

Trasformazione di Fourier

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II"



Anno Accademico 2022/2023

Trasformata di Fourier

- Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$
- Inversione della trasformazione di Fourier
- Proprietà formali
- Le formule fondamentali
- La trasformata di funzioni a decrescenza rapida
- La trasformata della convoluzione

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Definizione

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$ un segnale sommabile.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Definizione

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$ un segnale sommabile.

La trasformata di Fourier di x è la funzione di variabile reale definita ponendo

$$\mathcal{F}[x] = \hat{x}(\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Definizione

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$ un segnale sommabile.

La trasformata di Fourier di x è la funzione di variabile reale definita ponendo

$$\mathcal{F}[x] = \hat{x}(\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

La trasformazione di Fourier è l'operatore

$$\mathcal{F}: x \rightarrow X$$

che associa a x la sua trasformata X .

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Osserviamo che

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

e per $\omega \in \mathbb{R}$ risulta $|e^{-j\omega t}| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, quindi l'integrale in (1) è assolutamente convergente.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Osserviamo che

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

e per $\omega \in \mathbb{R}$ risulta $|e^{-j\omega t}| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, quindi l'integrale in (1) è assolutamente convergente.

Segnaliamo che la definizione data in (1), che noi seguiremo qui, non è l'unica usata per la trasformata di Fourier, che a volte viene definita ponendo

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j \omega t} dt, \quad \mathcal{F}[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

È evidente il legame tra la trasformazione di Fourier e quella di Laplace:

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

È evidente il legame tra la trasformazione di Fourier e quella di Laplace:

se l'integrale di Laplace è assolutamente convergente, per ogni $s = \sigma + j\omega$ nella striscia di convergenza, risulta

$$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}](\omega). \quad (2)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

È evidente il legame tra la trasformazione di Fourier e quella di Laplace:

se l'integrale di Laplace è assolutamente convergente, per ogni $s = \sigma + j\omega$ nella striscia di convergenza, risulta

$$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}](\omega). \quad (2)$$

In particolare, se l'asse immaginario è interno alla striscia di convergenza assoluta, è

$$\mathcal{F}[x](\omega) = \mathcal{L}[x](j\omega).$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Proposizione

La trasformazione è lineare, cioè per ogni $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, risulta

$$\mathcal{F}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{F}[x] + \beta \mathcal{F}[y]. \quad (3)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Proposizione

La trasformazione è lineare, cioè per ogni $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, risulta

$$\mathcal{F}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{F}[x] + \beta \mathcal{F}[y]. \quad (3)$$

La trasformata $X(\omega)$ è continua e limitata.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Proposizione

La trasformazione è lineare, cioè per ogni $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, risulta

$$\mathcal{F}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{F}[x] + \beta \mathcal{F}[y]. \quad (3)$$

La trasformata $X(\omega)$ è continua e limitata.

Essa inoltre è infinitesima a $\pm\infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} X(\omega) = 0 \quad (4)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

La linearità (3) è ovvia.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

La linearità (3) è ovvia.

È immediata anche la limitatezza della trasformata:

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \|x\|_1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

La linearità (3) è ovvia.

È immediata anche la limitatezza della trasformata:

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \|x\|_1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

La continuità vuol dire che per ogni $\omega_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$X(\omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} X(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

e segue dal teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

La linearità (3) è ovvia.

È immediata anche la limitatezza della trasformata:

$$|X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \|x\|_1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

La continuità vuol dire che per ogni $\omega_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$X(\omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} X(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

e segue dal teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata.

Infine l'uguaglianza (4) è conseguenza del teorema di Riemann-Lebesgue.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F}[\Pi]$.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F}[\Pi]$. In base alla definizione, abbiamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \quad (7)$$

(ovviamente prolungata in $\omega = 0$).

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F}[\Pi]$. In base alla definizione, abbiamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \quad (7)$$

(ovviamente prolungata in $\omega = 0$).

Più in generale,

$$\mathcal{F}[\Pi(t/T)] = \frac{\sin(T \frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F}[\Pi]$. In base alla definizione, abbiamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \quad (7)$$

(ovviamente prolungata in $\omega = 0$).

