/P$ è una funzione intera. Inoltre, essendo $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$, risulta $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ e f è limitata.

Ulteriori proprietà

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

Teorema (fondamentale dell'Algebra)

Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.

Ricordiamo che l'impossibilità di risolvere in campo reale una generica equazione algebrica è stata la nostra motivazione per la costruzione del campo complesso.

Sia P un polinomio di grado positivo. Per assurdo, supponiamo $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Ne segue che $f = 1/P$ è una funzione intera. Inoltre, essendo $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$, risulta $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ e f è limitata. Per il teorema di Liouville, f è costante, quindi tale risulta pure P , contro il fatto che esso ha grado positivo.

Sviluppo di Laurent

Abbiamo visto l'analiticità delle funzioni olomorfe, cioè la sviluppabilità in serie di Taylor, lo sviluppo valendo in ogni cerchio contenuto nell'aperto di olomorfia.

Sviluppo di Laurent

Abbiamo visto l'analiticità delle funzioni olomorfe, cioè la sviluppabilità in serie di Taylor, lo sviluppo valendo in ogni cerchio contenuto nell'aperto di olomorfia.

Mettiamo ora in luce uno sviluppo più generale, che consentirà di rappresentare una funzione olomorfa mediante una *serie bilatera* di potenze, anche in situazioni in cui lo sviluppo di Taylor non è applicabile.

Sviluppo di Laurent

Una serie bilatera di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è fissato e i coefficienti c_n sono assegnati numeri complessi.

Sviluppo di Laurent

Una serie bilatera di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è fissato e i coefficienti c_n sono assegnati numeri complessi.

Compaiono dunque in generale anche potenze di $z - z_0$ con esponente negativo.

Sviluppo di Laurent

Una serie bilatera di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è fissato e i coefficienti c_n sono assegnati numeri complessi.

Compaiono dunque in generale anche potenze di $z - z_0$ con esponente negativo.

Se $c_n = 0, \forall n < 0$, la serie si riduce ad una ordinaria serie di potenze.

Sviluppo di Laurent

Diremo che la serie bilatera (6) converge se risulta convergente ciascuna delle due serie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (7)$$

Sviluppo di Laurent

Diremo che la serie bilatera (6) converge se risulta convergente ciascuna delle due serie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (7)$$

e in tal caso porremo chiaramente

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \right).$$

Sviluppo di Laurent

La seconda serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Sviluppo di Laurent

La seconda serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

è un'ordinaria serie di potenze di punto iniziale z_0 , quindi converge in un cerchio di centro z_0 , cioè per

$$|z - z_0| < R, \quad \text{con } R \in]0, +\infty].$$

Sviluppo di Laurent

La seconda serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

è un'ordinaria serie di potenze di punto iniziale z_0 , quindi converge in un cerchio di centro z_0 , cioè per

$$|z - z_0| < R, \quad \text{con } R \in]0, +\infty].$$

La prima serie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n$$

è una serie di potenze in $1/(z - z_0)$, quindi converge per

$$|z - z_0| > r, \quad \text{dove } r \in [0, +\infty[.$$

Sviluppo di Laurent

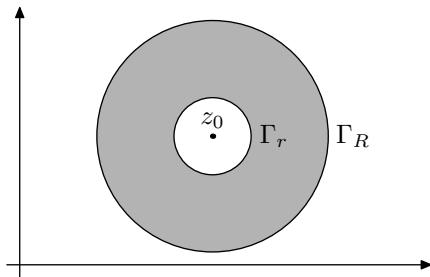
Noi supporremo $r < R$, in modo che la serie bilatera converga nella corona circolare

$$r < |z - z_0| < R.$$

Sviluppo di Laurent

Noi supporremo $r < R$, in modo che la serie bilatera converga nella corona circolare

$$r < |z - z_0| < R.$$



Sviluppo di Laurent

Più precisamente, le due serie (7) convergono totalmente in ogni corona circolare del tipo

$$r' \leq |z - z_0| \leq R' ,$$

con $r < r' < R' < R$, e quindi la (6) può essere integrata termine a termine.

Sviluppo di Laurent

Più precisamente, le due serie (7) convergono totalmente in ogni corona circolare del tipo

$$r' \leq |z - z_0| \leq R',$$

con $r < r' < R' < R$, e quindi la (6) può essere integrata termine a termine.

Una serie bilatera può essere altresì derivata termine a termine nei punti interni alla corona circolare in cui converge.

Sviluppo di Laurent

Più precisamente, le due serie (7) convergono totalmente in ogni corona circolare del tipo

$$r' \leq |z - z_0| \leq R',$$

con $r < r' < R' < R$, e quindi la (6) può essere integrata termine a termine.

Una serie bilatera può essere altresì derivata termine a termine nei punti interni alla corona circolare in cui converge.

Mostriamo la possibilità di sviluppare in serie bilatera di potenze una funzione olomorfa in una corona circolare.

Sviluppo di Laurent

Teorema (Sviluppo di Laurent)

Sia f olomorfa nella corona circolare di centro z_0 determinata dalle disuguaglianze $r \leq |z - z_0| \leq R$, dove $0 < r < R < +\infty$. In questa ipotesi, esistono dei coefficienti c_n complessi in modo che risulti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \quad (8)$$

Sviluppo di Laurent

Teorema (Sviluppo di Laurent)

Sia f olomorfa nella corona circolare di centro z_0 determinata dalle disuguaglianze $r \leq |z - z_0| \leq R$, dove $0 < r < R < +\infty$. In questa ipotesi, esistono dei coefficienti c_n complessi in modo che risulti

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \quad (8)$$

Ricordiamo che l'ipotesi significa che esiste un aperto Ω contenente la corona circolare chiusa (cioè comprendente le due circonferenze che la delimitano), nel quale f è olomorfa.

Sviluppo di Laurent

La dimostrazione è analoga a quella dell'analiticità.

Sviluppo di Laurent

La dimostrazione è analoga a quella dell'analiticità.

