

Distribuzioni

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II"



Anno Accademico 2022/2023

Distribuzioni

- Introduzione
- Lo spazio delle funzioni test
- Le distribuzioni
- Operazioni sulle distribuzioni
- Derivata di distribuzioni
- δ -successioni
- Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier
- Teoremi di campionamento
- Trasformata di Laplace di distribuzioni

Introduzione

Presentiamo la teoria delle distribuzioni, che dal punto di vista matematico nascono dall'esigenza di estendere alcune operazioni fondamentali dell'analisi, prima fra tutte la derivazione.

Introduzione

Presentiamo la teoria delle distribuzioni, che dal punto di vista matematico nascono dall'esigenza di estendere alcune operazioni fondamentali dell'analisi, prima fra tutte la derivazione.

Nell'ambito della teoria classica, l'operazione di derivazione non è sempre possibile; nell'ambito delle distribuzioni essa può essere effettuata senza restrizioni e risulta un'operazione continua.

Introduzione

Presentiamo la teoria delle distribuzioni, che dal punto di vista matematico nascono dall'esigenza di estendere alcune operazioni fondamentali dell'analisi, prima fra tutte la derivazione.

Nell'ambito della teoria classica, l'operazione di derivazione non è sempre possibile; nell'ambito delle distribuzioni essa può essere effettuata senza restrizioni e risulta un'operazione continua.

Sarà anche possibile effettuare una notevole estensione della trasformazione di Fourier, rispetto alla teoria in $L^1(\mathbb{R})$.

Introduzione

Le distribuzioni trovano pure notevoli applicazioni in fisica.

Introduzione

Le distribuzioni trovano pure notevoli applicazioni in fisica.

La teoria delle distribuzioni permette ad esempio una trattazione rigorosa delle cosiddette *funzioni impulsive*, che erano già usate in fisica in maniera piuttosto empirica.

Introduzione

Le distribuzioni trovano pure notevoli applicazioni in fisica.

La teoria delle distribuzioni permette ad esempio una trattazione rigorosa delle cosiddette *funzioni impulsive*, che erano già usate in fisica in maniera piuttosto empirica.

Il prototipo delle funzioni impulsive è la δ di Dirac, che veniva introdotta in vari modi non rigorosi, più o meno equivalenti tra loro.

(a) Essa era definita come la *funzione* $\delta(t)$ su $\mathbb{R}$ nulla per $t \neq 0$ e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1)$$

Introduzione

(a) Essa era definita come la *funzione* $\delta(t)$ su $\mathbb{R}$ nulla per $t \neq 0$ e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1)$$

È chiaro che non esiste alcuna funzione con queste proprietà.

Introduzione

(b) Un altro modo di introdurre la δ era come limite di una successione di funzioni, ad esempio

Introduzione

(b) Un altro modo di introdurre la δ era come limite di una successione di funzioni, ad esempio

$$\begin{aligned} x_n(t) &= n\Pi(nt) = n \left[u\left(t + \frac{1}{2n}\right) - u\left(t - \frac{1}{2n}\right) \right] \\ &= \begin{cases} n, & \text{se } -\frac{1}{2n} \leq t < \frac{1}{2n}, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Introduzione

Per $n \rightarrow \infty$, l'intervallo

$$\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right]$$

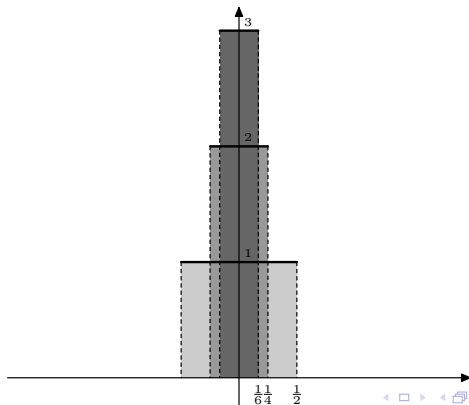
si contrae al punto 0.

Introduzione

Per $n \rightarrow \infty$, l'intervallo

$$\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} \right]$$

si contrae al punto 0.



Introduzione

Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1 \quad (3)$$

e si desidera che tale proprietà valga anche per

$$\delta = \lim_n x_n,$$

Introduzione

Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1 \quad (3)$$

e si desidera che tale proprietà valga anche per

$$\delta = \lim_n x_n,$$

cioè sia soddisfatta la (1).

Introduzione

Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1 \quad (3)$$

e si desidera che tale proprietà valga anche per

$$\delta = \lim_n x_n,$$

cioè sia soddisfatta la (1).

È evidente però che la relazione di limite non può essere intesa in senso puntuale, poiché in tal caso si ricade nella *definizione* precedente.

(c) $\delta(t)$ veniva pure introdotta come la *funzione* verificante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad (4)$$

per ogni $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$.

(c) $\delta(t)$ veniva pure introdotta come la *funzione* verificante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad (4)$$

per ogni $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$.

Mostreremo che anche tale proprietà, con il concetto di funzione dell'analisi matematica classica, è impossibile.

Introduzione

L'introduzione delle distribuzioni richiede dunque di cambiare punto di vista, modificando il concetto di funzione.

Introduzione

L'introduzione delle distribuzioni richiede dunque di cambiare punto di vista, modificando il concetto di funzione.

L'idea di funzione come legge di corrispondenza tra insiemi numerici risulta inadeguato.

Introduzione

L'introduzione delle distribuzioni richiede dunque di cambiare punto di vista, modificando il concetto di funzione.

L'idea di funzione come legge di corrispondenza tra insiemi numerici risulta inadeguato.

In effetti, tale idea mostra delle difficoltà già quando si considerano le funzioni sommabili o localmente sommabili secondo Lebesgue, che sono definite a meno di un insieme trascurabile.

Introduzione

L'introduzione delle distribuzioni richiede dunque di cambiare punto di vista, modificando il concetto di funzione.

L'idea di funzione come legge di corrispondenza tra insiemi numerici risulta inadeguato.

In effetti, tale idea mostra delle difficoltà già quando si considerano le funzioni sommabili o localmente sommabili secondo Lebesgue, che sono definite a meno di un insieme trascurabile.

Per una tale funzione x , non è appropriato parlare di valore assunto in un punto preciso.

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari,

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt. \quad (5)$$

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt. \quad (5)$$

Per tal motivo, φ viene detta *funzione test*.

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt. \quad (5)$$

Per tal motivo, φ viene detta *funzione test*.

Dunque x è interpretata come il *funzionale lineare* definito dalla (5) sulla classe delle funzioni test.

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt. \quad (5)$$

Per tal motivo, φ viene detta *funzione test*.

Dunque x è interpretata come il *funzionale lineare* definito dalla (5) sulla classe delle funzioni test.

Questo approccio è analogo al modo di introdurre la δ presentato nel punto (c).

Introduzione

Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt. \quad (5)$$

Per tal motivo, φ viene detta *funzione test*.

Dunque x è interpretata come il *funzionale lineare* definito dalla (5) sulla classe delle funzioni test.

Questo approccio è analogo al modo di introdurre la δ presentato nel punto (c).

È necessario però definire la classe delle funzioni test e precisare quali saranno i funzionali lineari da considerare.

Lo spazio delle funzioni test

Cominciamo introducendo il supporto di una funzione continua.

Lo spazio delle funzioni test

Cominciamo introducendo il supporto di una funzione continua.

Definizione

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua.

Lo spazio delle funzioni test

Cominciamo introducendo il supporto di una funzione continua.

Definizione

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua.

Il supporto di φ , che denoteremo con $\text{supp } \varphi$, è la chiusura dell'insieme

$$\{ t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq 0 \}.$$

Lo spazio delle funzioni test

Cominciamo introducendo il supporto di una funzione continua.

Definizione

Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua.

Il supporto di φ , che denoteremo con $\text{supp } \varphi$, è la chiusura dell'insieme

$$\{ t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq 0 \}.$$

Equivalentemente, $\text{supp } \varphi$ è il complementare del più grande aperto di $\mathbb{R}$ sul quale φ è identicamente nulla.

Lo spazio delle funzioni test

Possiamo ora introdurre lo spazio delle funzioni test.

Lo spazio delle funzioni test

Possiamo ora introdurre lo spazio delle funzioni test.

Definizione

Lo spazio delle funzioni test, che indicheremo con

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

Lo spazio delle funzioni test

Possiamo ora introdurre lo spazio delle funzioni test.

Definizione

Lo spazio delle funzioni test, che indicheremo con

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

è formato dalle funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto.

Lo spazio delle funzioni test

Possiamo ora introdurre lo spazio delle funzioni test.

Definizione

Lo spazio delle funzioni test, che indicheremo con

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

è formato dalle funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto.

In particolare, per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}$, esiste un intervallo compatto $[a, b]$ (dipendente da φ) tale che $\varphi(t) = 0, \forall t \notin [a, b]$.

Lo spazio delle funzioni test

$\mathcal{D}$ risulta uno spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$) definendo la somma ed il prodotto per uno scalare in senso puntuale.

Lo spazio delle funzioni test

$\mathcal{D}$ risulta uno spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$) definendo la somma ed il prodotto per uno scalare in senso puntuale.

Esempio

La funzione

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & \text{se } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6)$$

appartiene a $\mathcal{D}$. In effetti, $t \mapsto e^{\frac{1}{t^2-1}}$ è indefinitamente derivabile in $] -1, 1[$ e tutte le derivate sono infinitesime per $t \rightarrow -1+$ e per $t \rightarrow 1-$.

Lo spazio delle funzioni test

$\mathcal{D}$ risulta uno spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$) definendo la somma ed il prodotto per uno scalare in senso puntuale.

Esempio

La funzione

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & \text{se } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (6)$$

appartiene a $\mathcal{D}$. In effetti, $t \mapsto e^{\frac{1}{t^2-1}}$ è indefinitamente derivabile in $] -1, 1[$ e tutte le derivate sono infinitesime per $t \rightarrow -1+$ e per $t \rightarrow 1-$.

Inoltre chiaramente $\text{supp } \alpha = [-1, 1]$.

Convergenza delle funzioni test

In $\mathcal{D}$ si introduce una *nozione di convergenza*.

Convergenza delle funzioni test

In $\mathcal{D}$ si introduce una *nozione di convergenza*.

Siano (φ_n) una successione in $\mathcal{D}$ e $\varphi \in \mathcal{D}$.

Convergenza delle funzioni test

In $\mathcal{D}$ si introduce una *nozione di convergenza*.

Siano (φ_n) una successione in $\mathcal{D}$ e $\varphi \in \mathcal{D}$.

Si dice che (φ_n) converge a φ in $\mathcal{D}$ e si scrive

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$$

se valgono le condizioni:

Convergenza delle funzioni test

① per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$ uniformemente su $\mathbb{R}$, cioè risulta

$$\lim_n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| = 0;$$

Convergenza delle funzioni test

- ① per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$ uniformemente su $\mathbb{R}$, cioè risulta

$$\lim_n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| = 0;$$

- ② esiste un intervallo compatto $[a, b]$ che contiene i supporti di **tutte** le φ_n , $n \in \mathbb{N}$, cioè tale che

$$\varphi_n(t) = 0, \quad \forall t \notin [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Convergenza delle funzioni test

- ① per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$ uniformemente su $\mathbb{R}$, cioè risulta

$$\lim_n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| = 0;$$

- ② esiste un intervallo compatto $[a, b]$ che contiene i supporti di **tutte** le φ_n , $n \in \mathbb{N}$, cioè tale che

$$\varphi_n(t) = 0, \quad \forall t \notin [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

È chiaro che, se φ appartiene a $\mathcal{D}$, anche tutte le derivate $\varphi^{(k)}$ sono in $\mathcal{D}$; inoltre

$$\text{supp } \varphi \supseteq \text{supp } \varphi' \supseteq \text{supp } \varphi'' \supseteq \cdots.$$

Le distribuzioni

Definizione

Si dice distribuzione ogni funzionale (o forma) lineare su $\mathcal{D}$ che sia continuo rispetto alla convergenza di funzioni test.

Le distribuzioni

Definizione

Si dice distribuzione ogni funzionale (o forma) lineare su $\mathcal{D}$ che sia continuo rispetto alla convergenza di funzioni test.

L'insieme delle distribuzioni si denota con

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

e si rende uno spazio vettoriale definendo la somma e il prodotto per uno scalare in senso puntuale.

Le distribuzioni

Dunque $T \in \mathcal{D}'$ se

$$T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

è **lineare**,

Le distribuzioni

Dunque $T \in \mathcal{D}'$ se

$$T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

è **lineare**, cioè verifica

$$T(c\varphi + d\psi) = cT\varphi + dT\psi$$

per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ e $c, d \in \mathbb{C}$,

Le distribuzioni

Dunque $T \in \mathcal{D}'$ se

$$T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

è **lineare**, cioè verifica

$$T(c\varphi + d\psi) = cT\varphi + dT\psi$$

per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ e $c, d \in \mathbb{C}$, ed è **continuo** in $\mathcal{D}$,

Le distribuzioni

Dunque $T \in \mathcal{D}'$ se

$$T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

è **lineare**, cioè verifica

$$T(c\varphi + d\psi) = cT\varphi + dT\psi$$

per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ e $c, d \in \mathbb{C}$, ed è **continuo** in $\mathcal{D}$, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad T\varphi_n \rightarrow T\varphi \text{ in } \mathbb{C}.$$

Le distribuzioni

Dunque $T \in \mathcal{D}'$ se

$$T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

è **lineare**, cioè verifica

$$T(c\varphi + d\psi) = cT\varphi + dT\psi$$

per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ e $c, d \in \mathbb{C}$, ed è **continuo** in $\mathcal{D}$, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad T\varphi_n \rightarrow T\varphi \text{ in } \mathbb{C}.$$

Notiamo che per la linearità è sufficiente verificare la continuità di T in 0, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \Rightarrow \quad T\varphi_n \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

Le distribuzioni

Dato $T \in \mathcal{D}'$, il valore assunto in $\varphi \in \mathcal{D}$ viene denotato usualmente invece che con $T(\varphi)$ mediante il simbolo

$$\langle T, \varphi \rangle \tag{7}$$

che si chiama *crochet* o simbolo di dualità.