Più in generale,

$$\mathcal{F}[\Pi(t/T)] = \frac{\sin(T \frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}}.$$

Questo esempio mostra che in generale $X \notin L^1(\mathbb{R})$.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Abbiamo

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \int_{-\infty}^0 e^{t-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t-j\omega t} dt = \frac{1}{1-j\omega} - \frac{1}{-1-j\omega}$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Abbiamo

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \int_{-\infty}^0 e^{t-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t-j\omega t} dt = \frac{1}{1-j\omega} - \frac{1}{-1-j\omega}$$

e quindi

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}. \quad (8)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Abbiamo

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \int_{-\infty}^0 e^{t-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t-j\omega t} dt = \frac{1}{1-j\omega} - \frac{1}{-1-j\omega}$$

e quindi

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}. \quad (8)$$

Questa uguaglianza segue subito dalla nota formula

$$\mathcal{L}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1-s^2}$$

mediante il legame con la trasformata di Laplace.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right]$.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right]$.

In base alla definizione,

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2} dt$$

e l'integrale si calcola col metodo dei residui.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right]$.

In base alla definizione,

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2} dt$$

e l'integrale si calcola col metodo dei residui.

Poniamo

$$f(z) = \frac{e^{-j\omega z}}{1+z^2}.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Bisogna distinguere in base al segno del coefficiente $-\omega$ di jt nell'esponente.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Bisogna distinguere in base al segno del coefficiente $-\omega$ di jt nell'esponente.

Le singolarità sono i poli semplici $\pm j$.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Bisogna distinguere in base al segno del coefficiente $-\omega$ di jt nell'esponente.

Le singolarità sono i poli semplici $\pm j$.

Inoltre

$$R[j] = \frac{e^{\omega}}{2j}, \quad R[-j] = -\frac{e^{-\omega}}{2j}.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Se $-\omega \geq 0$, cioè $\omega \leq 0$, l'integrale vale

$$2\pi j R[j] = \pi e^{\omega}.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Se $-\omega \geq 0$, cioè $\omega \leq 0$, l'integrale vale

$$2\pi j R[j] = \pi e^{\omega}.$$

Se $-\omega \leq 0$, cioè $\omega \geq 0$, l'integrale vale

$$-2\pi j R[-j] = \pi e^{-\omega}.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Se $-\omega \geq 0$, cioè $\omega \leq 0$, l'integrale vale

$$2\pi j R[j] = \pi e^{\omega}.$$

Se $-\omega \leq 0$, cioè $\omega \geq 0$, l'integrale vale

$$-2\pi j R[-j] = \pi e^{-\omega}.$$

In definitiva

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] = \pi e^{-|\omega|}. \quad (9)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio (continuazione)

Se $-\omega \geq 0$, cioè $\omega \leq 0$, l'integrale vale

$$2\pi j R[j] = \pi e^{\omega}.$$

Se $-\omega \leq 0$, cioè $\omega \geq 0$, l'integrale vale

$$-2\pi j R[-j] = \pi e^{-\omega}.$$

In definitiva

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] = \pi e^{-|\omega|}. \quad (9)$$

Confrontare con (8).

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Per calcolare la trasformata $\mathcal{F}[e^{-t^2}]$ possiamo usare il legame con la trasformazione di Laplace e la nota formula:

$$\mathcal{L}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Esempio

Per calcolare la trasformata $\mathcal{F}[e^{-t^2}]$ possiamo usare il legame con la trasformazione di Laplace e la nota formula:

$$\mathcal{L}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}.$$

Pertanto

$$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} [e^{s^2/4}]_{s=j\omega} = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}. \quad (10)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Un'altra formula che si verifica facilmente è la seguente.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Un'altra formula che si verifica facilmente è la seguente.

Teorema (formula di moltiplicazione)

Per $x, y \in L^1(\mathbb{R})$, dette X e Y le rispettive $\mathcal{F}$ -trasformate, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(t) dt. \quad (11)$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Notiamo che

$$X(t)y(t)$$

è sommabile in $\mathbb{R}$, in quanto prodotto della funzione sommabile $y(t)$ per la funzione limitata $X(t)$. Analogamente, $x(t)Y(t)$ è sommabile.

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Notiamo che

$$X(t) y(t)$$

è sommabile in $\mathbb{R}$, in quanto prodotto della funzione sommabile $y(t)$ per la funzione limitata $X(t)$. Analogamente, $x(t) Y(t)$ è sommabile.