Diciamo D la corona circolare, Γ_r e Γ_R le due circonferenze che la delimitano e rappresentiamo f nei punti interni mediante la formula di Cauchy.

Sviluppo di Laurent

La dimostrazione è analoga a quella dell'analiticità.

Diciamo D la corona circolare, Γ_r e Γ_R le due circonferenze che la delimitano e rappresentiamo f nei punti interni mediante la formula di Cauchy.

Osserviamo che $+FD = \Gamma_R \cup (-\Gamma_r)$, quindi per $r < |z - z_0| < R$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{+FD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \tag{9}$$

Sviluppo di Laurent

Procedendo esattamente come per lo sviluppo di Taylor, il primo integrale nell'ultimo membro si scrive

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

avendo posto $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (10)$$

Sviluppo di Laurent

Per trattare il secondo integrale nell'ultimo membro della (9), procediamo analogamente.

Sviluppo di Laurent

Per trattare il secondo integrale nell'ultimo membro della (9), procediamo analogamente.

Essendo in tale integrale $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$, possiamo scrivere

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)}$$

Sviluppo di Laurent

Per trattare il secondo integrale nell'ultimo membro della (9), procediamo analogamente.

Essendo in tale integrale $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\end{aligned}$$

Sviluppo di Laurent

Per trattare il secondo integrale nell'ultimo membro della (9), procediamo analogamente.

Essendo in tale integrale $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} \\&= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}\end{aligned}$$

Sviluppo di Laurent

Posto $n = -(m + 1)$, ovvero $m = -(n + 1)$, abbiamo

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Sviluppo di Laurent

Posto $n = -(m + 1)$, ovvero $m = -(n + 1)$, abbiamo

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Dunque

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z - z_0)^n,$$

Sviluppo di Laurent

Posto $n = -(m + 1)$, ovvero $m = -(n + 1)$, abbiamo

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Dunque

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z - z_0)^n,$$

dove per $n = -1, -2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (11)$$

Sviluppo di Laurent

Pertanto otteniamo l'uguaglianza (8) ponendo $c_n = a_n$, per $n \geq 0$,
e $c_n = b_n$, per $n < 0$.

Sviluppo di Laurent

Pertanto otteniamo l'uguaglianza (8) ponendo $c_n = a_n$, per $n \geq 0$, e $c_n = b_n$, per $n < 0$.

Le formule (10) e (11) per a_n e b_n sono molto simili, l'unica differenza essendo nella circonferenza su cui si integra.

Sviluppo di Laurent

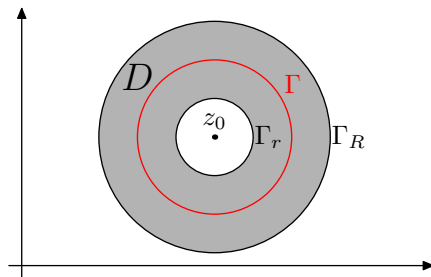
Pertanto otteniamo l'uguaglianza (8) ponendo $c_n = a_n$, per $n \geq 0$, e $c_n = b_n$, per $n < 0$.

Le formule (10) e (11) per a_n e b_n sono molto simili, l'unica differenza essendo nella circonferenza su cui si integra.

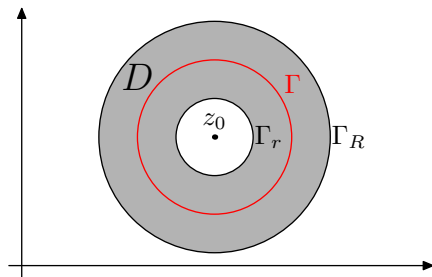
Poiché in entrambi i casi l'integrando è olomorfo nella corona circolare, in ciascun integrale possiamo sostituire la circonferenza di integrazione con un'altra Γ , di centro z_0 , intermedia, cioè di raggio ρ con $r \leq \rho \leq R$, ottenendo $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (12)$$

Sviluppo di Laurent



Sviluppo di Laurent



Ad esempio, per passare da Γ_R a Γ applichiamo il teorema di Cauchy sulla corona circolare delimitata dalle due circonferenze.

Sviluppo di Laurent

Quando faremo riferimento allo sviluppo di Laurent di f nella corona circolare, intenderemo l'uguaglianza (8), con i coefficienti dati dalle (12).

Sviluppo di Laurent

Quando faremo riferimento allo sviluppo di Laurent di f nella corona circolare, intenderemo l'uguaglianza (8), con i coefficienti dati dalle (12).

In effetti, lo sviluppo di Laurent è l'unico mediante il quale si può rappresentare una funzione olomorfa in una corona circolare in serie bilatera.

Sviluppo di Laurent

Proposizione (Principio di identità delle serie bilatere di potenze)

Se le due serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

convergono in una stessa corona circolare di centro z_0 (dotata di punti interni) e hanno la medesima somma, esse sono identiche, cioè risulta

$$c_n = d_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sviluppo di Laurent

Per la verifica, poniamo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

per $r \leq |z - z_0| \leq R$, con $0 < r < R < +\infty$ opportuni, e facciamo vedere che i coefficienti d_n coincidono con i coefficienti c_n dello sviluppo di Laurent di f nella corona, dati dalle formule (12).

Sviluppo di Laurent

Infatti, per $k \in \mathbb{Z}$ fissato, abbiamo

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz = d_k \end{aligned}$$

Sviluppo di Laurent

Infatti, per $k \in \mathbb{Z}$ fissato, abbiamo

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz = d_k \end{aligned}$$

in quanto, come abbiamo visto,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ 1, & \text{se } n = k \end{cases}$$

Sviluppo di Laurent

Esaminiamo ora alcune situazioni frequenti in cui useremo lo sviluppo di Laurent per studiare una funzione f olomorfa intorno ad un punto z_0 .