Le distribuzioni

Dato $T \in \mathcal{D}'$, il valore assunto in $\varphi \in \mathcal{D}$ viene denotato usualmente invece che con $T(\varphi)$ mediante il simbolo

$$\langle T, \varphi \rangle \tag{7}$$

che si chiama *crochet* o simbolo di dualità.

Vediamo ora alcuni esempi fondamentali di distribuzioni.

Le distribuzioni

Esempio

Ad ogni $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si associa una distribuzione T_x definita ponendo

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (8)$$

Le distribuzioni

Esempio

Ad ogni $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si associa una distribuzione T_x definita ponendo

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (8)$$

L'integrale in (8) converge assolutamente pur essendo x solo localmente sommabile, poiché φ ha supporto compatto, cioè è nulla fuori di un intervallo limitato.

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

È ovvio che T_x è lineare.

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

È ovvio che T_x è lineare.

Anche la continuità è molto semplice:

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

È ovvio che T_x è lineare.

Anche la continuità è molto semplice:

se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, troviamo $[a, b]$ tale che $\text{supp } \varphi_n \subseteq [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$|\langle T_x, \varphi_n \rangle| \leq \sup |\varphi_n| \int_a^b |x(t)| dt$$

è infinitesimo poiché $\lim_n \sup |\varphi_n| = 0$.

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Si mostra che, se $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e risulta $T_x = T_y$,

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Si mostra che, se $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e risulta $T_x = T_y$, cioè

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \langle T_y, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

Esempio (continuazione)

Si mostra che, se $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e risulta $T_x = T_y$, cioè

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \langle T_y, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

risulta pure

$$x(t) = y(t), \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{R},$$

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Si mostra che, se $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e risulta $T_x = T_y$, cioè

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \langle T_y, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

risulta pure

$$x(t) = y(t), \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{R},$$

cioè x e y sono lo stesso elemento di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Si mostra che, se $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e risulta $T_x = T_y$, cioè

$$\langle T_x, \varphi \rangle = \langle T_y, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

risulta pure

$$x(t) = y(t), \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{R},$$

cioè x e y sono lo stesso elemento di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(Ricordiamo che funzioni coincidenti q.o. si identificano).

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Questo permette di identificare T_x con x .

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Questo permette di identificare T_x con x .

In questo senso, vale l'inclusione

$$L_{\text{loc}}^1 \subset \mathcal{D}'.$$

Le distribuzioni

Esempio (continuazione)

Questo permette di identificare T_x con x .

In questo senso, vale l'inclusione

$$L^1_{\text{loc}} \subset \mathcal{D}'.$$

Le distribuzioni del tipo T_x , cioè le funzioni localmente sommabili, si dicono *distribuzioni regolari*.

Le distribuzioni

Come vedremo con gli esempi successivi, esistono distribuzioni non regolari, cioè che non sono funzioni localmente sommabili.

Le distribuzioni

Come vedremo con gli esempi successivi, esistono distribuzioni non regolari, cioè che non sono funzioni localmente sommabili.

Se $T \in \mathcal{D}'$ è una generica distribuzione, T è un funzionale definito in $\mathcal{D}$ e quindi la notazione $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, non è corretta.

Le distribuzioni

Come vedremo con gli esempi successivi, esistono distribuzioni non regolari, cioè che non sono funzioni localmente sommabili.

Se $T \in \mathcal{D}'$ è una generica distribuzione, T è un funzionale definito in $\mathcal{D}$ e quindi la notazione $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, non è corretta.

D'altra parte, in vista del caso delle distribuzioni regolari, che sono effettivamente delle funzioni di variabile reale, spesso con abuso di notazioni la distribuzione si denota anche con $T(t)$.

Le distribuzioni

Questo permetterà come vedremo di indicare in maniera semplice alcune operazioni sulle distribuzioni.

Le distribuzioni

Questo permetterà come vedremo di indicare in maniera semplice alcune operazioni sulle distribuzioni.

Sempre con abuso di notazioni, il valore di T su φ si indica pure con l'integrale, cioè si scrive

$$\langle T(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t) \varphi(t) dt,$$

pur non essendo in generale T definita mediante integrale.

Le distribuzioni

Esempio

La distribuzione δ di Dirac, o *impulso unitario concentrato* in 0, è definita ponendo

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9)$$

Le distribuzioni

Esempio

La distribuzione δ di Dirac, o *impulso unitario concentrato* in 0, è definita ponendo

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (9)$$

Mostriamo che δ **non** è una distribuzione regolare, cioè una funzione localmente sommabile.

Le distribuzioni

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta \in L^1_{\text{loc}}$ tale che

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Le distribuzioni

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta \in L^1_{\text{loc}}$ tale che

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ponendo in tale uguaglianza $\varphi(t) = \alpha(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, dove α è la funzione definita in (6), essendo in tal caso $\text{supp } \varphi = [-1/n, 1/n]$ e $\max |\varphi| = \varphi(0) = 1/e$, ricaviamo

Le distribuzioni

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta \in L^1_{\text{loc}}$ tale che

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ponendo in tale uguaglianza $\varphi(t) = \alpha(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, dove α è la funzione definita in (6), essendo in tal caso $\text{supp } \varphi = [-1/n, 1/n]$ e $\max |\varphi| = \varphi(0) = 1/e$, ricaviamo

$$\frac{1}{e} = |\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle| \leq \frac{1}{e} \int_{-1/n}^{1/n} |\delta(t)| dt$$

Le distribuzioni

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta \in L^1_{\text{loc}}$ tale che

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ponendo in tale uguaglianza $\varphi(t) = \alpha(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, dove α è la funzione definita in (6), essendo in tal caso $\text{supp } \varphi = [-1/n, 1/n]$ e $\max |\varphi| = \varphi(0) = 1/e$, ricaviamo

$$\frac{1}{e} = |\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle| \leq \frac{1}{e} \int_{-1/n}^{1/n} |\delta(t)| dt$$

e l'integrale nell'ultimo membro tende a zero per $n \rightarrow \infty$.

Le distribuzioni

Se $a \in \mathbb{C}$ è uno scalare, chiaramente è

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = a\varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Le distribuzioni

Se $a \in \mathbb{C}$ è uno scalare, chiaramente è

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = a\varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La distribuzione $a\delta$ si dice *impulso di area a* , concentrato in 0.

Le distribuzioni

Se $a \in \mathbb{C}$ è uno scalare, chiaramente è

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = a\varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La distribuzione $a\delta$ si dice *impulso di area a* , concentrato in 0.

Se $a \in \mathbb{R}$, essa si rappresenta graficamente con un segmento orientato uscente dall'origine, di lunghezza $|a|$ orientato verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$.

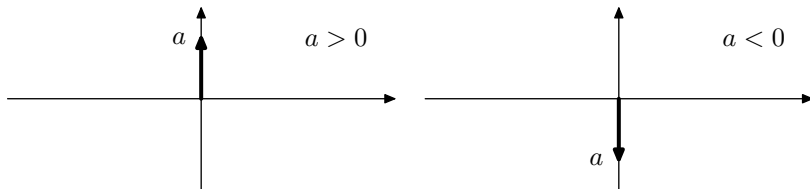
Le distribuzioni

Se $a \in \mathbb{C}$ è uno scalare, chiaramente è

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = a\varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La distribuzione $a\delta$ si dice *impulso di area a* , concentrato in 0.

Se $a \in \mathbb{R}$, essa si rappresenta graficamente con un segmento orientato uscente dall'origine, di lunghezza $|a|$ orientato verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$.



Le distribuzioni

Esempio

La distribuzione *valor principale* di $1/t$, che si denota con v.p. $1/t$, è definita da

$$\left\langle \text{v.p. } \frac{1}{t}, \varphi \right\rangle = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (10)$$

Le distribuzioni

La funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ è nulla intorno a $\mp\infty$; l'integrale è inteso nel senso del valor principale poiché, se $\varphi(0) \neq 0$, l'integrando è infinito in 0.

Le distribuzioni

La funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ è nulla intorno a $\mp\infty$; l'integrale è inteso nel senso del valor principale poiché, se $\varphi(0) \neq 0$, l'integrando è infinito in 0.

Dunque

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right).$$

Le distribuzioni

Mutando t in $-t$, l'ultimo integrale a secondo membro si trasforma in un integrale esteso all'intervallo $[\varepsilon, +\infty[$, quindi

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Le distribuzioni

Mutando t in $-t$, l'ultimo integrale a secondo membro si trasforma in un integrale esteso all'intervallo $[\varepsilon, +\infty[$, quindi

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Per l'ultima uguaglianza, è sufficiente osservare che l'integrando è convergente per $t \rightarrow 0$, cioè ha una discontinuità eliminabile, essendo φ derivabile in 0:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} + \frac{\varphi(-t) - \varphi(0)}{-t} \right) = 2\varphi'(0).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Introduciamo alcune operazioni sulle distribuzioni.

Operazioni sulle distribuzioni

Introduciamo alcune operazioni sulle distribuzioni.

Per diverse di queste, ad esempio la traslazione, la definizione è perfettamente chiara nel caso delle funzioni, perché è data in senso puntuale.

Operazioni sulle distribuzioni

Introduciamo alcune operazioni sulle distribuzioni.

Per diverse di queste, ad esempio la traslazione, la definizione è perfettamente chiara nel caso delle funzioni, perché è data in senso puntuale.

Per estendere la definizione alle distribuzioni in generale, seguiremo il caso delle funzioni come guida.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo la traslazione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo la traslazione.

Siano x localmente sommabile e $t_0 \in \mathbb{R}$; anche il segnale traslato $t \mapsto x(t - t_0)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo la traslazione.

Siano x localmente sommabile e $t_0 \in \mathbb{R}$; anche il segnale traslato $t \mapsto x(t - t_0)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione.

Con un cambiamento di variabile, per un'arbitraria $\varphi \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle x(t - t_0), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t + t_0) dt = \langle x(t), \varphi(t + t_0) \rangle.\end{aligned}\tag{11}$$

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo la traslazione.

Siano x localmente sommabile e $t_0 \in \mathbb{R}$; anche il segnale traslato $t \mapsto x(t - t_0)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione.

Con un cambiamento di variabile, per un'arbitraria $\varphi \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle x(t - t_0), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t + t_0) dt = \langle x(t), \varphi(t + t_0) \rangle.\end{aligned}\tag{11}$$

Dunque, il valore di $x(t - t_0)$ su $\varphi(t)$ è pari al valore di $x(t)$ su $\varphi(t + t_0)$.

Operazioni sulle distribuzioni

Questa definizione si estende subito al caso di una distribuzione qualsiasi T .

Operazioni sulle distribuzioni

Questa definizione si estende subito al caso di una distribuzione qualsiasi T .

Indicheremo con $T(t - t_0)$ la distribuzione traslata, che è definita ponendo

Operazioni sulle distribuzioni

Questa definizione si estende subito al caso di una distribuzione qualsiasi T .

Indicheremo con $T(t - t_0)$ la distribuzione traslata, che è definita ponendo

$$\langle T(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t + t_0) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (12)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Questa definizione si estende subito al caso di una distribuzione qualsiasi T .

Indicheremo con $T(t - t_0)$ la distribuzione traslata, che è definita ponendo

$$\langle T(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t + t_0) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (12)$$

È chiaro che $t \mapsto \varphi(t + t_0)$ è una funzione test e il secondo membro di (12) definisce una distribuzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Questa definizione si estende subito al caso di una distribuzione qualsiasi T .

Indicheremo con $T(t - t_0)$ la distribuzione traslata, che è definita ponendo

$$\langle T(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t + t_0) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (12)$$

È chiaro che $t \mapsto \varphi(t + t_0)$ è una funzione test e il secondo membro di (12) definisce una distribuzione.

Si apprezza nella (12) l'utilità dell'abuso di notazioni $T(t)$, e analogamente $T(t - t_0)$.

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che, per introdurre l'operazione di traslazione per le distribuzioni, tale operazione è stata *scaricata* sulla funzione test.

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che, per introdurre l'operazione di traslazione per le distribuzioni, tale operazione è stata *scaricata* sulla funzione test.

È questo un modo di procedere che useremo spessissimo.

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che, per introdurre l'operazione di traslazione per le distribuzioni, tale operazione è stata *scaricata* sulla funzione test.

È questo un modo di procedere che useremo spessissimo.

Ad esempio, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \delta(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t + t_0) \rangle = \varphi(t_0).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che, per introdurre l'operazione di traslazione per le distribuzioni, tale operazione è stata *scaricata* sulla funzione test.

È questo un modo di procedere che useremo spessissimo.