Per mostrare la (11), osserviamo che per il teorema di Tonelli la funzione

$$f(t, \tau) := y(t) e^{-j t \tau} x(\tau)$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t, \tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| d\tau < +\infty.$$

Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

Successivamente usiamo il teorema di Fubini per invertire l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) y(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j t \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j t \tau} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(t) dt.\end{aligned}$$

Inversione della trasformazione di Fourier

La trasformazione di Fourier è iniettiva, nel senso che

$$\mathcal{F}[x] \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \text{ per q.o. } t \in \mathbb{R}.$$

Inversione della trasformazione di Fourier

La trasformazione di Fourier è iniettiva, nel senso che

$$\mathcal{F}[x] \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \text{ per q.o. } t \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, vale il seguente

Teorema

Se $x \in L^1(\mathbb{R})$ e pure $X = \mathcal{F}[x] \in L^1(\mathbb{R})$, risulta, per q.o. $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (12)$$

Notiamo che, se $X \in L^1(\mathbb{R})$, x coincide q.o. con una funzione continua.

Inversione della trasformazione di Fourier

La trasformazione di Fourier è iniettiva, nel senso che

$$\mathcal{F}[x] \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \text{ per q.o. } t \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, vale il seguente

Teorema

Se $x \in L^1(\mathbb{R})$ e pure $X = \mathcal{F}[x] \in L^1(\mathbb{R})$, risulta, per q.o. $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (12)$$

Notiamo che, se $X \in L^1(\mathbb{R})$, x coincide q.o. con una funzione continua.

Senza l'ipotesi X sommabile, l'integrale va inteso nel senso del valor principale.

Inversione della trasformazione di Fourier

Teorema (Formula di antitrasformazione)

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se x è regolarizzato in $t_0 \in \mathbb{R}$, risulta

$$x(t_0) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega. \quad (13)$$

Inversione della trasformazione di Fourier

Teorema (Formula di antitrasformazione)

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se x è regolarizzato in $t_0 \in \mathbb{R}$, risulta

$$x(t_0) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega. \quad (13)$$

In particolare, se $x \in L^1(\mathbb{R})$ è continuo e C^1 a tratti e $X \in L^1(\mathbb{R})$, vale (12) per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Inversione della trasformazione di Fourier

Il secondo membro della (12) definisce l'antitrasformazione di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[X] .$$

Inversione della trasformazione di Fourier

Il secondo membro della (12) definisce l'antitrasformazione di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[X].$$

Notiamo che essa è analoga alla trasformazione: mutando t in $-t$ in (12), troviamo

$$2\pi x(-t) = \mathcal{F}[X(\omega)],$$

Inversione della trasformazione di Fourier

Il secondo membro della (12) definisce l'antitrasformazione di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[X].$$

Notiamo che essa è analoga alla trasformazione: mutando t in $-t$ in (12), troviamo

$$2\pi x(-t) = \mathcal{F}[X(\omega)],$$

che si riscrive

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[x(t)]] = 2\pi x(-t). \quad (14)$$

Inversione della trasformazione di Fourier

Il secondo membro della (12) definisce l'antitrasformazione di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[X].$$

Notiamo che essa è analoga alla trasformazione: mutando t in $-t$ in (12), troviamo

$$2\pi x(-t) = \mathcal{F}[X(\omega)],$$

che si riscrive

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[x(t)]] = 2\pi x(-t). \quad (14)$$

Se in aggiunta x è pari, abbiamo

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[x]] = 2\pi x.$$

Inversione della trasformazione di Fourier

Il secondo membro della (12) definisce l'antitrasformazione di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}[X].$$

Notiamo che essa è analoga alla trasformazione: mutando t in $-t$ in (12), troviamo

$$2\pi x(-t) = \mathcal{F}[X(\omega)],$$

che si riscrive

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[x(t)]] = 2\pi x(-t). \quad (14)$$

Se in aggiunta x è pari, abbiamo

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[x]] = 2\pi x.$$

In questo modo, ad esempio, possiamo ricavare la (8) da (9) e viceversa.

Proprietà formali

Elenchiamo alcune proprietà della trasformata, facili da verificare in base alla definizione.