Sviluppo di Laurent

Esaminiamo ora alcune situazioni frequenti in cui useremo lo sviluppo di Laurent per studiare una funzione f olomorfa intorno ad un punto z_0 .

Il primo caso che consideriamo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$ (compreso il punto z_0).

Sviluppo di Laurent

Esaminiamo ora alcune situazioni frequenti in cui useremo lo sviluppo di Laurent per studiare una funzione f olomorfa intorno ad un punto z_0 .

Il primo caso che consideriamo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$ (compreso il punto z_0).

Possiamo allora considerare una corona circolare di centro z_0 descritta dalle disuguaglianze

$$r \leq |z - z_0| \leq R,$$

con R fissato e $r > 0$ arbitrariamente piccolo, e scrivere lo sviluppo di Laurent di f in tale corona.

Sviluppo di Laurent

Osserviamo che i coefficienti non dipendono da r .

Sviluppo di Laurent

Osserviamo che i coefficienti non dipendono da r .

Inoltre, per il teorema di Cauchy, risulta

$$c_n = 0, \quad n < 0,$$

essendo per tali indici le funzioni

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = f(\zeta) (\zeta - z_0)^{-n-1}$$

olomorfe intorno a z_0 , e lo sviluppo si riduce a quello di Taylor. (Questo segue pure in base al principio di identità delle serie bilatere.)

Sviluppo di Laurent

Il caso successivo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$, escluso il punto z_0 , cioè in un cerchio bucato privandolo del centro.

Sviluppo di Laurent

Il caso successivo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$, escluso il punto z_0 , cioè in un cerchio bucato privandolo del centro.

In questo caso, con le corone circolari del tipo

$$r \leq |z - z_0| \leq R$$

per $r \rightarrow 0$ invadiamo tutto il cerchio bucato

$$0 < |z - z_0| \leq R.$$

Sviluppo di Laurent

Il caso successivo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$, escluso il punto z_0 , cioè in un cerchio bucato privandolo del centro.

In questo caso, con le corone circolari del tipo

$$r \leq |z - z_0| \leq R$$

per $r \rightarrow 0$ invadiamo tutto il cerchio bucato

$$0 < |z - z_0| \leq R.$$

Troviamo pertanto che lo sviluppo vale in tale insieme e, come vedremo, permetterà di studiare la funzione intorno a z_0 .

Sviluppo di Laurent

Un altro caso è quello di una funzione f olomorfa in un intorno del punto ∞ .

Sviluppo di Laurent

Un altro caso è quello di una funzione f olomorfa in un intorno del punto ∞ .

Consideriamo ora corone circolari di centro 0, del tipo

$$r \leq |z| \leq R,$$

con $r > 0$ fissato e $R \rightarrow +\infty$.

Sviluppo di Laurent

Un altro caso è quello di una funzione f olomorfa in un intorno del punto ∞ .

Consideriamo ora corone circolari di centro 0, del tipo

$$r \leq |z| \leq R,$$

con $r > 0$ fissato e $R \rightarrow +\infty$.

In questo modo otteniamo lo sviluppo per $r \leq |z|$, che useremo per studiare f intorno a ∞ .

Sviluppo di Laurent

Una funzione olomorfa è rappresentabile mediante serie di Laurent in ogni corona circolare contenuta nell'aperto di olomorfia.

Sviluppo di Laurent

Una funzione olomorfa è rappresentabile mediante serie di Laurent in ogni corona circolare contenuta nell'aperto di olomorfia.

Fissato il centro, per una stessa funzione possono esserci diverse corone circolari con tale proprietà.

Sviluppo di Laurent

Una funzione olomorfa è rappresentabile mediante serie di Laurent in ogni corona circolare contenuta nell'aperto di olomorfia.

Fissato il centro, per una stessa funzione possono esserci diverse corone circolari con tale proprietà.

Esempio

La funzione

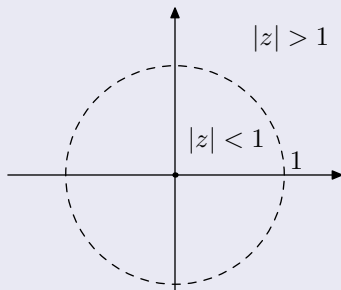
$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

è olomorfa in $\mathbb{C} - \{1\}$; può essere sviluppata in serie di Laurent in due corone circolari di centro 0:

- a) il cerchio $|z| < 1$,
- b) l'insieme $|z| > 1$.

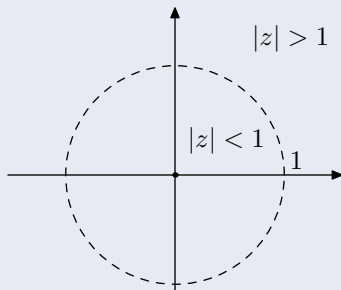
Sviluppo di Laurent

Esempio (continuazione)



Sviluppo di Laurent

Esempio (continuazione)



In entrambi i casi, lo sviluppo cercato è una serie di potenze in z :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n .$$

Sviluppo di Laurent

Esempio (continuazione)

a) Nel cerchio $|z| < 1$ lo sviluppo di Laurent coincide con quello di Mac Laurin. Per scriverlo, basta ricordare la serie geometrica:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots .$$

Sviluppo di Laurent

Esempio (continuazione)

a) Nel cerchio $|z| < 1$ lo sviluppo di Laurent coincide con quello di Mac Laurin. Per scriverlo, basta ricordare la serie geometrica:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

b) Anche per $|z| > 1$ possiamo utilizzare la serie geometrica, ma di ragione $1/z$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots - \frac{1}{z^n} - \cdots\end{aligned}$$

Sviluppo di Laurent

Esempio

La funzione

$$h(z) = \frac{e^z}{z}$$

è olomorfa nell'insieme $\mathbb{C} - \{0\}$, che può essere considerato una corona circolare di centro 0.

Sviluppo di Laurent

Esempio

La funzione

$$h(z) = \frac{e^z}{z}$$

è olomorfa nell'insieme $\mathbb{C} - \{0\}$, che può essere considerato una corona circolare di centro 0.