Ad esempio, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \delta(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t + t_0) \rangle = \varphi(t_0).$$

La distribuzione $\delta(t - t_0)$ si chiama *impulso unitario concentrato in t_0* ed è suscettibile di una rappresentazione grafica analoga alla δ :

Operazioni sulle distribuzioni

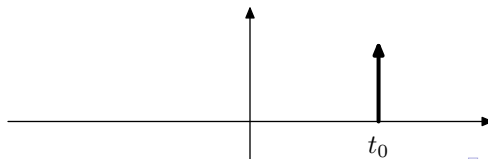
Notiamo che, per introdurre l'operazione di traslazione per le distribuzioni, tale operazione è stata *scaricata* sulla funzione test.

È questo un modo di procedere che useremo spessissimo.

Ad esempio, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \delta(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t + t_0) \rangle = \varphi(t_0).$$

La distribuzione $\delta(t - t_0)$ si chiama *impulso unitario concentrato in t_0* ed è suscettibile di una rappresentazione grafica analoga alla δ :



Operazioni sulle distribuzioni

Una distribuzione T si dice *periodica* di periodo $\tau > 0$ se verifica

$$T(t + \tau) = T(t).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Una distribuzione T si dice *periodica* di periodo $\tau > 0$ se verifica

$$T(t + \tau) = T(t).$$

Una distribuzione regolare $x = T_x$ è periodica se e solo se lo è come funzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo riscaldamento e riflessione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo riscalamento e riflessione.

Dati un segnale localmente sommabile x e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, anche il segnale $t \mapsto x(at)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione e risulta, per $\varphi \in \mathcal{D}$,

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo riscaldamento e riflessione.

Dati un segnale localmente sommabile x e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, anche il segnale $t \mapsto x(at)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione e risulta, per $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\langle x(at), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \left\langle x(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle.\end{aligned}\tag{13}$$

Operazioni sulle distribuzioni

Se T è una distribuzione,

Operazioni sulle distribuzioni

Se T è una distribuzione, il riscalamento $T(at)$ è la distribuzione che a $\varphi(t)$ associa il valore di T sulla funzione test $\frac{1}{|a|}\varphi(t/a)$:

Operazioni sulle distribuzioni

Se T è una distribuzione, il riscalamento $T(at)$ è la distribuzione che a $\varphi(t)$ associa il valore di T sulla funzione test $\frac{1}{|a|}\varphi(t/a)$:

$$\langle T(at), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (14)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Se T è una distribuzione, il riscaldamento $T(at)$ è la distribuzione che a $\varphi(t)$ associa il valore di T sulla funzione test $\frac{1}{|a|}\varphi(t/a)$:

$$\langle T(at), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (14)$$

Ad esempio,

$$\langle \delta(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Una distribuzione T si dice *pari* [*dispari*] se verifica

$$T(-t) = T(t), \quad [T(-t) = -T(t)].$$

Operazioni sulle distribuzioni

Una distribuzione T si dice *pari* [*dispari*] se verifica

$$T(-t) = T(t), \quad [T(-t) = -T(t)].$$

Ad esempio, δ è pari; v.p. $\frac{1}{t}$ è dispari.

Operazioni sulle distribuzioni

Una distribuzione T si dice *pari* [*dispari*] se verifica

$$T(-t) = T(t), \quad [T(-t) = -T(t)].$$

Ad esempio, δ è pari; v.p. $\frac{1}{t}$ è dispari.

Una distribuzione regolare $x = T_x$ è pari o dispari se e solo se è tale come funzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo il prodotto di una distribuzione per una funzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo il prodotto di una distribuzione per una funzione.

Date $\alpha \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$, si definisce la distribuzione αT prodotto di α per T ponendo

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (15)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo il prodotto di una distribuzione per una funzione.

Date $\alpha \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$, si definisce la distribuzione αT prodotto di α per T ponendo

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (15)$$

Notiamo che se φ è una funzione test, tale è pure $\alpha \varphi$, essendo $\alpha \in C^\infty$.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo il prodotto di una distribuzione per una funzione.

Date $\alpha \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$, si definisce la distribuzione αT prodotto di α per T ponendo

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (15)$$

Notiamo che se φ è una funzione test, tale è pure $\alpha \varphi$, essendo $\alpha \in C^\infty$.

Inoltre

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \alpha \varphi,$$

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo il prodotto di una distribuzione per una funzione.

Date $\alpha \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$, si definisce la distribuzione αT prodotto di α per T ponendo

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (15)$$

Notiamo che se φ è una funzione test, tale è pure $\alpha \varphi$, essendo $\alpha \in C^\infty$.

Inoltre

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \alpha \varphi,$$

quindi il secondo membro di (15) definisce effettivamente una distribuzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Fondamentale è la *proprietà di campionamento* della δ , espressa dalla formula seguente:

$$\alpha(t) \delta(t - t_0) = \alpha(t_0) \delta(t - t_0). \quad (16)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Fondamentale è la *proprietà di campionamento* della δ , espressa dalla formula seguente:

$$\alpha(t) \delta(t - t_0) = \alpha(t_0) \delta(t - t_0). \quad (16)$$

A primo membro figura il prodotto della funzione α per l'impulso concentrato in $t_0 \in \mathbb{R}$.

Operazioni sulle distribuzioni

Fondamentale è la *proprietà di campionamento* della δ , espressa dalla formula seguente:

$$\alpha(t) \delta(t - t_0) = \alpha(t_0) \delta(t - t_0). \quad (16)$$

A primo membro figura il prodotto della funzione α per l'impulso concentrato in $t_0 \in \mathbb{R}$.

A secondo membro compare il prodotto dell'impulso per la costante $\alpha(t_0)$.

Operazioni sulle distribuzioni

Fondamentale è la *proprietà di campionamento* della δ , espressa dalla formula seguente:

$$\alpha(t) \delta(t - t_0) = \alpha(t_0) \delta(t - t_0). \quad (16)$$

A primo membro figura il prodotto della funzione α per l'impulso concentrato in $t_0 \in \mathbb{R}$.

A secondo membro compare il prodotto dell'impulso per la costante $\alpha(t_0)$.

Ad esempio

$$\sin t \delta(t) = 0, \quad \sin t \delta(t + \pi/2) = \sin(-\pi/2) \delta(t + \pi/2) = -\delta(t + \pi/2).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo limite e serie in $\mathcal{D}'$.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo limite e serie in $\mathcal{D}'$.

Siano (T_n) una successione di distribuzioni e T una distribuzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo limite e serie in $\mathcal{D}'$.

Siano (T_n) una successione di distribuzioni e T una distribuzione.

Si dice che T è il limite di (T_n) , o che (T_n) converge a T nel senso delle distribuzioni, e si scrive

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo limite e serie in $\mathcal{D}'$.

Siano (T_n) una successione di distribuzioni e T una distribuzione.

Si dice che T è il limite di (T_n) , o che (T_n) converge a T nel senso delle distribuzioni, e si scrive

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo limite e serie in $\mathcal{D}'$.

Siano (T_n) una successione di distribuzioni e T una distribuzione.

Si dice che T è il limite di (T_n) , o che (T_n) converge a T nel senso delle distribuzioni, e si scrive

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

In altri termini, (T_n) converge a T puntualmente su $\mathcal{D}$.

Operazioni sulle distribuzioni

Mostriamo che la successione (x_n) di distribuzioni regolari definite in (2) converge a δ nel senso delle distribuzioni.

Operazioni sulle distribuzioni

Mostriamo che la successione (x_n) di distribuzioni regolari definite in (2) converge a δ nel senso delle distribuzioni.

Dunque questa è la corretta nozione di limite da usare nel punto (b) dell'introduzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Mostriamo che la successione (x_n) di distribuzioni regolari definite in (2) converge a δ nel senso delle distribuzioni.

Dunque questa è la corretta nozione di limite da usare nel punto (b) dell'introduzione.

Per il teorema della media,

$$\langle x_n, \varphi \rangle = n \int_{-1/(2n)}^{1/(2n)} \varphi(t) dt = \varphi(t_n),$$

Operazioni sulle distribuzioni

Mostriamo che la successione (x_n) di distribuzioni regolari definite in (2) converge a δ nel senso delle distribuzioni.

Dunque questa è la corretta nozione di limite da usare nel punto (b) dell'introduzione.

Per il teorema della media,

$$\langle x_n, \varphi \rangle = n \int_{-1/(2n)}^{1/(2n)} \varphi(t) dt = \varphi(t_n),$$

con $-1/(2n) \leq t_n \leq 1/(2n)$, e passiamo al limite per la continuità di φ in 0:

$$\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Operazioni sulle distribuzioni

Si dice che T è la somma della serie $\sum_n T_n$ in $\mathcal{D}'$ e si scrive

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n \quad \text{in } \mathcal{D}',$$

se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Operazioni sulle distribuzioni

Si dice che T è la somma della serie $\sum_n T_n$ in $\mathcal{D}'$ e si scrive

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n \quad \text{in } \mathcal{D}',$$

se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Anche in questo caso la convergenza è puntuale su $\mathcal{D}$.

Operazioni sulle distribuzioni

Si dice che T è la somma della serie $\sum_n T_n$ in $\mathcal{D}'$ e si scrive

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n \quad \text{in } \mathcal{D}',$$

se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Anche in questo caso la convergenza è puntuale su $\mathcal{D}$.

Equivalentemente, la successione delle somme parziali converge in $\mathcal{D}'$.

Operazioni sulle distribuzioni

Un esempio importante di distribuzione definita mediante una serie è il *treno di impulsi*.

Operazioni sulle distribuzioni

Un esempio importante di distribuzione definita mediante una serie è il *treno di impulsi*.

Dato $\tau > 0$, poniamo

$$s_\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau). \quad (17)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Un esempio importante di distribuzione definita mediante una serie è il *treno di impulsi*.

Dato $\tau > 0$, poniamo

$$s_\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau). \quad (17)$$

Evidentemente si tratta di una distribuzione periodica di periodo τ . Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, risulta

$$\langle s_\tau, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n\tau),$$

la serie essendo in realtà una somma finita, poichè per $|n|$ grande risulta $n\tau \notin \text{supp } \varphi$.

Operazioni sulle distribuzioni

Più in generale, data una qualsiasi successione $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi, possiamo definire la distribuzione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(t - n\tau).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Più in generale, data una qualsiasi successione $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi, possiamo definire la distribuzione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(t - n\tau).$$

Ad esempio, dato il segnale continuo α , definiamo il *campionamento con passo $\tau > 0$* :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \delta(t - n\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha(n\tau) \delta(t - n\tau).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Ci occupiamo ora di estendere il prodotto di convoluzione in ambito distribuzionale.

Operazioni sulle distribuzioni

Ci occupiamo ora di estendere il prodotto di convoluzione in ambito distribuzionale.

Introduciamo preliminarmente il supporto di una distribuzione.

Operazioni sulle distribuzioni

Ci occupiamo ora di estendere il prodotto di convoluzione in ambito distribuzionale.

Introduciamo preliminarmente il supporto di una distribuzione.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto.

Operazioni sulle distribuzioni

Ci occupiamo ora di estendere il prodotto di convoluzione in ambito distribuzionale.

Introduciamo preliminarmente il supporto di una distribuzione.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto.

Si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è *nulla* in Ω se risulta

$$\varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Operazioni sulle distribuzioni

Ci occupiamo ora di estendere il prodotto di convoluzione in ambito distribuzionale.

Introduciamo preliminarmente il supporto di una distribuzione.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto.

Si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è *nulla* in Ω se risulta

$$\varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Se $x \in L^1_{\text{loc}}$, la distribuzione regolare T_x è nulla su Ω se e solo se risulta $x(t) = 0$, per q.o. $t \in \Omega$.

Operazioni sulle distribuzioni

Ci occupiamo ora di estendere il prodotto di convoluzione in ambito distribuzionale.

Introduciamo preliminarmente il supporto di una distribuzione.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto.

Si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è *nulla* in Ω se risulta

$$\varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Se $x \in L^1_{\text{loc}}$, la distribuzione regolare T_x è nulla su Ω se e solo se risulta $x(t) = 0$, per q.o. $t \in \Omega$.

Si dice che due distribuzioni T_1 e T_2 sono uguali in Ω se $T_1 - T_2$ è nulla in Ω .

Operazioni sulle distribuzioni

Il complementare del più grande aperto in cui T è nulla si dice supporto della distribuzione T .

Operazioni sulle distribuzioni

Il complementare del più grande aperto in cui T è nulla si dice supporto della distribuzione T .

Ad esempio, δ è nulla in $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$, quindi il supporto è compatto: $\text{supp } \delta = \{0\}$.

Operazioni sulle distribuzioni

Il complementare del più grande aperto in cui T è nulla si dice supporto della distribuzione T .

Ad esempio, δ è nulla in $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$, quindi il supporto è compatto: $\text{supp } \delta = \{0\}$.

Se $T = T_x$, con x continua, il supporto di T_x coincide con $\text{supp } x$ definito precedentemente.

Operazioni sulle distribuzioni

Il complementare del più grande aperto in cui T è nulla si dice supporto della distribuzione T .

Ad esempio, δ è nulla in $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$, quindi il supporto è compatto: $\text{supp } \delta = \{0\}$.

Se $T = T_x$, con x continua, il supporto di T_x coincide con $\text{supp } x$ definito precedentemente.

Osservazione

Si può parlare di supporto di una $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Operazioni sulle distribuzioni

Il complementare del più grande aperto in cui T è nulla si dice supporto della distribuzione T .

Ad esempio, δ è nulla in $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$, quindi il supporto è compatto: $\text{supp } \delta = \{0\}$.