Proprietà formali

Elenchiamo alcune proprietà della trasformata, facili da verificare in base alla definizione.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[x(t)]. \quad (15)$$

Proprietà formali

Elenchiamo alcune proprietà della trasformata, facili da verificare in base alla definizione.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[x(t)]. \quad (15)$$

- Traslazione in ω :

$$\mathcal{F}[x(t) e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0).$$

Proprietà formali

Elenchiamo alcune proprietà della trasformata, facili da verificare in base alla definizione.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[x(t)]. \quad (15)$$

- Traslazione in ω :

$$\mathcal{F}[x(t) e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0).$$

- Modulazione:

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{X(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} + X(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi}}{2}.$$

Proprietà formali

- Riscaldamento e riflessione:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (16)$$

Proprietà formali

- Riscaldamento e riflessione:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (16)$$

- Coniugazione:

$$\mathcal{F}[\overline{x(t)}] = \overline{X(-\omega)}.$$

Proprietà formali

- Se x è pari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt .$$

Proprietà formali

- Se x è pari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt .$$

In particolare, x reale e pari $\iff X$ reale e pari.

Proprietà formali

- Se x è pari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt .$$

In particolare, x reale e pari $\iff X$ reale e pari.

- Se x è dispari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt .$$

Proprietà formali

- Se x è pari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt .$$

In particolare, x reale e pari $\iff X$ reale e pari.

- Se x è dispari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt .$$

In particolare, x reale e dispari $\iff X$ immaginaria e dispari.

Le formule fondamentali

Vediamo ora le formule per la derivata della trasformata e per la trasformata della derivata.

Le formule fondamentali

Vediamo ora le formule per la derivata della trasformata e per la trasformata della derivata.

Teorema (I formula fondamentale)

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se anche $t \mapsto t x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, la trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risulta

$$X'(\omega) = \mathcal{F}[(-j t) x(t)]. \quad (17)$$

Le formule fondamentali

Vediamo ora le formule per la derivata della trasformata e per la trasformata della derivata.

Teorema (I formula fondamentale)

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se anche $t \mapsto tx(t) \in L^1(\mathbb{R})$, la trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risulta

$$X'(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)x(t)]. \quad (17)$$

La (17) si riscrive

$$\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{\partial}{\partial \omega} e^{-j\omega t} dt$$

e consiste nella possibilità di derivare sotto il segno di integrale.

Le formule fondamentali

La formula (17) si può iterare.

Le formule fondamentali

La formula (17) si può iterare.

Corollario

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se anche $t \mapsto t^n x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, per un $n \in \mathbb{N}$, la trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^n(\mathbb{R})$ e risulta

$$X^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[(-j t)^k x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Le formule fondamentali

La formula (17) si può iterare.

Corollario

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se anche $t \mapsto t^n x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, per un $n \in \mathbb{N}$, la trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^n(\mathbb{R})$ e risulta

$$X^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[(-j t)^k x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Notiamo soltanto che dalla sommabilità di $x(t)$ e $t^n x(t)$ segue quella di $t^k x(t)$, per $k = 1, \dots, n$, in virtù della disuguaglianza

$$|t|^k \leq 1 + |t|^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le formule fondamentali

Il fattore t^n *pesa* intorno a $\mp\infty$.

Le formule fondamentali

Il fattore t^n pesa intorno a $\mp\infty$.

Il corollario precedente mostra dunque che il *buon comportamento all'infinito del segnale x implica regolarità di carattere differenziale per la trasformata X* .

Le formule fondamentali

Il fattore t^n pesa intorno a $\mp\infty$.

Il corollario precedente mostra dunque che il *buon comportamento all'infinito del segnale x implica regolarità di carattere differenziale per la trasformata X* .

In particolare,

Corollario

Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$ nulla fuori di un intervallo limitato. La trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e risulta

$$X^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[(-j t)^k x(t)], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Le formule fondamentali

Possiamo applicare l'ultimo **corollario** alla funzione $x(t) = \Pi(t)$ ed il **corollario** precedente, $\forall n \in \mathbb{N}$, alla funzione $x(t) = e^{-|t|}$, ottenendo che entrambe le trasformate (7) e (8) sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Le formule fondamentali

Possiamo applicare l'ultimo **corollario** alla funzione $x(t) = \Pi(t)$ ed il **corollario** precedente, $\forall n \in \mathbb{N}$, alla funzione $x(t) = e^{-|t|}$, ottenendo che entrambe le trasformate (7) e (8) sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

(Invero, per il legame con la trasformazione di Laplace, le due trasformate di Fourier sono funzioni analitiche in $\mathbb{R}$.)