Per scrivere lo sviluppo di Laurent, è sufficiente ricordare lo sviluppo di Mac Laurin della funzione esponenziale:

$$h(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Questo è lo sviluppo di Laurent di h sia intorno a 0 che intorno a ∞ .

Singularità isolate

Diremo che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una *singularità isolata* della funzione f se f è olomorfa in un intorno di z_0 , escluso il punto; vale a dire che esiste $R > 0$ tale che f sia olomorfa per $0 < |z - z_0| < R$.

Singularità isolate

Diremo che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una *singularità isolata* della funzione f se f è olomorfa in un intorno di z_0 , escluso il punto; vale a dire che esiste $R > 0$ tale che f sia olomorfa per $0 < |z - z_0| < R$.

Diremo che la singolarità isolata z_0 di f è *eliminabile* se f ha un prolungamento olomorfo in z_0 , cioè esiste una funzione g , olomorfa in un intorno di z_0 (incluso z_0), coincidente con f nei punti di tale intorno distinti da z_0 .

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità eliminabile.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità eliminabile.

È ben noto che f si prolunga per continuità in 0. Per rendersi conto che il prolungamento per continuità è olomorfo in 0, basta usare lo sviluppo di Mac Laurin di $\sin z$:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità eliminabile.

È ben noto che f si prolunga per continuità in 0. Per rendersi conto che il prolungamento per continuità è olomorfo in 0, basta usare lo sviluppo di Mac Laurin di $\sin z$:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

La serie di potenze ha raggio di convergenza $+\infty$ e la sua somma g , che è una funzione intera, coincide con f in $\mathbb{C} - \{0\}$.

Singularità isolate

Esempio

Anche le funzioni

$$f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

hanno una singolarità eliminabile in $z_0 = 0$, come si vede subito usando lo sviluppo di Mac Laurin di e^z e di $\cos z$.

Singularità isolate

Esempio

Anche le funzioni

$$f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

hanno una singolarità eliminabile in $z_0 = 0$, come si vede subito usando lo sviluppo di Mac Laurin di e^z e di $\cos z$.

Il seguente risultato fornisce alcune caratterizzazioni del fatto che una singolarità isolata sia eliminabile.

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 singolarità isolata di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 singolarità isolata di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- 1 z_0 è singolarità eliminabile;

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 singolarità isolata di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- ① z_0 è singolarità eliminabile;
- ② f converge in z_0 ;

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 singolarità isolata di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- ❶ z_0 è singolarità eliminabile;
- ❷ f converge in z_0 ;
- ❸ f è limitata intorno a z_0 ;

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 singolarità isolata di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- ❶ z_0 è singolarità eliminabile;
- ❷ f converge in z_0 ;
- ❸ f è limitata intorno a z_0 ;
- ❹ nello sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 sono nulli i coefficienti c_n con indice $n < 0$, cioè lo sviluppo consiste in una ordinaria serie di potenze.

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 singolarità isolata di f . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- ❶ z_0 è singolarità eliminabile;
- ❷ f converge in z_0 ;
- ❸ f è limitata intorno a z_0 ;
- ❹ nello sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 sono nulli i coefficienti c_n con indice $n < 0$, cioè lo sviluppo consiste in una ordinaria serie di potenze.

In particolare, (1) $\iff$ (2) mostra che, se la funzione si prolunga per continuità, il prolungamento è in realtà olomorfo, in accordo con quanto visto negli esempi.

Singularità isolate

Mostriamo le equivalenze.

Singularità isolate

Mostriamo le equivalenze.

È chiaro che $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Singularità isolate

Mostriamo le equivalenze.

È chiaro che $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Mostriamo l'implicazione $(3) \Rightarrow (4)$.

Singularità isolate

Mostriamo le equivalenze.

È chiaro che $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Mostriamo l'implicazione $(3) \Rightarrow (4)$.

Supponiamo quindi che esistano $R > 0$ e $M > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq M, \text{ per } 0 < |z - z_0| \leq R.$$

Singularità isolate

Mostriamo le equivalenze.

È chiaro che $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Mostriamo l'implicazione $(3) \Rightarrow (4)$.

Supponiamo quindi che esistano $R > 0$ e $M > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq M, \text{ per } 0 < |z - z_0| \leq R.$$

Scegliamo $\rho \in]0, R[$ e consideriamo la circonferenza $\Gamma = \Gamma_\rho$ di centro z_0 e raggio ρ nella formula (12) per i coefficienti c_n dello sviluppo di Laurent.

Singularità isolate

Mostriamo le equivalenze.

È chiaro che $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

Mostriamo l'implicazione $(3) \Rightarrow (4)$.

Supponiamo quindi che esistano $R > 0$ e $M > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq M, \text{ per } 0 < |z - z_0| \leq R.$$

Scegliamo $\rho \in]0, R[$ e consideriamo la circonferenza $\Gamma = \Gamma_\rho$ di centro z_0 e raggio ρ nella formula (12) per i coefficienti c_n dello sviluppo di Laurent.

In tal modo per $n < 0$ otteniamo

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} ds \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \rho \frac{M}{\rho^{n+1}} = M \rho^{-n} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Singularità isolate

Concludiamo mostrando l'implicazione $(4) \Rightarrow (1)$.

Singularità isolate

Concludiamo mostrando l'implicazione (4) $\Rightarrow$ (1).

Per ipotesi, lo sviluppo di Laurent è privo di potenze con esponente negativo; per $0 < |z - z_0| < R$ (con $R > 0$ opportuno)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Singularità isolate

Concludiamo mostrando l'implicazione (4) $\Rightarrow$ (1).

Per ipotesi, lo sviluppo di Laurent è privo di potenze con esponente negativo; per $0 < |z - z_0| < R$ (con $R > 0$ opportuno)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

La serie a secondo membro converge per $|z - z_0| < R$, compreso z_0 , e la sua somma fornisce il prolungamento di f olomorfo in z_0 .