Se $T = T_x$, con x continua, il supporto di T_x coincide con $\text{supp } x$ definito precedentemente.

Osservazione

Si può parlare di supporto di una $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Il supporto non cambia modificando x su un insieme trascurabile, quindi non dipende dalla singola funzione x , ma dall'elemento di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ da essa individuato.

Operazioni sulle distribuzioni

Osservazione

Se $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto, si può definire $\langle T, \varphi \rangle$ per $\varphi \in C^\infty$, non necessariamente a supporto compatto.

Operazioni sulle distribuzioni

Osservazione

Se $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto, si può definire $\langle T, \varphi \rangle$ per $\varphi \in C^\infty$, non necessariamente a supporto compatto.

A tale scopo, scegliamo $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi \equiv 1$ in un aperto contenente $\text{supp } T$, e poniamo

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle. \quad (18)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Osservazione

Se $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto, si può definire $\langle T, \varphi \rangle$ per $\varphi \in C^\infty$, non necessariamente a supporto compatto.

A tale scopo, scegliamo $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi \equiv 1$ in un aperto contenente $\text{supp } T$, e poniamo

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle. \quad (18)$$

Si verifica che l'espressione non dipende da ψ .

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo ora il prodotto di convoluzione tra distribuzioni.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo ora il prodotto di convoluzione tra distribuzioni.

Cominciamo dal caso delle funzioni.

Operazioni sulle distribuzioni

Definiamo ora il prodotto di convoluzione tra distribuzioni.

Cominciamo dal caso delle funzioni.

Sappiamo che se $x, y \in L^1$, risulta $x * y \in L^1$ e quindi può essere interpretata come distribuzione:

$$\begin{aligned}\langle x * y, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) y(t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} y(r) \varphi(r+s) dr \\ &= \left\langle x(s), \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle \right\rangle.\end{aligned}\tag{19}$$

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che la funzione

$$\psi: s \mapsto \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle$$

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che la funzione

$$\psi: s \mapsto \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle$$

è di classe C^∞ , ma, in generale, non è a supporto compatto, quindi non appartiene a $\mathcal{D}$.

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che la funzione

$$\psi: s \mapsto \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle$$

è di classe C^∞ , ma, in generale, non è a supporto compatto, quindi non appartiene a $\mathcal{D}$.

Per tal motivo la formula (19) non può essere direttamente generalizzata al caso delle distribuzioni.

Operazioni sulle distribuzioni

Notiamo che la funzione

$$\psi: s \mapsto \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle$$

è di classe C^∞ , ma, in generale, non è a supporto compatto, quindi non appartiene a $\mathcal{D}$.

Per tal motivo la formula (19) non può essere direttamente generalizzata al caso delle distribuzioni.

D'altra parte, ψ ha supporto compatto, quindi $\psi \in \mathcal{D}$, se y ha supporto compatto.

Operazioni sulle distribuzioni

La (19) suggerisce allora di definire la convoluzione di due distribuzioni $T * S$, con S a supporto compatto, mediante la formula

$$\langle T * S(t), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(s), \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle \right\rangle. \quad (20)$$

Operazioni sulle distribuzioni

La (19) suggerisce allora di definire la convoluzione di due distribuzioni $T * S$, con S a supporto compatto, mediante la formula

$$\langle T * S(t), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(s), \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle \right\rangle. \quad (20)$$

In effetti,

$$s \mapsto \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle$$

è una funzione test.

Operazioni sulle distribuzioni

La (19) suggerisce allora di definire la convoluzione di due distribuzioni $T * S$, con S a supporto compatto, mediante la formula

$$\langle T * S(t), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(s), \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle \right\rangle. \quad (20)$$

In effetti,

$$s \mapsto \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle$$

è una funzione test.

Per [l'osservazione precedente](#), $T * S$ può essere definita mediante (20) anche se T ha supporto compatto.

Operazioni sulle distribuzioni

La (19) suggerisce allora di definire la convoluzione di due distribuzioni $T * S$, con S a supporto compatto, mediante la formula

$$\langle T * S(t), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(s), \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle \right\rangle. \quad (20)$$

In effetti,

$$s \mapsto \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle$$

è una funzione test.

Per [l'osservazione precedente](#), $T * S$ può essere definita mediante (20) anche se T ha supporto compatto.

Inoltre

$$T * S = S * T.$$

Operazioni sulle distribuzioni

Esempio

La δ è l'unità del prodotto di convoluzione, cioè risulta

$$T * \delta = T, \quad \forall T \in \mathcal{D}'. \quad (21)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Esempio

La δ è l'unità del prodotto di convoluzione, cioè risulta

$$T * \delta = T, \quad \forall T \in \mathcal{D}'. \quad (21)$$

Basta osservare che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, risulta

$$\langle \delta(r), \varphi(r+s) \rangle = [\varphi(r+s)]_{r=0} = \varphi(s).$$

Operazioni sulle distribuzioni

Esempio

La δ è l'unità del prodotto di convoluzione, cioè risulta

$$T * \delta = T, \quad \forall T \in \mathcal{D}'. \quad (21)$$

Basta osservare che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, risulta

$$\langle \delta(r), \varphi(r+s) \rangle = [\varphi(r+s)]_{r=0} = \varphi(s).$$

Più in generale, si verificano le formule

$$T(t) * \delta(t-t_0) = T(t-t_0), \quad T * s_\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T(t-n\tau). \quad (22)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Osserviamo che risulta, se (ad esempio) S ha supporto compatto,

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \quad \Rightarrow \quad T_n * S \xrightarrow{\mathcal{D}'} T * S. \quad (23)$$

Operazioni sulle distribuzioni

Osserviamo che risulta, se (ad esempio) S ha supporto compatto,

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \quad \Rightarrow \quad T_n * S \xrightarrow{\mathcal{D}'} T * S. \quad (23)$$

In effetti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\psi(s) := \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle$$

è una funzione test,

Operazioni sulle distribuzioni

Osserviamo che risulta, se (ad esempio) S ha supporto compatto,

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \quad \Rightarrow \quad T_n * S \xrightarrow{\mathcal{D}'} T * S. \quad (23)$$

In effetti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\psi(s) := \langle S(r), \varphi(r + s) \rangle$$

è una funzione test, quindi

$$\langle T_n, \psi \rangle \rightarrow \langle T, \psi \rangle.$$

Derivata di distribuzioni

Data $T \in \mathcal{D}'$, si dice *derivata* di T , e si indica con T' , la distribuzione definita ponendo

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (24)$$

Derivata di distribuzioni

Data $T \in \mathcal{D}'$, si dice *derivata* di T , e si indica con T' , la distribuzione definita ponendo

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (24)$$

Evidentemente $\varphi' \in \mathcal{D}$ e l'espressione a secondo membro è continua su $\mathcal{D}$, quindi definisce effettivamente una distribuzione.

Derivata di distribuzioni

Data $T \in \mathcal{D}'$, si dice *derivata* di T , e si indica con T' , la distribuzione definita ponendo

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (24)$$

Evidentemente $\varphi' \in \mathcal{D}$ e l'espressione a secondo membro è continua su $\mathcal{D}$, quindi definisce effettivamente una distribuzione.

Nel caso in cui $T = T_x = x$ sia una distribuzione regolare con x di classe C^1 , o più in generale assolutamente continua (sugli intervalli compatti), la (24) si riduce alla formula di integrazione per parti: con $T' = x'$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi'(t) dt,$$

essendo φ nulla intorno a $\mp\infty$.

Derivata di distribuzioni

Proposizione

Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti di $\mathbb{R}$, la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata ordinaria, cioè risulta $T'_x = T_{x'}$.

Derivata di distribuzioni

Proposizione

Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti di $\mathbb{R}$, la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata ordinaria, cioè risulta $T'_x = T_{x'}$.

Mostriamo che δ è la derivata distribuzionale del gradino:

$$u' = \delta. \quad (25)$$

Derivata di distribuzioni

Proposizione

Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti di $\mathbb{R}$, la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata ordinaria, cioè risulta $T'_x = T_{x'}$.

Mostriamo che δ è la derivata distribuzionale del gradino:

$$u' = \delta. \quad (25)$$

In base alla definizione (24), $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Derivata di distribuzioni

Osservazione

Il gradino $u(t)$ è dotato di derivata ordinaria Du (limite puntuale del rapporto incrementale) nulla in ogni punto $t \neq 0$:

$$Du(t) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

Derivata di distribuzioni

Osservazione

Il gradino $u(t)$ è dotato di derivata ordinaria Du (limite puntuale del rapporto incrementale) nulla in ogni punto $t \neq 0$:

$$Du(t) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

Dalla derivata ordinaria, che è dunque definita q.o., non è possibile ricostruire la $u(t)$.

Derivata di distribuzioni

Osservazione

Il gradino $u(t)$ è dotato di derivata ordinaria Du (limite puntuale del rapporto incrementale) nulla in ogni punto $t \neq 0$:

$$Du(t) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

Dalla derivata ordinaria, che è dunque definita q.o., non è possibile ricostruire la $u(t)$.

È possibile invece mostrare che u è determinata dalla (25) a meno di una costante additiva, cioè se $x' = \delta$ in $\mathcal{D}'$, risulta $x = u + c$, con c costante.

Derivata di distribuzioni

Osservazione

Il gradino $u(t)$ è dotato di derivata ordinaria Du (limite puntuale del rapporto incrementale) nulla in ogni punto $t \neq 0$:

$$Du(t) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

Dalla derivata ordinaria, che è dunque definita q.o., non è possibile ricostruire la $u(t)$.

È possibile invece mostrare che u è determinata dalla (25) a meno di una costante additiva, cioè se $x' = \delta$ in $\mathcal{D}'$, risulta $x = u + c$, con c costante.

In questo senso, quella distribuzionale è la “giusta” nozione di derivata.

Derivata di distribuzioni

La (25) mostra che in corrispondenza della discontinuità di u in 0, nella derivazione compare un impulso concentrato in tale punto, di area 1, pari al salto di discontinuità; questo vale più in generale.

Derivata di distribuzioni

La (25) mostra che in corrispondenza della discontinuità di u in 0 , nella derivazione compare un impulso concentrato in tale punto, di area 1, pari al salto di discontinuità; questo vale più in generale.

Consideriamo ad esempio una funzione x che sia C^1 a tratti su ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$: una tale funzione ha solo discontinuità di I specie, in numero finito o un'infinità numerabile, ma priva di punti di accumulazione al finito; inoltre è derivabile (in senso ordinario) q.o. con derivata Dx localmente sommabile.

Derivata di distribuzioni

Proposizione

La derivata distribuzionale x' di x è somma della derivata ordinaria Dx ed impulsi concentrati nei punti di discontinuità, ciascuno con area pari al salto di discontinuità:

$$x' = Dx(t) + \sum_k [x(t_k+) - x(t_k-)] \delta(t - t_k). \quad (26)$$

Derivata di distribuzioni

Esempio

Dato $a > 0$, calcoliamo la derivata del segnale

$$x(t) = u(t+a) - u(t-a) = \Pi(t/(2a)) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < t < a, \\ 0, & \text{se } t < -a \text{ o } t > a. \end{cases}$$

Il segnale è discontinuo in $\mp a$, con salti di discontinuità ± 1 ; inoltre la derivata ordinaria è nulla q.o., quindi

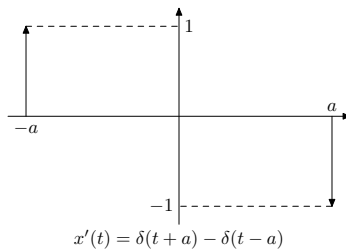
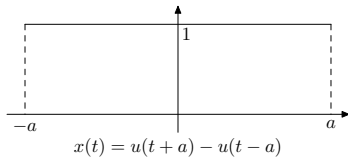
$$x'(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a).$$

Derivata di distribuzioni

Graficamente:

Derivata di distribuzioni

Graficamente:



Derivata di distribuzioni

Esempio

Calcoliamo la derivata del segnale

$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)] = \begin{cases} \sin t, & \text{per } 0 < t < \pi/2, \\ 0, & \text{per } t < 0 \text{ e } t > \pi/2. \end{cases}$$

Il segnale è discontinuo in $\pi/2$, con salto di discontinuità -1 .

Derivata di distribuzioni

Esempio

Calcoliamo la derivata del segnale

$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)] = \begin{cases} \sin t, & \text{per } 0 < t < \pi/2, \\ 0, & \text{per } t < 0 \text{ e } t > \pi/2. \end{cases}$$

Il segnale è discontinuo in $\pi/2$, con salto di discontinuità -1 .