Le formule fondamentali

Possiamo applicare l'ultimo **corollario** alla funzione $x(t) = \Pi(t)$ ed il **corollario** precedente, $\forall n \in \mathbb{N}$, alla funzione $x(t) = e^{-|t|}$, ottenendo che entrambe le trasformate (7) e (8) sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

(Invero, per il legame con la trasformazione di Laplace, le due trasformate di Fourier sono funzioni analitiche in $\mathbb{R}$.)

Invece la funzione

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

trasformata in (9) non verifica le ipotesi del **teorema**, non essendo $t \mapsto t x(t)$ sommabile in $\mathbb{R}$; la trasformata (9) non è derivabile in 0.

Le formule fondamentali

Vediamo ora la formula per la trasformata della derivata.

Le formule fondamentali

Vediamo ora la formula per la trasformata della derivata.

Teorema (II formula fondamentale)

Se x è assolutamente continua e $x, x' \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x'(t)] = j\omega \mathcal{F}[x(t)]. \quad (20)$$

Le formule fondamentali

Vediamo ora la formula per la trasformata della derivata.

Teorema (II formula fondamentale)

Se x è assolutamente continua e $x, x' \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x'(t)] = j\omega \mathcal{F}[x(t)]. \quad (20)$$

Essendo x assolutamente continua, risulta, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau) d\tau$$

e quindi l'ipotesi $x' \in L^1(\mathbb{R})$ implica che $x(t)$ converge per $t \rightarrow \mp\infty$.

Le formule fondamentali

Poiché anche $x \in L^1(\mathbb{R})$, il limite è necessariamente 0:

$$\lim_{t \rightarrow \mp \infty} x(t) = 0. \quad (21)$$

Le formule fondamentali

Poiché anche $x \in L^1(\mathbb{R})$, il limite è necessariamente 0:

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} x(t) = 0. \quad (21)$$

Integrando per parti, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x'] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= [x(t) e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \mathcal{F}[x]. \end{aligned}$$

Le formule fondamentali

Poiché anche $x \in L^1(\mathbb{R})$, il limite è necessariamente 0:

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} x(t) = 0. \quad (21)$$

Integrando per parti, allora abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x'] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= [x(t) e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \mathcal{F}[x]. \end{aligned}$$

Notiamo che la sola ipotesi $x \in L^1(\mathbb{R})$ non implica la (21).

Le formule fondamentali

Anche la (20) può essere iterata.

Le formule fondamentali

Anche la (20) può essere iterata.

Corollario

Se x è di classe $C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, e $x^{(n-1)}$ è assolutamente continua, con $x, x', \dots, x^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x^{(k)}(t)] = (j\omega)^k \mathcal{F}[x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Le formule fondamentali

Anche la (20) può essere iterata.

Corollario

Se x è di classe $C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, e $x^{(n-1)}$ è assolutamente continua, con $x, x', \dots, x^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x^{(k)}(t)] = (j\omega)^k \mathcal{F}[x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Dunque, essendo $\mathcal{F}[x^{(n)}]$ infinitesima per $\omega \rightarrow \mp\infty$, risulta

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{\mathcal{F}[x^{(n)}]}{(j\omega)^n} = o(\omega^{-n}).$$

Le formule fondamentali

Anche la (20) può essere iterata.

Corollario

Se x è di classe $C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, e $x^{(n-1)}$ è assolutamente continua, con $x, x', \dots, x^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x^{(k)}(t)] = (j\omega)^k \mathcal{F}[x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Dunque, essendo $\mathcal{F}[x^{(n)}]$ infinitesima per $\omega \rightarrow \mp\infty$, risulta

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{\mathcal{F}[x^{(n)}]}{(j\omega)^n} = o(\omega^{-n}).$$

In particolare, per $n \geq 2$ è garantita la sommabilità della trasformata.