Singularità isolate

Nel caso di una singolarità eliminabile, effettueremo il prolungamento nel punto in modo da ottenere una funzione olomorfa.

Singularità isolate

Nel caso di una singolarità eliminabile, effettueremo il prolungamento nel punto in modo da ottenere una funzione olomorfa.

Consideriamo ora le singolarità isolate non eliminabili.

Singularità isolate

Nel caso di una singolarità eliminabile, effettueremo il prolungamento nel punto in modo da ottenere una funzione olomorfa.

Consideriamo ora le singolarità isolate non eliminabili.

Le classificheremo in base al comportamento della funzione intorno ad esse.

Singularità isolate

Nel caso di una singolarità eliminabile, effettueremo il prolungamento nel punto in modo da ottenere una funzione olomorfa.

Consideriamo ora le singolarità isolate non eliminabili.

Le classificheremo in base al comportamento della funzione intorno ad esse.

Per studiare tale comportamento, useremo lo sviluppo di Laurent.

Singularità isolate

Sia dunque z_0 una singolarità isolata della funzione f .

Singularità isolate

Sia dunque z_0 una singolarità isolata della funzione f .

Nello sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 separiamo le potenze con esponente negativo e quelle con esponente non-negativo:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (13)$$

Singularità isolate

Le potenze con esponente negativo sono singolari in z_0 .

Singularità isolate

Le potenze con esponente negativo sono singolari in z_0 .

Chiamiamo *caratteristica*, o *parte singolare*, di f intorno a z_0 la somma:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \quad (14)$$

Singularità isolate

Le potenze con esponente negativo sono singolari in z_0 .

Chiamiamo *caratteristica*, o *parte singolare*, di f intorno a z_0 la somma:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \quad (14)$$

mentre chiamiamo *parte olomorfa* di f intorno a z_0 :

$$O(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (15)$$

Singularità isolate

Osserviamo che la serie (14) converge in $\mathbb{C} - \{z_0\}$ e la somma S è olomorfa in tale insieme.

Singularità isolate

Osserviamo che la serie (14) converge in $\mathbb{C} - \{z_0\}$ e la somma S è olomorfa in tale insieme.

La serie (15) converge per $|z - z_0| < R$ (z_0 compreso) e la somma O è olomorfa.

Singularità isolate

Osserviamo che la serie (14) converge in $\mathbb{C} - \{z_0\}$ e la somma S è olomorfa in tale insieme.

La serie (15) converge per $|z - z_0| < R$ (z_0 compreso) e la somma O è olomorfa.

Lo sviluppo di Laurent (13) si riscrive

$$f(z) = S(z) + O(z).$$

Singularità isolate

Osserviamo che la serie (14) converge in $\mathbb{C} - \{z_0\}$ e la somma S è olomorfa in tale insieme.

La serie (15) converge per $|z - z_0| < R$ (z_0 compreso) e la somma O è olomorfa.

Lo sviluppo di Laurent (13) si riscrive

$$f(z) = S(z) + O(z).$$

Il comportamento di f intorno a z_0 dipende dalla parte singolare S .

Singularità isolate

Definizione

Diremo che z_0 è un *polo* di f se la serie (14) si riduce ad una somma finita, cioè solo un numero finito di coefficienti c_n con $n < 0$ sono diversi da 0 (non sono tutti nulli, poiché z_0 non è eliminabile).

Singularità isolate

Definizione

Diremo che z_0 è un *polo* di f se la serie (14) si riduce ad una somma finita, cioè solo un numero finito di coefficienti c_n con $n < 0$ sono diversi da 0 (non sono tutti nulli, poiché z_0 non è eliminabile).

Precisamente, diremo che z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$ se

$$c_{-N} \neq 0, \quad \text{mentre } c_{-n} = 0, \quad \forall n > N.$$

Singularità isolate

Definizione

Diremo che z_0 è un *polo* di f se la serie (14) si riduce ad una somma finita, cioè solo un numero finito di coefficienti c_n con $n < 0$ sono diversi da 0 (non sono tutti nulli, poiché z_0 non è eliminabile).

Precisamente, diremo che z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$ se

$$c_{-N} \neq 0, \quad \text{mentre } c_{-n} = 0, \quad \forall n > N.$$

Un polo di ordine 1 è detto anche *polo semplice*.

Singularità isolate

Definizione

Diremo che z_0 è un *polo* di f se la serie (14) si riduce ad una somma finita, cioè solo un numero finito di coefficienti c_n con $n < 0$ sono diversi da 0 (non sono tutti nulli, poiché z_0 non è eliminabile).

Precisamente, diremo che z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$ se

$$c_{-N} \neq 0, \quad \text{mentre } c_{-n} = 0, \quad \forall n > N.$$

Un polo di ordine 1 è detto anche *polo semplice*.

Diremo che z_0 è una *singularità essenziale* se

$$c_n \neq 0, \quad \text{per infiniti indici } n < 0.$$

Singularità isolate

In altri termini, una singolarità essenziale è una singolarità isolata che non sia eliminabile, né polo.

Singularità isolate

In altri termini, una singolarità essenziale è una singolarità isolata che non sia eliminabile, né polo.

Dunque, se z_0 è polo di ordine N , la parte singolare è un polinomio di grado N in $1/(z - z_0)$:

$$S(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \cdots + \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N}, \quad (16)$$

mentre nel caso di singolarità essenziale essa è effettivamente una serie con infiniti termini non nulli.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

ha in $z_0 = 1$ un polo semplice; lo sviluppo di Laurent intorno a 1 è

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} = (-1)(z-1)^{-1}.$$

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

ha in $z_0 = 1$ un polo semplice; lo sviluppo di Laurent intorno a 1 è

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} = (-1)(z-1)^{-1}.$$

La funzione

$$h(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

ha in $z_0 = 0$ un polo semplice.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1} \quad (17)$$

ha in 1 e 2 poli semplici.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1} \quad (17)$$

ha in 1 e 2 poli semplici.