La derivata ordinaria è

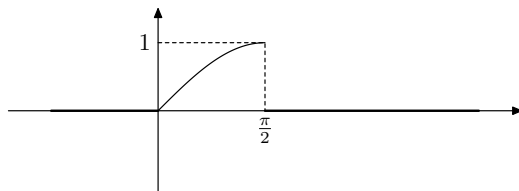
$$Dx(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] = \begin{cases} \cos t, & \text{per } 0 < t < \pi/2, \\ 0, & \text{per } t < 0 \text{ e } t > \pi/2. \end{cases}$$

Derivata di distribuzioni

Graficamente:

Derivata di distribuzioni

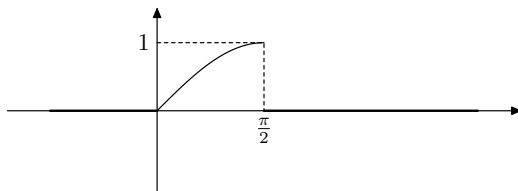
Graficamente:



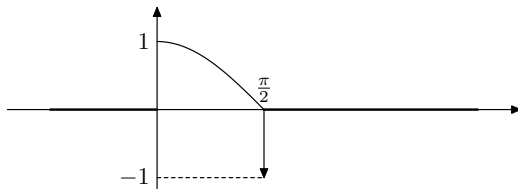
$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)]$$

Derivata di distribuzioni

Graficamente:



$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)]$$



$$x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] - \delta(t - \pi/2)$$

Derivata di distribuzioni

Valgono le seguenti formule (identiche a quelle nel caso delle funzioni):

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T', \quad (T(at))' = a T'(at).$$

Derivata di distribuzioni

Valgono le seguenti formule (identiche a quelle nel caso delle funzioni):

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T', \quad (T(at))' = a T'(at).$$

A scopo illustrativo, deriviamo nuovamente

$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)].$$

Derivata di distribuzioni

Valgono le seguenti formule (identiche a quelle nel caso delle funzioni):

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T', \quad (T(at))' = a T'(at).$$

A scopo illustrativo, deriviamo nuovamente

$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)].$$

Usando la prima delle formule precedenti, abbiamo

$$x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] + \sin t [\delta(t) - \delta(t - \pi/2)].$$

Derivata di distribuzioni

Valgono le seguenti formule (identiche a quelle nel caso delle funzioni):

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T', \quad (T(at))' = a T'(at).$$

A scopo illustrativo, deriviamo nuovamente

$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)].$$

Usando la prima delle formule precedenti, abbiamo

$$x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] + \sin t [\delta(t) - \delta(t - \pi/2)].$$

Trattiamo i termini impulsivi mediante la proprietà di campionamento della δ (16):

Derivata di distribuzioni

$$\sin t \delta(t) = \sin 0 \delta(t) = 0,$$

Derivata di distribuzioni

$$\sin t \delta(t) = \sin 0 \delta(t) = 0,$$

$$\sin t \delta(t - \pi/2) = \sin \pi/2 \delta(t - \pi/2) = \delta(t - \pi/2).$$

Derivata di distribuzioni

$$\sin t \delta(t) = \sin 0 \delta(t) = 0,$$

$$\sin t \delta(t - \pi/2) = \sin \pi/2 \delta(t - \pi/2) = \delta(t - \pi/2).$$

Pertanto ritroviamo

$$x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] - \delta(t - \pi/2).$$

Derivata di distribuzioni

$$\sin t \delta(t) = \sin 0 \delta(t) = 0,$$

$$\sin t \delta(t - \pi/2) = \sin \pi/2 \delta(t - \pi/2) = \delta(t - \pi/2).$$

Pertanto ritroviamo

$$x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] - \delta(t - \pi/2).$$

La derivazione è un'operazione continua in $\mathcal{D}'$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T'_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T', \quad T = \sum_n T_n \Rightarrow T' = \sum_n T'_n. \quad (27)$$

Derivata di distribuzioni

$$\sin t \delta(t) = \sin 0 \delta(t) = 0,$$

$$\sin t \delta(t - \pi/2) = \sin \pi/2 \delta(t - \pi/2) = \delta(t - \pi/2).$$

Pertanto ritroviamo

$$x'(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] - \delta(t - \pi/2).$$

La derivazione è un'operazione continua in $\mathcal{D}'$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T'_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T', \quad T = \sum_n T_n \Rightarrow T' = \sum_n T'_n. \quad (27)$$

Per quanto riguarda la derivata della convoluzione, vale la formula

$$(T * S)' = T * S' = T' * S. \quad (28)$$

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson)

Sia x il segnale periodico di periodo $\tau > 0$ che vale

$$x(t) = t \text{ per } 0 < t < \tau,$$

(onda a dente di sega).

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson)

Sia x il segnale periodico di periodo $\tau > 0$ che vale

$$x(t) = t \text{ per } 0 < t < \tau,$$

(onda a dente di sega).

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Fourier; posto $\omega_0 = 2\pi/\tau$, risulta

$$x(t) = \frac{\tau}{2} + j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k \omega_0} e^{jk\omega_0 t} \quad (29)$$

nel senso dell'energia su ogni intervallo limitato e quindi anche in $\mathcal{D}'$.

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson)

Sia x il segnale periodico di periodo $\tau > 0$ che vale

$$x(t) = t \text{ per } 0 < t < \tau,$$

(onda a dente di sega).

Ricordiamo lo sviluppo in serie di Fourier; posto $\omega_0 = 2\pi/\tau$, risulta

$$x(t) = \frac{\tau}{2} + j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k \omega_0} e^{jk\omega_0 t} \quad (29)$$

nel senso dell'energia su ogni intervallo limitato e quindi anche in $\mathcal{D}'$.

Deriviamo nel senso delle distribuzioni.

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson: continuazione)

La derivata ordinaria di x è

$$Dx(t) = 1,$$

per $t \neq k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$.

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson: continuazione)

La derivata ordinaria di x è

$$Dx(t) = 1,$$

per $t \neq k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$.

In questi punti x è discontinuo, con salto di discontinuità $-\tau$.

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson: continuazione)

La derivata ordinaria di x è

$$Dx(t) = 1,$$

per $t \neq k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$.

In questi punti x è discontinuo, con salto di discontinuità $-\tau$.

Pertanto

$$1 - \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) = - \sum_{k \neq 0} e^{jk\omega_0 t}. \quad (30)$$

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson: continuazione)

Osservando che **il primo addendo a primo membro** è il termine escluso nella sommatoria a secondo membro (per $k = 0$), da (30) otteniamo l'uguaglianza

$$\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}, \quad (31)$$

che prende il nome di *formula di Poisson*.

Derivata di distribuzioni

Esempio (Formula di Poisson: continuazione)

Osservando che **il primo addendo a primo membro** è il termine escluso nella sommatoria a secondo membro (per $k = 0$), da (30) otteniamo l'uguaglianza

$$\tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}, \quad (31)$$

che prende il nome di *formula di Poisson*.

Ricordando la definizione (17) del treno di impulsi, la (31) si riscrive

$$s_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}. \quad (32)$$

Derivata di distribuzioni

Le distribuzioni sono indefinitamente derivabili; la derivata n -sima di $T \in \mathcal{D}'$ è

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (33)$$

Derivata di distribuzioni

Le distribuzioni sono indefinitamente derivabili; la derivata n -sima di $T \in \mathcal{D}'$ è

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (33)$$

Esempio

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

δ -successioni

Come abbiamo osservato,

$$\delta = \lim_n n \Pi(n t)$$

nel senso delle distribuzioni.

δ -successioni

Come abbiamo osservato,

$$\delta = \lim_n n \Pi(n t)$$

nel senso delle distribuzioni.

Questo è un caso particolare del seguente

δ -successioni

Come abbiamo osservato,

$$\delta = \lim_n n \Pi(n t)$$

nel senso delle distribuzioni.

Questo è un caso particolare del seguente

Teorema

Se $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ è integrabile con $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1$, risulta

$$n x(n t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta. \quad (34)$$

Dalla approssimazione della δ , mediante convoluzione otteniamo risultati di approssimazione più generali.

Dalla approssimazione della δ , mediante convoluzione otteniamo risultati di approssimazione più generali.

Per (23), ricordando che δ è l'unità rispetto al prodotto di convoluzione, abbiamo

$$n x(n t) * S \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta * S = S.$$

δ -successioni

Dimostriamo il teorema.

δ -successioni

Dimostriamo il teorema.

Consideriamo la primitiva di $n \times (n t)$;

δ -successioni

Dimostriamo il teorema.

Consideriamo la primitiva di $x(t)$; poniamo

$$F(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

δ -successioni

Dimostriamo il teorema.

Consideriamo la primitiva di $n x(n t)$; poniamo

$$F(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

e

$$F_n(t) = F(n t) = \int_{-\infty}^{nt} x(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

δ -successioni

Dimostriamo il teorema.

Consideriamo la primitiva di $n x(n t)$; poniamo

$$F(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

e

$$F_n(t) = F(n t) = \int_{-\infty}^{nt} x(\tau) d\tau, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le F_n sono assolutamente continue sugli intervalli limitati e

$$F'_n(t) = n x(n t), \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{R}.$$

δ -successioni

Inoltre risulta

$$\lim_n F_n(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\infty} x(t) dt = 0, & \text{se } t < 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

δ -successioni

Inoltre risulta

$$\lim_n F_n(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\infty} x(t) dt = 0, & \text{se } t < 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\lim_n F_n(t) = u(t),$$

per $t \neq 0$.

δ -successioni

Inoltre risulta

$$\lim_n F_n(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\infty} x(t) dt = 0, & \text{se } t < 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\lim_n F_n(t) = u(t),$$

per $t \neq 0$.

Mostriamo che

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u.$$

δ -successioni

Poiché

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_n| = \sup_{\mathbb{R}} |F| ,$$

δ -successioni

Poiché

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_n| = \sup_{\mathbb{R}} |F| ,$$

le F_n sono equilimitate.

δ -successioni

Poiché

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_n| = \sup_{\mathbb{R}} |F| ,$$

le F_n sono equilimitate.

Pertanto, fissata $\varphi \in \mathcal{D}$, mediante il teorema di Lebesgue della convergenza dominata otteniamo

$$\lim_n \langle F_n, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt = \langle u, \varphi \rangle ,$$

ovvero la tesi.

δ -successioni

Poiché

$$\sup_{\mathbb{R}} |F_n| = \sup_{\mathbb{R}} |F| ,$$

le F_n sono equilimitate.

Pertanto, fissata $\varphi \in \mathcal{D}$, mediante il teorema di Lebesgue della convergenza dominata otteniamo

$$\lim_n \langle F_n, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt = \langle u, \varphi \rangle ,$$

ovvero la tesi.

Basta allora derivare, ricordando la (25), e usare la continuità dell'operazione di derivazione: la (34) è precisamente la convergenza delle derivate in $\mathcal{D}'$.

δ -successioni

Esempio

Poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi,$$

applicando il teorema, otteniamo le seguenti relazioni di limite:

$$\frac{n}{\pi(1+n^2 t^2)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad \frac{n e^{-n^2 t^2}}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad \frac{\sin n t}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Estendiamo ora la trasformazione di Fourier alle distribuzioni.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Estendiamo ora la trasformazione di Fourier alle distribuzioni.

Definiremo la trasformata di Fourier in un sottospazio di $\mathcal{D}'$, lo spazio delle *distribuzioni temperate*, che si costruisce scegliendo come funzioni test le funzioni a decrescenza rapida.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Estendiamo ora la trasformazione di Fourier alle distribuzioni.

Definiremo la trasformata di Fourier in un sottospazio di $\mathcal{D}'$, lo spazio delle *distribuzioni temperate*, che si costruisce scegliendo come funzioni test le funzioni a decrescenza rapida.

Procediamo esattamente come abbiamo fatto per introdurre $\mathcal{D}'$ a partire da $\mathcal{D}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Introduciamo una nozione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Introduciamo una nozione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

Definizione

Siano (φ_n) una successione in $\mathcal{S}$ e $\varphi \in \mathcal{S}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Introduciamo una nozione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

Definizione

Siano (φ_n) una successione in $\mathcal{S}$ e $\varphi \in \mathcal{S}$.

Si dice che (φ_n) converge a φ in $\mathcal{S}$ e si scrive

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Introduciamo una nozione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

Definizione

Siano (φ_n) una successione in $\mathcal{S}$ e $\varphi \in \mathcal{S}$.

Si dice che (φ_n) converge a φ in $\mathcal{S}$ e si scrive

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$$

se, $\forall k, p \in \mathbb{N}_0$, risulta

$$\lim_n \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p [\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)]| = 0.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Definizione

Si dice distribuzione temperata ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{S}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Definizione

Si dice distribuzione temperata ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{S}$.

Lo spazio delle distribuzioni temperate si denota con $\mathcal{S}'$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Definizione

Si dice distribuzione temperata ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{S}$.

Lo spazio delle distribuzioni temperate si denota con $\mathcal{S}'$.

Osserviamo che $\mathcal{D}$ è un sottospazio di $\mathcal{S}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Definizione

Si dice distribuzione temperata ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{S}$.

Lo spazio delle distribuzioni temperate si denota con $\mathcal{S}'$.

Osserviamo che $\mathcal{D}$ è un sottospazio di $\mathcal{S}$.

Inoltre la convergenza in $\mathcal{D}$ è più forte di quella in $\mathcal{S}$, cioè, se (φ_n) è una successione in $\mathcal{D}$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, vale l'implicazione

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi. \quad (35)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Ne segue che, se $T \in \mathcal{S}'$, la sua restrizione a $\mathcal{D}$ è lineare e continua su $\mathcal{D}$, cioè appartiene a $\mathcal{D}'$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Ne segue che, se $T \in \mathcal{S}'$, la sua restrizione a $\mathcal{D}$ è lineare e continua su $\mathcal{D}$, cioè appartiene a $\mathcal{D}'$.

Inoltre si mostra che, se $T, S \in \mathcal{S}'$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (36)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Ne segue che, se $T \in \mathcal{S}'$, la sua restrizione a $\mathcal{D}$ è lineare e continua su $\mathcal{D}$, cioè appartiene a $\mathcal{D}'$.