Le formule fondamentali

Il corollario mostra che la *regolarità di carattere differenziale del segnale x implica il buon comportamento all'infinito della trasformata X* .

Le formule fondamentali

Il corollario mostra che la *regolarità di carattere differenziale del segnale x implica il buon comportamento all'infinito della trasformata X* .

Pertanto le due proprietà si scambiano l'una nell'altra passando da x alla trasformata X .

Le formule fondamentali

Il corollario mostra che la *regolarità di carattere differenziale del segnale x implica il buon comportamento all'infinito della trasformata X* .

Pertanto le due proprietà si scambiano l'una nell'altra passando da x alla trasformata X .

Osservazione

La proprietà fondamentale della $\mathcal{F}$ -trasformazione è dunque di far corrispondere all'operazione algebrica di moltiplicazione del segnale $x(t)$ per $-j t$, l'operazione di derivazione per la trasformata e, viceversa, di far corrispondere all'operazione di derivazione del segnale $x(t)$, l'operazione algebrica di moltiplicazione per $j \omega$ per la trasformata.

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo la $\mathcal{F}$ -trasformata della finestra triangolare

$$\Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)] .$$

Le formule fondamentali

Esempio

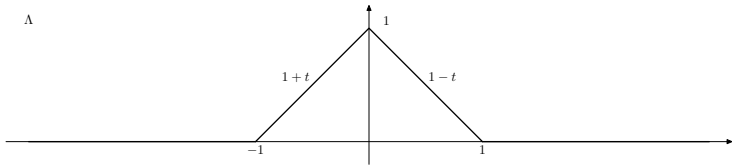
Calcoliamo la $\mathcal{F}$ -trasformata della finestra triangolare

$$\Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)].$$

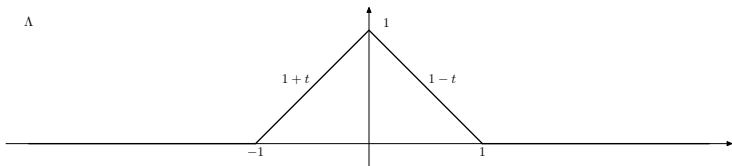
Essendo Λ assolutamente continua, deriviamo:

$$\Lambda'(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1) = \Pi(t+1/2) - \Pi(t-1/2). \quad (23)$$

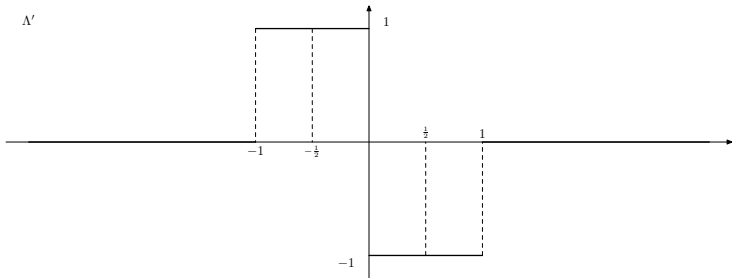
A



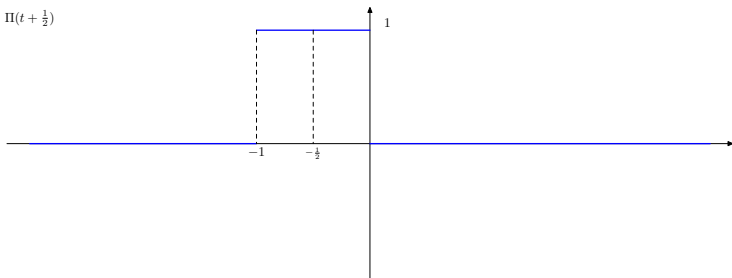
Λ



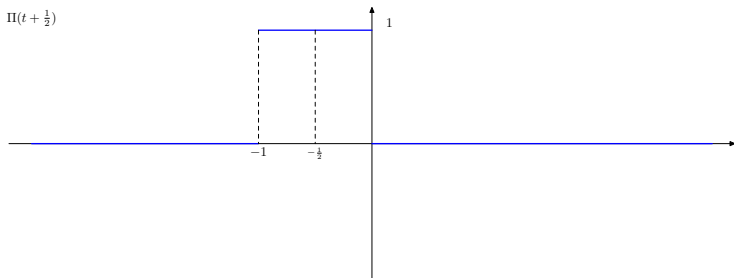
Λ'