Ad esempio, scriviamo lo sviluppo di Laurent intorno a 1, quindi per $0 < |z - 1| < 1$.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \quad (17)$$

ha in 1 e 2 poli semplici.

Ad esempio, scriviamo lo sviluppo di Laurent intorno a 1, quindi per $0 < |z - 1| < 1$.

Essendo

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1,$$

Singularità isolate

Esempio (Continuazione)

abbiamo

$$g(z) = \frac{-1}{z-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n.$$

Dunque la parte singolare e la parte olomorfa intorno a 1 sono rispettivamente

$$S(z) = \frac{-1}{z-1}, \quad O(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n = \frac{1}{z-2}.$$

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

ha in $z_0 = 0$ un polo di ordine 2.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

ha in $z_0 = 0$ un polo di ordine 2.

La funzione

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!}$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità essenziale.

Singularità isolate

Vediamo ora alcune caratterizzazioni.

Singularità isolate

Vediamo ora alcune caratterizzazioni.

Proposizione

La singolarità isolata z_0 di f è un polo se e solo se f diverge in z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty .$$

Singularità isolate

Vediamo ora alcune caratterizzazioni.

Proposizione

La singolarità isolata z_0 di f è un polo se e solo se f diverge in z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty .$$

Se z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$, intorno a z_0 abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n, \quad z \neq z_0. \quad (18)$$

Singularità isolate

Vediamo ora alcune caratterizzazioni.

Proposizione

La singolarità isolata z_0 di f è un polo se e solo se f diverge in z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty .$$

Se z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$, intorno a z_0 abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n, \quad z \neq z_0. \quad (18)$$

La somma $\varphi(z)$ della serie di potenze a secondo membro è olomorfa intorno a z_0 , compreso il punto, con $\varphi(z_0) = c_{-N} \neq 0$, quindi f diverge in z_0 .

Singularità isolate

Supponiamo ora f divergente.

Singularità isolate

Supponiamo ora f divergente.

Poiché $|f|$ diverge positivamente in z_0 , essa è diversa da 0 intorno al punto, quindi lo stesso vale per f e possiamo considerare

$$g = \frac{1}{f}$$

intorno a z_0 (escluso il punto perché f non è definita in esso).

Singularità isolate

Supponiamo ora f divergente.

Poiché $|f|$ diverge positivamente in z_0 , essa è diversa da 0 intorno al punto, quindi lo stesso vale per f e possiamo considerare

$$g = \frac{1}{f}$$

intorno a z_0 (escluso il punto perché f non è definita in esso).

Inoltre g è infinitesima in z_0 , quindi ponendo

$$g(z_0) = 0$$

otteniamo il prolungamento per continuità in z_0 .

Singularità isolate

Supponiamo ora f divergente.

Poiché $|f|$ diverge positivamente in z_0 , essa è diversa da 0 intorno al punto, quindi lo stesso vale per f e possiamo considerare

$$g = \frac{1}{f}$$

intorno a z_0 (escluso il punto perché f non è definita in esso).

Inoltre g è infinitesima in z_0 , quindi ponendo

$$g(z_0) = 0$$

otteniamo il prolungamento per continuità in z_0 .

Come abbiamo visto, il prolungamento è olomorfo nel punto.

Singularità isolate

La funzione g così prolungata ha uno zero isolato, quindi di ordine finito, in z_0 .

Singularità isolate

La funzione g così prolungata ha uno zero isolato, quindi di ordine finito, in z_0 .

Detto N l'ordine, possiamo scrivere

$$g(z) = (z - z_0)^N \varphi(z),$$

con φ funzione olomorfa e non nulla intorno a z_0 .

Singularità isolate

La funzione g così prolungata ha uno zero isolato, quindi di ordine finito, in z_0 .

Detto N l'ordine, possiamo scrivere

$$g(z) = (z - z_0)^N \varphi(z),$$

con φ funzione olomorfa e non nulla intorno a z_0 .

Pertanto $\frac{1}{\varphi}$ è analitica e sviluppandola in serie di potenze intorno a z_0 abbiamo lo sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 :

Singularità isolate

$$f(z) = \frac{\frac{1}{\varphi(z)}}{(z - z_0)^N} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^N} = \frac{a_0}{(z - z_0)^N} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{N-1}} + \dots$$

Per concludere, osserviamo che

$$a_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

Singularità isolate

$$f(z) = \frac{\frac{1}{\varphi(z)}}{(z - z_0)^N} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^N} = \frac{a_0}{(z - z_0)^N} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{N-1}} + \dots$$

Per concludere, osserviamo che

$$a_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0.$$

Nella caratterizzazione precedente non interviene esplicitamente l'ordine del polo, come invece accade nella proposizione seguente.

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 una singolarità isolata della funzione f . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- 1 z_0 è polo di ordine N ;

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 una singolarità isolata della funzione f . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- ❶ z_0 è polo di ordine N ;
- ❷ $(z - z_0)^N f(z)$ converge in z_0 ad un valore non nullo;

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 una singolarità isolata della funzione f . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- ❶ z_0 è polo di ordine N ;
- ❷ $(z - z_0)^N f(z)$ converge in z_0 ad un valore non nullo;
- ❸ f è non nulla intorno a z_0 e la funzione

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

ha in z_0 uno zero di ordine N ;

Singularità isolate

Proposizione

Sia z_0 una singolarità isolata della funzione f . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- ❶ z_0 è polo di ordine N ;
- ❷ $(z - z_0)^N f(z)$ converge in z_0 ad un valore non nullo;
- ❸ f è non nulla intorno a z_0 e la funzione

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

ha in z_0 uno zero di ordine N ;

- ❹ *esiste una funzione φ analitica e priva di zeri in un intorno di z_0 , tale che per $z \neq z_0$ risulti $f(z) = (z - z_0)^{-N} \varphi(z)$.*

Singularità isolate

Dalle caratterizzazioni precedenti, segue una caratterizzazione per le singolarità essenziali.