Inoltre si mostra che, se $T, S \in \mathcal{S}'$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (36)$$

Pertanto ogni distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$ è identificabile con la sua restrizione a $\mathcal{D}$, quindi è una distribuzione in $\mathcal{D}'$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Ne segue che, se $T \in \mathcal{S}'$, la sua restrizione a $\mathcal{D}$ è lineare e continua su $\mathcal{D}$, cioè appartiene a $\mathcal{D}'$.

Inoltre si mostra che, se $T, S \in \mathcal{S}'$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (36)$$

Pertanto ogni distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$ è identificabile con la sua restrizione a $\mathcal{D}$, quindi è una distribuzione in $\mathcal{D}'$.

Equivalentemente, le distribuzioni temperate sono gli elementi di $\mathcal{D}'$ prolungabili a $\mathcal{S}$ come funzionali continui.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Esempio

Non tutte le distribuzioni regolari, cioè le funzioni L^1_{loc} , sono distribuzioni temperate: non avendo in generale le funzioni test supporto compatto, è necessario un controllo sul comportamento all'infinito.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Esempio

Non tutte le distribuzioni regolari, cioè le funzioni L^1_{loc} , sono distribuzioni temperate: non avendo in generale le funzioni test supporto compatto, è necessario un controllo sul comportamento all'infinito.

Ad esempio, non individua una distribuzione temperata e^t .

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Esempio

Non tutte le distribuzioni regolari, cioè le funzioni L^1_{loc} , sono distribuzioni temperate: non avendo in generale le funzioni test supporto compatto, è necessario un controllo sul comportamento all'infinito.

Ad esempio, non individua una distribuzione temperata e^t .

Sono invece distribuzioni temperate le funzioni L^1 (con la posizione (8)), L^2 e più in generale L^p con $1 \leq p \leq \infty$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Esempio (continuazione)

Individua una distribuzione temperata ogni funzione $x(t)$ per la quale esista $p > 0$ tale che

$$\frac{x(t)}{1 + |t|^p} \in L^1.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Esempio (continuazione)

Individua una distribuzione temperata ogni funzione $x(t)$ per la quale esista $p > 0$ tale che

$$\frac{x(t)}{1 + |t|^p} \in L^1.$$

Individua una distribuzione temperata ogni funzione a *crescenza lenta*, cioè per la quale esistono $K > 0$ e $p > 0$ tali che

$$|x(t)| \leq K (1 + |t|^p).$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Esempio (continuazione)

Individua una distribuzione temperata ogni funzione $x(t)$ per la quale esista $p > 0$ tale che

$$\frac{x(t)}{1 + |t|^p} \in L^1.$$

Individua una distribuzione temperata ogni funzione a *crescenza lenta*, cioè per la quale esistono $K > 0$ e $p > 0$ tali che

$$|x(t)| \leq K(1 + |t|^p).$$

Sono altresì temperate le derivate di distribuzioni temperate, le distribuzioni periodiche, le distribuzioni a supporto compatto (ad esempio, la δ). v.p. $1/t$ è temperata.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Introduciamo ora la trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Introduciamo ora la trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'$.

Definizione

Se $T \in \mathcal{S}'$, si chiama trasformata di Fourier di T , e si denota con $\mathcal{F}[T]$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (37)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Introduciamo ora la trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'$.

Definizione

Se $T \in \mathcal{S}'$, si chiama trasformata di Fourier di T , e si denota con $\mathcal{F}[T]$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (37)$$

Dunque, la trasformazione viene “scaricata” sulla funzione test.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Introduciamo ora la trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'$.

Definizione

Se $T \in \mathcal{S}'$, si chiama trasformata di Fourier di T , e si denota con $\mathcal{F}[T]$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (37)$$

Dunque, la trasformazione viene “scaricata” sulla funzione test.

Ricordiamo che

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S},$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Introduciamo ora la trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'$.

Definizione

Se $T \in \mathcal{S}'$, si chiama trasformata di Fourier di T , e si denota con $\mathcal{F}[T]$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (37)$$

Dunque, la trasformazione viene “scaricata” sulla funzione test.

Ricordiamo che

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S},$$

quindi $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$ è una funzione test per $T \in \mathcal{S}'$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Inoltre si mostra che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continua, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi].$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Inoltre si mostra che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continua, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi].$$

Pertanto, il secondo membro di (37) è continuo in φ e definisce effettivamente una distribuzione temperata.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Inoltre si mostra che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continua, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi].$$

Pertanto, il secondo membro di (37) è continuo in φ e definisce effettivamente una distribuzione temperata.

Osservazione

Come ricordato, se φ è una funzione a decrescenza rapida, tale risulta pure la trasformata $\mathcal{F} \varphi$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Inoltre si mostra che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continua, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi].$$

Pertanto, il secondo membro di (37) è continuo in φ e definisce effettivamente una distribuzione temperata.

Osservazione

Come ricordato, se φ è una funzione a decrescenza rapida, tale risulta pure la trasformata $\mathcal{F}\varphi$.

È interessante osservare che non vale l'analogo, se consideriamo lo spazio $\mathcal{D}$ di funzioni test.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Inoltre si mostra che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continua, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi].$$

Pertanto, il secondo membro di (37) è continuo in φ e definisce effettivamente una distribuzione temperata.

Osservazione

Come ricordato, se φ è una funzione a decrescenza rapida, tale risulta pure la trasformata $\mathcal{F}\varphi$.

È interessante osservare che non vale l'analogo, se consideriamo lo spazio $\mathcal{D}$ di funzioni test.

Si dimostra che, se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{D}$, risulta $\varphi \equiv 0$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Notiamo che, se $T = T_x = x \in L^1$, la (37) si riduce alla formula di moltiplicazione.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Notiamo che, se $T = T_x = x \in L^1$, la (37) si riduce alla formula di moltiplicazione.

Ritroviamo quindi la trasformata di Fourier definita precedentemente mediante integrale, nel senso che la trasformata distribuzionale di T_x è la distribuzione regolare associata alla funzione limitata $\mathcal{F} x$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Notiamo che, se $T = T_x$, $x \in L^1$, la (37) si riduce alla formula di moltiplicazione.

Ritroviamo quindi la trasformata di Fourier definita precedentemente mediante integrale, nel senso che la trasformata distribuzionale di T_x è la distribuzione regolare associata alla funzione limitata $\mathcal{F} x$.

Per costruzione,

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Notiamo che, se $T = T_x = x \in L^1$, la (37) si riduce alla formula di moltiplicazione.

Ritroviamo quindi la trasformata di Fourier definita precedentemente mediante integrale, nel senso che la trasformata distribuzionale di T_x è la distribuzione regolare associata alla funzione limitata $\mathcal{F} x$.

Per costruzione,

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'.$$

Si prova che la trasformazione è lineare, continua e biunivoca, l'inversa è definita da

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (38)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si estendono inoltre le proprietà note per la trasformata in L^1 , ad esempio, le formule fondamentali:

$$(\mathcal{F}[T])' = \mathcal{F}[-j t T(t)], \quad \mathcal{F}[T'] = j \omega \mathcal{F}[T].$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si estendono inoltre le proprietà note per la trasformata in L^1 , ad esempio, le formule fondamentali:

$$(\mathcal{F}[T])' = \mathcal{F}[-j t T(t)], \quad \mathcal{F}[T'] = j \omega \mathcal{F}[T].$$

Verifichiamo per esempio la seconda:

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si estendono inoltre le proprietà note per la trasformata in L^1 , ad esempio, le formule fondamentali:

$$(\mathcal{F}[T])' = \mathcal{F}[-j t T(t)], \quad \mathcal{F}[T'] = j \omega \mathcal{F}[T].$$

Verifichiamo per esempio la seconda:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T'], \varphi \rangle &= \langle T', \mathcal{F}[\varphi] \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}[\varphi])' \rangle \\ &= -\langle T, \mathcal{F}[-j t \varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], j t \varphi \rangle = \langle j t \mathcal{F}[T], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si estendono inoltre le proprietà note per la trasformata in L^1 , ad esempio, le formule fondamentali:

$$(\mathcal{F}[T])' = \mathcal{F}[-j t T(t)], \quad \mathcal{F}[T'] = j \omega \mathcal{F}[T].$$

Verifichiamo per esempio la seconda:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T'], \varphi \rangle &= \langle T', \mathcal{F}[\varphi] \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}[\varphi])' \rangle \\ &= -\langle T, \mathcal{F}[-j t \varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], j t \varphi \rangle = \langle j t \mathcal{F}[T], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Notiamo il seguente risultato.

Proposizione

Se T ha supporto compatto, $\mathcal{F} T$ è una funzione di classe C^∞ e risulta $\mathcal{F} T(\omega) = \langle T(t), e^{-j\omega t} \rangle$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Si estendono inoltre le proprietà note per la trasformata in L^1 , ad esempio, le formule fondamentali:

$$(\mathcal{F}[T])' = \mathcal{F}[-j t T(t)], \quad \mathcal{F}[T'] = j \omega \mathcal{F}[T].$$

Verifichiamo per esempio la seconda:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T'], \varphi \rangle &= \langle T', \mathcal{F}[\varphi] \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}[\varphi])' \rangle \\ &= -\langle T, \mathcal{F}[-j t \varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], j t \varphi \rangle = \langle j t \mathcal{F}[T], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Notiamo il seguente risultato.

Proposizione

Se T ha supporto compatto, $\mathcal{F} T$ è una funzione di classe C^∞ e risulta $\mathcal{F} T(\omega) = \langle T(t), e^{-j\omega t} \rangle$.

Il crochet $\langle T, e^{-j\omega t} \rangle$ va interpretato come in (18).

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Vediamo alcuni esempi.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Vediamo alcuni esempi.

Calcoliamo $\mathcal{F}[\delta]$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Vediamo alcuni esempi.

Calcoliamo $\mathcal{F}[\delta]$.

Per $\varphi \in \mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-j0t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot 1 dt = \langle 1, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Vediamo alcuni esempi.

Calcoliamo $\mathcal{F}[\delta]$.

Per $\varphi \in \mathcal{S}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-j0t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot 1 dt = \langle 1, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{F}[\delta] = 1. \quad (39)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Analogamente, possiamo calcolare $\mathcal{F}[1]$:

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](\omega) d\omega = 2\pi \varphi(0)$$

per la formula di antitrasformazione in $\mathcal{S}$, quindi

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta. \quad (40)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Analogamente, possiamo calcolare $\mathcal{F}[1]$:

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](\omega) d\omega = 2\pi \varphi(0)$$

per la formula di antitrasformazione in $\mathcal{S}$, quindi

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta. \quad (40)$$

Notiamo che la (40) segue dalla (39) anche semplicemente applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione ad ambo i membri:

$$\mathcal{F} 1 = \mathcal{F}[\mathcal{F} \delta] = 2\pi \delta,$$

poiché δ è pari.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Usando (40) e la proprietà di traslazione in ω , abbiamo

$$\mathcal{F}[\cos t] = \frac{\mathcal{F}[e^{jt}] + \mathcal{F}[e^{-jt}]}{2} = \pi \left(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1) \right),$$

$$\mathcal{F}[\sin t] = \frac{\mathcal{F}[e^{jt}] - \mathcal{F}[e^{-jt}]}{2j} = \frac{\pi}{j} \left(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \right).$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Usando (40) e la proprietà di traslazione in ω , abbiamo

$$\mathcal{F}[\cos t] = \frac{\mathcal{F}[e^{jt}] + \mathcal{F}[e^{-jt}]}{2} = \pi \left(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1) \right),$$

$$\mathcal{F}[\sin t] = \frac{\mathcal{F}[e^{jt}] - \mathcal{F}[e^{-jt}]}{2j} = \frac{\pi}{j} \left(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \right).$$

Da (40) ricaviamo

$$\mathcal{F}[t] = j \mathcal{F}[-jt \cdot 1] = j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[1] = 2\pi j \delta'.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Mediante la formula di Poisson (32) e le proprietà della trasformazione, da (40) ricaviamo la trasformata del treno di impulsi:

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Mediante la formula di Poisson (32) e le proprietà della trasformazione, da (40) ricaviamo la trasformata del treno di impulsi:

$$\mathcal{F}[s_\tau] = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{j k \omega_0 t}] = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \omega_0)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Mediante la formula di Poisson (32) e le proprietà della trasformazione, da (40) ricaviamo la trasformata del treno di impulsi:

$$\mathcal{F}[s_T] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{j k \omega_0 t}] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \omega_0)$$

e quindi

$$\mathcal{F}[s_T] = \omega_0 s_{\omega_0} . \quad (41)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Risulta

$$\mathcal{F}[u] = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta. \quad (42)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Risulta

$$\mathcal{F}[u] = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta. \quad (42)$$

Essendo $u' = \delta$, applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione, per la II formula fondamentale troviamo

$$j\omega \mathcal{F} u(\omega) = 1,$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Risulta

$$\mathcal{F}[u] = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta. \quad (42)$$

Essendo $u' = \delta$, applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione, per la II formula fondamentale troviamo

$$j\omega \mathcal{F} u(\omega) = 1,$$

cioè la distribuzione temperata $Y = \mathcal{F} u$ risolve l'equazione

$$j\omega Y = 1.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Risulta

$$\mathcal{F}[u] = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta. \quad (42)$$

Essendo $u' = \delta$, applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione, per la II formula fondamentale troviamo

$$j\omega \mathcal{F} u(\omega) = 1,$$

cioè la distribuzione temperata $Y = \mathcal{F} u$ risolve l'equazione

$$j\omega Y = 1.$$

Si ricava quindi

$$\mathcal{F} u = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + c \delta, \quad (43)$$

per un'opportuna costante c .

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Per calcolare c , osserviamo che

$$u(t) + u(-t) = 1, \quad \text{q.o.}$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Per calcolare c , osserviamo che

$$u(t) + u(-t) = 1, \quad \text{q.o.}$$

Quindi da (43) e (40), usando la formula di riflessione e ricordando che δ è pari e v.p. $1/\omega$ è dispari, ricaviamo

$$\text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + c \delta(\omega) - \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + c \delta(-\omega) = 2c \delta(\omega) = \mathcal{F} 1 = 2\pi \delta(\omega),$$

che implica $c = \pi$, ovvero la tesi.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo la trasformata di

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo la trasformata di

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che risulta

$$\operatorname{sgn}(t) = 2 u(t) - 1,$$

per q.o. $t \in \mathbb{R}$.

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo la trasformata di

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che risulta

$$\operatorname{sgn}(t) = 2 u(t) - 1,$$

per q.o. $t \in \mathbb{R}$.

Ne segue

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \mathcal{F}[2 u(t) - 1] = 2 \left(\text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta \right) - 2\pi \delta = \text{v.p.} \frac{2}{j\omega}.$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Applicando nuovamente la trasformazione, abbiamo

$$\mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{2}{j\omega} \right] = \mathcal{F} \left[\mathcal{F}[\text{sgn } t] \right] = 2\pi \text{sgn}(-t) = -2\pi \text{sgn } t ,$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Applicando nuovamente la trasformazione, abbiamo

$$\mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{2}{j\omega} \right] = \mathcal{F} \left[\mathcal{F}[\text{sgn } t] \right] = 2\pi \text{sgn}(-t) = -2\pi \text{sgn } t ,$$

quindi

$$\mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] = -j\pi \text{sgn } \omega . \quad (44)$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo

$$X = \mathcal{F} \left[\frac{\sin t}{t} \right].$$

La trasformata si riconduce facilmente a quella di Π .

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo

$$X = \mathcal{F} \left[\frac{\sin t}{t} \right].$$

La trasformata si riconduce facilmente a quella di Π .

Ricordando che

$$\mathcal{F} \Pi = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}},$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo

$$X = \mathcal{F} \left[\frac{\sin t}{t} \right].$$

La trasformata si riconduce facilmente a quella di Π .

Ricordando che

$$\mathcal{F} \Pi = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}},$$

mediante la formula di riscalamento, abbiamo

$$\frac{\sin \omega}{\omega} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} \Pi \left(\frac{t}{2} \right) \right].$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Calcoliamo

$$X = \mathcal{F} \left[\frac{\sin t}{t} \right].$$

La trasformata si riconduce facilmente a quella di Π .

Ricordando che

$$\mathcal{F} \Pi = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}},$$

mediante la formula di riscaldamento, abbiamo

$$\frac{\sin \omega}{\omega} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} \Pi \left(\frac{t}{2} \right) \right].$$

Applicando nuovamente la trasformazione,

$$X = \mathcal{F} \left[\mathcal{F} \left[\frac{1}{2} \Pi \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right] = \pi \Pi \left(\frac{t}{2} \right).$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Alternativamente, mediante la formula di modulazione

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{F} \left[\left(\text{v.p.} \frac{1}{t} \right) \sin t \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] (\omega - 1) - \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] (\omega + 1) \right\}, \end{aligned}$$

Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Alternativamente, mediante la formula di modulazione

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{F} \left[\left(\text{v.p.} \frac{1}{t} \right) \sin t \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] (\omega - 1) - \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] (\omega + 1) \right\}, \end{aligned}$$

quindi per (44)

$$X = -\frac{\pi}{2} [\text{sgn}(\omega - 1) - \text{sgn}(\omega + 1)] = \pi [u(\omega + 1) - u(\omega - 1)].$$

Teoremi di campionamento

Calcoliamo la trasformata di una distribuzione periodica.

Teoremi di campionamento

Calcoliamo la trasformata di una distribuzione periodica.

Teorema (I teorema di campionamento)

Sia

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - k \tau) \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

e supponiamo che $X_0(\omega) = \mathcal{F}[x_0]$ sia una funzione continua in $\mathbb{R}$.

Teoremi di campionamento

Calcoliamo la trasformata di una distribuzione periodica.

Teorema (I teorema di campionamento)

Sia

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - k \tau) \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

e supponiamo che $X_0(\omega) = \mathcal{F}[x_0]$ sia una funzione continua in $\mathbb{R}$.

In queste ipotesi, risulta

$$X(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0(k \omega_0) \delta(\omega - k \omega_0). \quad (45)$$

Teoremi di campionamento

Per la dimostrazione, ci limitiamo ad osservare che, se $x \in L^1_{\text{loc}}$ è periodica di periodo τ e

$$x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)],$$

Teoremi di campionamento

Per la dimostrazione, ci limitiamo ad osservare che, se $x \in L^1_{\text{loc}}$ è periodica di periodo τ e

$$x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)],$$

la trasformata $X_0 \in C^\infty$.

Teoremi di campionamento

Per la dimostrazione, ci limitiamo ad osservare che, se $x \in L^1_{\text{loc}}$ è periodica di periodo τ e

$$x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)],$$

la trasformata $X_0 \in C^\infty$.

Inoltre (45) segue subito dallo sviluppo in serie di Fourier.

Teoremi di campionamento

Per la dimostrazione, ci limitiamo ad osservare che, se $x \in L^1_{\text{loc}}$ è periodica di periodo τ e

$$x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)],$$

la trasformata $X_0 \in C^\infty$.

Inoltre (45) segue subito dallo sviluppo in serie di Fourier.

Si verifica che l'uguaglianza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}$$

vale in $\mathcal{S}'$.

Teoremi di campionamento

I numeri

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{\tau} X_0(k \omega_0), \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono i coefficienti della serie di Fourier.

Teoremi di campionamento

I numeri

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{\tau} X_0(k \omega_0), \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono i coefficienti della serie di Fourier.

Trasformando, abbiamo

$$X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathcal{F}[e^{j k \omega_0 t}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k \omega_0)$$

e risulta

$$2\pi c_k = \omega_0 X_0(k\omega_0), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (46)$$

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la $\mathcal{F}$ -trasformata dell'onda triangolare x , replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t) = \Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)].$$

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la $\mathcal{F}$ -trasformata dell'onda triangolare x , replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t) = \Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)].$$

Essendo x_0 somma di segnali che sono prodotto di un polinomio per una finestra, deriviamo nel senso delle distribuzioni fino a che non rimangano solo impulsi:

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la $\mathcal{F}$ -trasformata dell'onda triangolare x , replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t) = \Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)].$$

Essendo x_0 somma di segnali che sono prodotto di un polinomio per una finestra, deriviamo nel senso delle distribuzioni fino a che non rimangano solo impulsi:

$$x_0'(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$$

(solo derivata ordinaria, essendo x_0 assolutamente continua),

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

$$x_0''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

$$x_0''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

Applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione, otteniamo quindi

$$-\omega^2 X_0(\omega) = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = 2\cos\omega - 2$$

da cui

$$X_0(\omega) = 2 \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2}. \quad (47)$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

$$x_0''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

Applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione, otteniamo quindi

$$-\omega^2 X_0(\omega) = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = 2\cos\omega - 2$$

da cui

$$X_0(\omega) = 2 \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2}. \quad (47)$$

Usiamo ora il I teorema di campionamento.

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

$$x_0''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

Applicando la $\mathcal{F}$ -trasformazione, otteniamo quindi

$$-\omega^2 X_0(\omega) = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = 2\cos\omega - 2$$

da cui

$$X_0(\omega) = 2 \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2}. \quad (47)$$

Usiamo ora il I teorema di campionamento.

Essendo il periodo $\tau = 2$, risulta $\omega_0 = \pi$.

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Dunque, per $k \neq 0$,

$$X_0(k\omega_0) = 2 \frac{1 - \cos k\pi}{k^2\pi^2}$$

e conviene distinguere i casi k pari e k dispari:

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Dunque, per $k \neq 0$,

$$X_0(k \omega_0) = 2 \frac{1 - \cos k \pi}{k^2 \pi^2}$$

e conviene distinguere i casi k pari e k dispari:

$$X_0(k \omega_0) = \begin{cases} 0, & \text{per } k \neq 0 \text{ pari,} \\ \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}, & \text{per } k = 2n+1, n \in \mathbb{N}, \text{ dispari.} \end{cases}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Dunque, per $k \neq 0$,

$$X_0(k \omega_0) = 2 \frac{1 - \cos k \pi}{k^2 \pi^2}$$

e conviene distinguere i casi k pari e k dispari:

$$X_0(k \omega_0) = \begin{cases} 0, & \text{per } k \neq 0 \text{ pari,} \\ \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}, & \text{per } k = 2n+1, n \in \mathbb{N}, \text{ dispari.} \end{cases}$$

Inoltre

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} X_0(\omega) = 1.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Pertanto la trasformata della replica periodica è

$$X(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \delta(\omega - (2n+1)\pi). \quad (48)$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Pertanto la trasformata della replica periodica è

$$X(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \delta(\omega - (2n+1)\pi). \quad (48)$$

Osserviamo che questa uguaglianza equivale al noto sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(2n+1)\pi t}}{(2n+1)^2},$$

tenendo conto del legame (46) tra i coefficienti della serie e quelli nel campionamento.

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la trasformata e scriviamo la serie di Fourier della replica periodica x di periodo $\tau = 2\pi$ del segnale

$$x_0(t) = t \sin t [u(t + \pi) - u(t - \pi)].$$

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la trasformata e scriviamo la serie di Fourier della replica periodica x di periodo $\tau = 2\pi$ del segnale

$$x_0(t) = t \sin t [u(t + \pi) - u(t - \pi)].$$

Per trasformare x_0 osserviamo che

$$x_0(t) = j(-j t) y_0(t),$$

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la trasformata e scriviamo la serie di Fourier della replica periodica x di periodo $\tau = 2\pi$ del segnale

$$x_0(t) = t \sin t [u(t + \pi) - u(t - \pi)].$$

Per trasformare x_0 osserviamo che

$$x_0(t) = j(-j t) y_0(t),$$

dove

$$y_0(t) = \sin t [u(t + \pi) - u(t - \pi)],$$

Teoremi di campionamento

Esempio

Calcoliamo la trasformata e scriviamo la serie di Fourier della replica periodica x di periodo $\tau = 2\pi$ del segnale

$$x_0(t) = t \sin t [u(t + \pi) - u(t - \pi)].$$

Per trasformare x_0 osserviamo che

$$x_0(t) = j(-j t) y_0(t),$$

dove

$$y_0(t) = \sin t [u(t + \pi) - u(t - \pi)],$$

quindi per la I formula fondamentale

$$X_0(\omega) = j \frac{d}{d\omega} Y_0(\omega).$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Per calcolare Y_0 , deriviamo y_0 due volte nel senso delle distribuzioni:

$$y'_0(t) = \cos t [u(t + \pi) - u(t - \pi)]$$

(y'_0 coincide con la derivata ordinaria, essendo y_0 assolutamente continua),

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Per calcolare Y_0 , deriviamo y_0 due volte nel senso delle distribuzioni:

$$y'_0(t) = \cos t [u(t + \pi) - u(t - \pi)]$$

(y'_0 coincide con la derivata ordinaria, essendo y_0 assolutamente continua),

$$y''_0(t) = -y_0(t) - \delta(t + \pi) + \delta(t - \pi).$$

Applichiamo ora ad ambo i membri la $\mathcal{F}$ -trasformazione.

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

A primo membro usiamo la II formula fondamentale:

$$-\omega^2 Y_0(\omega) = -Y_0(\omega) - e^{j\pi\omega} + e^{-j\pi\omega}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

A primo membro usiamo la II formula fondamentale:

$$-\omega^2 Y_0(\omega) = -Y_0(\omega) - e^{j\pi\omega} + e^{-j\pi\omega}$$

e quindi per $\omega \neq \pm 1$

$$Y_0(\omega) = \frac{e^{j\pi\omega} - e^{-j\pi\omega}}{\omega^2 - 1} = 2j \frac{\sin \pi\omega}{\omega^2 - 1}.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

A primo membro usiamo la II formula fondamentale:

$$-\omega^2 Y_0(\omega) = -Y_0(\omega) - e^{j\pi\omega} + e^{-j\pi\omega}$$

e quindi per $\omega \neq \pm 1$

$$Y_0(\omega) = \frac{e^{j\pi\omega} - e^{-j\pi\omega}}{\omega^2 - 1} = 2j \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1}.$$

Dunque

$$X_0(\omega) = 2 \frac{d}{d\omega} \frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} = 2 \left(\frac{\pi \cos \pi \omega}{1 - \omega^2} + \frac{2\omega \sin \pi \omega}{(1 - \omega^2)^2} \right).$$

(X_0 è reale pari, com'era chiaro essendo x_0 reale pari.)

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Essendo il periodo $\tau = 2\pi$, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$.

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Essendo il periodo $\tau = 2\pi$, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$.

Per $k \neq \pm 1$, dalla formula trovata ricaviamo

$$X_0(k) = \frac{2\pi(-1)^k}{1 - k^2}.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Essendo il periodo $\tau = 2\pi$, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$.