Singularità isolate

Dalle caratterizzazioni precedenti, segue una caratterizzazione per le singolarità essenziali.

Proposizione

La singolarità isolata z_0 è essenziale se e solo se f non ammette limite in z_0 .

Più precisamente, se I è un qualsiasi intorno della singolarità essenziale z_0 nel quale f è olomorfa (escluso z_0), risulta

$$\sup_{z \in I - \{z_0\}} |f(z)| = +\infty, \quad \inf_{z \in I - \{z_0\}} |f(z)| = 0. \quad (19)$$

Singularità isolate

Infatti, se l'estremo superiore fosse finito, f sarebbe limitata e z_0 sarebbe una singolarità eliminabile, per la proposizione 4.

Singularità isolate

Infatti, se l'estremo superiore fosse finito, f sarebbe limitata e z_0 sarebbe una singolarità eliminabile, per la proposizione 4.

Se l'estremo inferiore fosse positivo, f sarebbe diversa da zero intorno a z_0 e $1/f$ sarebbe limitata, quindi prolungabile come funzione olomorfa in z_0 ; ne seguirebbe z_0 singolarità eliminabile o polo di f , contro l'ipotesi.

Singularità isolate

Infatti, se l'estremo superiore fosse finito, f sarebbe limitata e z_0 sarebbe una singolarità eliminabile, per la proposizione 4.

Se l'estremo inferiore fosse positivo, f sarebbe diversa da zero intorno a z_0 e $1/f$ sarebbe limitata, quindi prolungabile come funzione olomorfa in z_0 ; ne seguirebbe z_0 singolarità eliminabile o polo di f , contro l'ipotesi.

Se z_0 è singolarità essenziale di f , lo è anche della funzione $f - w$, $\forall w \in \mathbb{C}$, quindi, oltre le (19), abbiamo

$$\inf_{z \in I - \{z_0\}} |f(z) - w| = 0. \quad (20)$$

Singularità isolate

Segue il

Teorema (di Casorati-Weierstrass)

In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume valori arbitrariamente prossimi a qualsiasi numero complesso fissato.

Singularità isolate

Segue il

Teorema (di Casorati-Weierstrass)

In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume valori arbitrariamente prossimi a qualsiasi numero complesso fissato.

Tale teorema mostra il comportamento estremamente irregolare di una funzione nell'intorno di una sua singolarità essenziale.

Singularità isolate

In effetti, sussiste un risultato più preciso, che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema (di Picard)

In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume come valori tutti i numeri complessi, con al più un'unica eccezione.

Singularità isolate

In effetti, sussiste un risultato più preciso, che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema (di Picard)

In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume come valori tutti i numeri complessi, con al più un'unica eccezione.

Che un valore eccezionale possa effettivamente presentarsi è mostrato dalla funzione $e^{1/z}$, che non si annulla.

Singularità isolate

Siano ora f e g due funzioni olomorfe in un intorno di z_0 (compreso), non identicamente nulle, ma con $g(z_0) = 0$.

Singularità isolate

Siano ora f e g due funzioni olomorfe in un intorno di z_0 (compreso), non identicamente nulle, ma con $g(z_0) = 0$.

Pertanto z_0 è zero isolato di g e possiamo considerare la funzione rapporto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

intorno a z_0 , escluso però il punto z_0 che risulta quindi una singolarità isolata.

Singularità isolate

Siano ora f e g due funzioni olomorfe in un intorno di z_0 (compreso), non identicamente nulle, ma con $g(z_0) = 0$.

Pertanto z_0 è zero isolato di g e possiamo considerare la funzione rapporto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

intorno a z_0 , escluso però il punto z_0 che risulta quindi una singolarità isolata.

Vogliamo studiare tale singolarità.

Singularità isolate

Sia z_0 zero di ordine $M \in \mathbb{N}_0$ di f ($M = 0$ significa che z_0 non è zero) e di ordine $N \in \mathbb{N}$ di g .

Singularità isolate

Sia z_0 zero di ordine $M \in \mathbb{N}_0$ di f ($M = 0$ significa che z_0 non è zero) e di ordine $N \in \mathbb{N}$ di g .

Valgono dunque i seguenti risultati:

- se $M \geq N$, il punto z_0 è una singolarità eliminabile;
precisamente, se $M > N$ il punto è uno zero di ordine $M - N$ del prolungamento;

Singularità isolate

Sia z_0 zero di ordine $M \in \mathbb{N}_0$ di f ($M = 0$ significa che z_0 non è zero) e di ordine $N \in \mathbb{N}$ di g .

Valgono dunque i seguenti risultati:

- se $M \geq N$, il punto z_0 è una singolarità eliminabile;
precisamente, se $M > N$ il punto è uno zero di ordine $M - N$ del prolungamento;
- se $M < N$, il punto z_0 è un polo di ordine $N - M$.

Singularità isolate

Per la verifica, in base alle ipotesi scriviamo

$$f(z) = (z - z_0)^M \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^N \psi(z),$$

con φ e ψ funzioni olomorfe e diverse da zero intorno a z_0 .

Singularità isolate

Per la verifica, in base alle ipotesi scriviamo

$$f(z) = (z - z_0)^M \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^N \psi(z),$$

con φ e ψ funzioni olomorfe e diverse da zero intorno a z_0 .

Pertanto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{M-N} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Singularità isolate

Per la verifica, in base alle ipotesi scriviamo

$$f(z) = (z - z_0)^M \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^N \psi(z),$$

con φ e ψ funzioni olomorfe e diverse da zero intorno a z_0 .

Pertanto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{M-N} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

È allora chiaro il risultato per $M \geq N$.

Singularità isolate

Per la verifica, in base alle ipotesi scriviamo

$$f(z) = (z - z_0)^M \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^N \psi(z),$$

con φ e ψ funzioni olomorfe e diverse da zero intorno a z_0 .