Per $k \neq \pm 1$, dalla formula trovata ricaviamo

$$X_0(k) = \frac{2\pi(-1)^k}{1 - k^2}.$$

D'altra parte, mediante la regola de L'Hôpital, troviamo

$$X_0(1) = \lim_{\omega \rightarrow 1} X_0(\omega) = 2 \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\pi(1 - \omega^2) \cos \pi \omega + 2\omega \sin \pi \omega}{(1 - \omega^2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Possiamo anche valutare la derivata come segue

$$\frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} = \frac{\sin \pi(1 - \omega)}{1 - \omega^2} = \pi \frac{1 - \omega}{1 - \omega^2} + O((\omega - 1)^2) = \frac{\pi}{1 + \omega} + O((\omega - 1)^2),$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Possiamo anche valutare la derivata come segue

$$\frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} = \frac{\sin \pi(1 - \omega)}{1 - \omega^2} = \pi \frac{1 - \omega}{1 - \omega^2} + O((\omega - 1)^2) = \frac{\pi}{1 + \omega} + O((\omega - 1)^2),$$

quindi

$$\left. \frac{d}{d\omega} \frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} \right|_{\omega=1} = \left. \frac{d}{d\omega} \frac{\pi}{1 + \omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Possiamo anche valutare la derivata come segue

$$\frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} = \frac{\sin \pi(1 - \omega)}{1 - \omega^2} = \pi \frac{1 - \omega}{1 - \omega^2} + O((\omega - 1)^2) = \frac{\pi}{1 + \omega} + O((\omega - 1)^2),$$

quindi

$$\left. \frac{d}{d\omega} \frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} \right|_{\omega=1} = \left. \frac{d}{d\omega} \frac{\pi}{1 + \omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Inoltre

$$X_0(-1) = X_0(1).$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Pertanto

$$X(\omega) = -\frac{\pi}{2} \delta(\omega - 1) - \frac{\pi}{2} \delta(\omega + 1) + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}} \frac{2\pi (-1)^k}{1 - k^2} \delta(\omega - k).$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Pertanto

$$X(\omega) = -\frac{\pi}{2} \delta(\omega - 1) - \frac{\pi}{2} \delta(\omega + 1) + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}} \frac{2\pi (-1)^k}{1 - k^2} \delta(\omega - k).$$

Lo sviluppo in serie di Fourier si scrive

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{e^{jt}}{4} - \frac{e^{-jt}}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}} \frac{(-1)^k}{1 - k^2} e^{jk t} \\ &= 1 - \frac{\cos t}{2} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 - k^2} \cos k t, \end{aligned} \tag{49}$$

che vale sia nel senso dell'energia che in quello puntuale.

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Alternativamente, possiamo osservare che $x(t)$ si ottiene moltiplicando per $\sin t$ la replica periodica $z(t)$ di periodo 2π di

$$z_0(t) = t [u(t + \pi) - u(t - \pi)],$$

quindi X si ricava da Z mediante la formula di modulazione; analogamente possiamo ricavare la serie di Fourier di $x(t)$ da quella di $z(t)$.

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

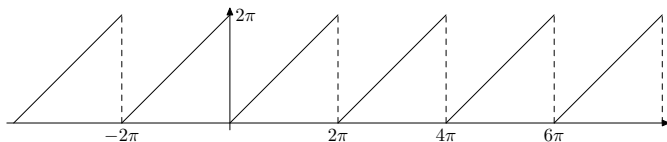
Alternativamente, possiamo osservare che $x(t)$ si ottiene moltiplicando per $\sin t$ la replica periodica $z(t)$ di periodo 2π di

$$z_0(t) = t [u(t + \pi) - u(t - \pi)],$$

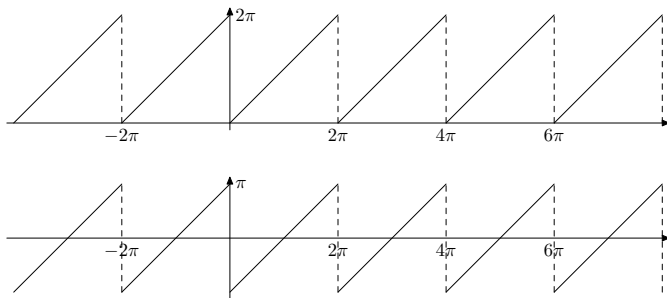
quindi X si ricava da Z mediante la formula di modulazione; analogamente possiamo ricavare la serie di Fourier di $x(t)$ da quella di $z(t)$.

La replica periodica $z(t)$ si ottiene facilmente dall'onda a dente di sega $w(t)$ di periodo 2π .

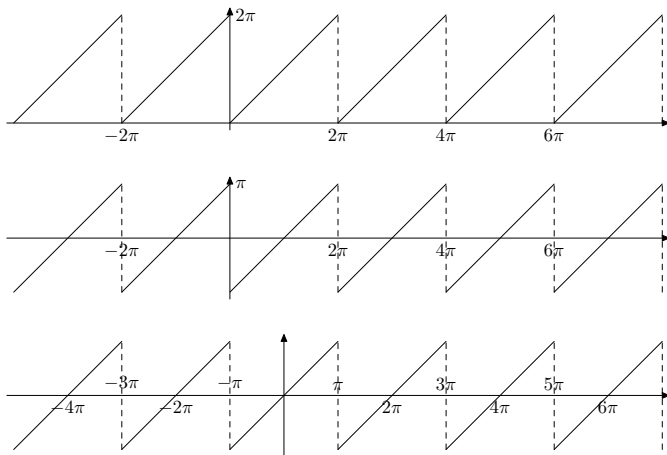
Teoremi di campionamento



Teoremi di campionamento



Teoremi di campionamento



Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Risulta

$$z(t) = w(t - \pi) - \pi.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Risulta

$$z(t) = w(t - \pi) - \pi.$$

Come è noto (è il caso $\tau = 2\pi$, quindi $\omega_0 = 1$, di (29)),

$$w(t) = \pi + j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} e^{jk t}.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Risulta

$$z(t) = w(t - \pi) - \pi.$$

Come è noto (è il caso $\tau = 2\pi$, quindi $\omega_0 = 1$, di (29)),

$$w(t) = \pi + j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} e^{jk t}.$$

Dunque

$$z(t) = j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} e^{jk(t-\pi)} = j \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} e^{jk t}.$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Come osservato, possiamo facilmente ricavare la serie di Fourier di $x(t)$ da quella di $z(t)$, ragionando come nella formula di modulazione:

$$x(t) = z(t) \sin t = z(t) \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Come osservato, possiamo facilmente ricavare la serie di Fourier di $x(t)$ da quella di $z(t)$, ragionando come nella formula di modulazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) \sin t = z(t) \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} e^{j(k+1)t} - \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} e^{j(k-1)t} \right] \end{aligned}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

Come osservato, possiamo facilmente ricavare la serie di Fourier di $x(t)$ da quella di $z(t)$, ragionando come nella formula di modulazione:

$$\begin{aligned}x(t) &= z(t) \sin t = z(t) \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \\&= \frac{1}{2} \left[\sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} e^{j(k+1)t} - \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} e^{j(k-1)t} \right] \\&= \frac{1}{2} \left[\sum_{h \neq 1} \frac{(-1)^{h-1}}{h-1} e^{jht} - \sum_{h \neq -1} \frac{(-1)^{h+1}}{h+1} e^{jht} \right]\end{aligned}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

quindi ancora

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1, 1} (-1)^h \left(\frac{1}{h+1} - \frac{1}{h-1} \right) e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

quindi ancora

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1, 1} (-1)^h \left(\frac{1}{h+1} - \frac{1}{h-1} \right) e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt} \\&= \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1, 1} (-1)^h \frac{-2}{h^2 - 1} e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt}\end{aligned}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

quindi ancora

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1,1} (-1)^h \left(\frac{1}{h+1} - \frac{1}{h-1} \right) e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt} \\&= \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1,1} (-1)^h \frac{-2}{h^2 - 1} e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt} \\&= \sum_{h \neq -1,1} \frac{(-1)^h}{1 - h^2} e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt}\end{aligned}$$

Teoremi di campionamento

Esempio (continuazione)

quindi ancora

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1,1} (-1)^h \left(\frac{1}{h+1} - \frac{1}{h-1} \right) e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt} \\&= \frac{1}{2} \sum_{h \neq -1,1} (-1)^h \frac{-2}{h^2 - 1} e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt} \\&= \sum_{h \neq -1,1} \frac{(-1)^h}{1 - h^2} e^{jht} - \frac{1}{4} e^{jt} - \frac{1}{4} e^{-jt}\end{aligned}$$

in accordo con (49).

Teoremi di campionamento

Vediamo ora la trasformata di un segnale campionato.

Teoremi di campionamento

Vediamo ora la trasformata di un segnale campionato.

Teorema (Il teorema di campionamento)

Sia

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k\tau) \delta(t - k\tau) \quad \text{in } \mathcal{S}',$$

con $y(t)$ funzione continua a crescita lenta.

Teoremi di campionamento

Vediamo ora la trasformata di un segnale campionato.

Teorema (Il teorema di campionamento)

Sia

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k\tau) \delta(t - k\tau) \quad \text{in } \mathcal{S}',$$

con $y(t)$ funzione continua a crescita lenta.

In queste ipotesi, risulta

$$X(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(\omega - k\omega_0). \quad (50)$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Estendiamo la trasformazione di Laplace alle distribuzioni.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Estendiamo la trasformazione di Laplace alle distribuzioni.

Poniamo

$$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t) e^{-\sigma t}](\omega),$$

supponendo che $x(t) e^{-\sigma t}$ sia una distribuzione temperata.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Estendiamo la trasformazione di Laplace alle distribuzioni.

Poniamo

$$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t) e^{-\sigma t}](\omega),$$

supponendo che $x(t) e^{-\sigma t}$ sia una distribuzione temperata.

Ad esempio,

$$\mathcal{L}[\delta] = 1.$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Estendiamo la trasformazione di Laplace alle distribuzioni.

Poniamo

$$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t) e^{-\sigma t}](\omega),$$

supponendo che $x(t) e^{-\sigma t}$ sia una distribuzione temperata.

Ad esempio,

$$\mathcal{L}[\delta] = 1.$$

Se $x(t)$ è nulla in $] -\infty, 0[$, la trasformata è *unilatera*; la denotiamo con $\mathcal{L}_u$.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Elenchiamone alcune proprietà:

- $X(s) = \mathcal{L}_u[x]$ è una funzione analitica in un semipiano destro; inoltre

$$X'(s) = \mathcal{L}_u[-t x(t)].$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Elenchiamone alcune proprietà:

- $X(s) = \mathcal{L}_u[x]$ è una funzione analitica in un semipiano destro; inoltre

$$X'(s) = \mathcal{L}_u[-t x(t)].$$

- La seconda formula fondamentale si scrive:

$$\mathcal{L}_u[x'] = s \mathcal{L}_u[x] = s X(s).$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Elenchiamone alcune proprietà:

- $X(s) = \mathcal{L}_u[x]$ è una funzione analitica in un semipiano destro; inoltre

$$X'(s) = \mathcal{L}_u[-t x(t)].$$

- La seconda formula fondamentale si scrive:

$$\mathcal{L}_u[x'] = s \mathcal{L}_u[x] = s X(s).$$

Questa formula differisce solo apparentemente da quella per le funzioni: $x' = Dx + x(0+) \delta$.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Elenchiamone alcune proprietà:

- $X(s) = \mathcal{L}_u[x]$ è una funzione analitica in un semipiano destro; inoltre

$$X'(s) = \mathcal{L}_u[-t x(t)].$$

- La seconda formula fondamentale si scrive:

$$\mathcal{L}_u[x'] = s \mathcal{L}_u[x] = s X(s).$$

Questa formula differisce solo apparentemente da quella per le funzioni: $x' = Dx + x(0+) \delta$.

- $\mathcal{L}_u$ è iniettiva.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} P[D]y = \delta(t) \\ y \text{ distribuzione nulla in }]-\infty, 0[\end{cases} \quad (51)$$

dove $P[D]$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} P[D]y = \delta(t) \\ y \text{ distribuzione nulla in }]-\infty, 0[\end{cases} \quad (51)$$

dove $P[D]$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti.

$\mathcal{L}_u$ -trasformando ambo i membri, abbiamo

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)} = H(s).$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Quindi

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)].$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Quindi

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)].$$

Pertanto la funzione di trasferimento $H(s)$ è la trasformata della risposta all'impulso nel sistema ingresso–uscita rappresentato dall'operatore $P[D]$.

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Esempio

Data la distribuzione f nulla in $] - \infty, 0[$, consideriamo il problema

$$\begin{cases} P[D]y = f \\ y \text{ distribuzione nulla in }] - \infty, 0[\end{cases} \quad (52)$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Esempio

Data la distribuzione f nulla in $] - \infty, 0[$, consideriamo il problema

$$\begin{cases} P[D]y = f \\ y \text{ distribuzione nulla in }] - \infty, 0[\end{cases} \quad (52)$$

Da (28) segue

$$P[D](y * f) = (P[D]y) * f .$$

Trasformata di Laplace di distribuzioni

Esempio

Data la distribuzione f nulla in $] - \infty, 0[$, consideriamo il problema

$$\begin{cases} P[D]y = f \\ y \text{ distribuzione nulla in }] - \infty, 0[\end{cases} \quad (52)$$

Da (28) segue

$$P[D](y * f) = (P[D]y) * f .$$

Quindi, se y risolve (51), troviamo che la soluzione di (52) è

$$y * f .$$

Infatti,

$$P[D](y * f) = (P[D]y) * f = \delta * f = f .$$