Pertanto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{M-N} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

È allora chiaro il risultato per $M \geq N$.

Nel caso $M < N$, sviluppiamo in serie di potenze intorno a z_0 la funzione φ/ψ :

$$h(z) = (z - z_0)^{M-N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_0}{(z - z_0)^{N-M}} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{N-M-1}} + \dots$$

e osserviamo che $a_0 = \varphi(z_0)/\psi(z_0) \neq 0$.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$h_1(z) = \frac{\sin z}{1 - \cos z},$$

ha in $z_0 = 0$ un polo semplice, poiché è $M = 1$ e $N = 2$.

Singularità isolate

Esempio

La funzione

$$h_1(z) = \frac{\sin z}{1 - \cos z},$$

ha in $z_0 = 0$ un polo semplice, poiché è $M = 1$ e $N = 2$.

La funzione

$$h_2(z) = \frac{e^z - 1}{\sin z}.$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità eliminabile, poiché $M = N = 1$.

Singularità isolate

Esempio

Se f è olomorfa e non identicamente nulla, l'espressione

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log f(z)$$

si dice *derivata logaritmica* di f . Se il punto z_0 è uno zero (isolato) di f , esso è polo semplice della derivata logaritmica. Questo è il caso di h_1 nell'esempio precedente.

Singularità isolate

Esempio

Se f è olomorfa e non identicamente nulla, l'espressione

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log f(z)$$

si dice *derivata logaritmica* di f . Se il punto z_0 è uno zero (isolato) di f , esso è polo semplice della derivata logaritmica. Questo è il caso di h_1 nell'esempio precedente.

Se z_0 è un polo di f , esso è uno zero di $g = 1/f$ (proposizione 6). Essendo

$$\frac{g'}{g} = f \left(-\frac{f'}{f^2} \right) = -\frac{f'}{f}$$

la derivata logaritmica di g , anche in questo caso z_0 è polo semplice della derivata logaritmica di f .

Olomorfia e singolarità all' ∞

Sia f una funzione olomorfa intorno all' ∞ .

Olomorfia e singolarità all' ∞

Sia f una funzione olomorfa intorno all' ∞ .

Possiamo quindi rappresentarla in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (21)$$

Olomorfia e singolarità all' ∞

Sia f una funzione olomorfa intorno all' ∞ .

Possiamo quindi rappresentarla in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (21)$$

Per $z \rightarrow \infty$, sono convergenti le potenze con esponente non-positivo, mentre le altre risultano divergenti.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Chiameremo dunque *parte olomorfa* di f intorno a ∞ la somma delle potenze con esponente non-positivo in (21):

$$O(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n,$$

e chiameremo *caratteristica*, o *parte singolare*, di f intorno a ∞ la somma delle potenze con esponente positivo:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n.$$

Olomorfia e singolarità all' ∞

Diremo che f è *olomorfa* in ∞ se $S \equiv 0$, cioè se risulta $c_n = 0$, $\forall n > 0$. In tal caso, porremo $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Diremo che f è *olomorfa* in ∞ se $S \equiv 0$, cioè se risulta $c_n = 0$, $\forall n > 0$. In tal caso, porremo $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Diremo che ∞ è *polo di ordine* $N \in \mathbb{N}$ se risulta $c_N \neq 0$ e $c_n = 0$, $\forall n > N$. Pertanto lo sviluppo di Laurent (21) si riduce a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + c_1 z + \cdots + c_N z^N.$$

Olomorfia e singolarità all' ∞

Diremo che f è *olomorfa* in ∞ se $S \equiv 0$, cioè se risulta $c_n = 0$, $\forall n > 0$. In tal caso, porremo $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Diremo che ∞ è *polo di ordine* $N \in \mathbb{N}$ se risulta $c_N \neq 0$ e $c_n = 0$, $\forall n > N$. Pertanto lo sviluppo di Laurent (21) si riduce a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + c_1 z + \cdots + c_N z^N.$$

Diremo che ∞ è una singolarità essenziale se infiniti coefficienti c_n con $n > 0$ sono diversi da 0.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Diremo che f è *olomorfa* in ∞ se $S \equiv 0$, cioè se risulta $c_n = 0$, $\forall n > 0$. In tal caso, porremo $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Diremo che ∞ è *polo di ordine* $N \in \mathbb{N}$ se risulta $c_N \neq 0$ e $c_n = 0$, $\forall n > N$. Pertanto lo sviluppo di Laurent (21) si riduce a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + c_1 z + \cdots + c_N z^N.$$

Diremo che ∞ è una singolarità essenziale se infiniti coefficienti c_n con $n > 0$ sono diversi da 0.

Osservazione

Studiare f intorno all' ∞ equivale a studiare $g(z) = f(1/z)$ intorno a 0.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Valgono caratterizzazioni analoghe a quelle viste nel caso di un punto al finito.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Valgono caratterizzazioni analoghe a quelle viste nel caso di un punto al finito.

Ad esempio, l'olomorfia all' ∞ equivale sia alla convergenza all' ∞ , che alla limitatezza in un intorno dell' ∞ ; in base a questo, il teorema 7 di Liouville si può enunciare nel modo seguente: “Ogni funzione olomorfa in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è costante”.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Esempio

Sia $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ una funzione razionale, rapporto tra i polinomi P , di grado M , e Q , di grado N . Essa è olomorfa all' ∞ se $M \leq N$; ha un polo di ordine $M - N$ se $M > N$.

Olomorfia e singolarità all' ∞

Esempio

Sia $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ una funzione razionale, rapporto tra i polinomi P , di grado M , e Q , di grado N . Essa è olomorfa all' ∞ se $M \leq N$; ha un polo di ordine $M - N$ se $M > N$.

Le funzioni e^z , $\sin z$, $\cos z$, hanno nel punto ∞ una singolarità essenziale.