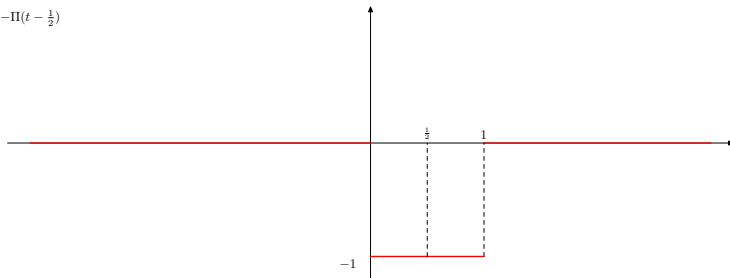
$$\Pi(t + \frac{1}{2})$$



$$\Pi(t + \frac{1}{2})$$



$$-\Pi(t - \frac{1}{2})$$



Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Applichiamo la trasformazione a primo e ultimo membro di (23).

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Applichiamo la trasformazione a primo e ultimo membro di (23).

Usiamo la II formula fondamentale per il primo membro.

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Applichiamo la trasformazione a primo e ultimo membro di (23).

Usiamo la II formula fondamentale per il primo membro.

Per il secondo membro, usiamo la formula (15) di traslazione in t e ricordiamo la (7):

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Applichiamo la trasformazione a primo e ultimo membro di (23).

Usiamo la II formula fondamentale per il primo membro.

Per il secondo membro, usiamo la formula (15) di traslazione in t e ricordiamo la (7):

$$j\omega \mathcal{F}[\Lambda] = e^{j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Applichiamo la trasformazione a primo e ultimo membro di (23).

Usiamo la II formula fondamentale per il primo membro.

Per il secondo membro, usiamo la formula (15) di traslazione in t e ricordiamo la (7):

$$j\omega \mathcal{F}[\Lambda] = e^{j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$

e quindi ricaviamo

$$\mathcal{F}[\Lambda] = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2. \quad (24)$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

È possibile anche usare la I formula fondamentale.

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

È possibile anche usare la I formula fondamentale.

A tal fine, scriviamo

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= u(t+1) - u(t-1) + t[u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)] \\ &= \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + j(-jt) \left[\Pi\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) \right]\end{aligned}$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Trasformando

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Lambda] &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + j \frac{d}{d\omega} \left[(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{2} \right] \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} - 4 \frac{d}{d\omega} \frac{(\sin \frac{\omega}{2})^2}{\omega} \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + 4 \frac{(\sin \frac{\omega}{2})^2}{\omega^2} - 4 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\omega}.\end{aligned}$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Trasformando

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Lambda] &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + j \frac{d}{d\omega} \left[(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{2} \right] \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} - 4 \frac{d}{d\omega} \frac{(\sin \frac{\omega}{2})^2}{\omega} \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + 4 \frac{(\sin \frac{\omega}{2})^2}{\omega^2} - 4 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\omega}.\end{aligned}$$

Pertanto ritroviamo la (24).

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Trasformando

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Lambda] &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + j \frac{d}{d\omega} \left[(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{2} \right] \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} - 4 \frac{d}{d\omega} \frac{(\sin \frac{\omega}{2})^2}{\omega} \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + 4 \frac{(\sin \frac{\omega}{2})^2}{\omega^2} - 4 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\omega}.\end{aligned}$$

Pertanto ritroviamo la (24).

Notiamo che la trasformata è una funzione reale pari, come era prevedibile, essendo tale pure Λ .

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo la trasformata di

$$x(t) = (1 - t^2) [u(t + 1) - u(t - 1)] = (1 - t^2) \Pi(t/2).$$

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo la trasformata di

$$x(t) = (1 - t^2) [u(t + 1) - u(t - 1)] = (1 - t^2) \Pi(t/2).$$

Per la formula di cambiamento di scala (16), da (7) ricaviamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t/2)] = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo la trasformata di

$$x(t) = (1 - t^2) [u(t + 1) - u(t - 1)] = (1 - t^2) \Pi(t/2).$$

Per la formula di cambiamento di scala (16), da (7) ricaviamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t/2)] = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

e quindi per la prima formula fondamentale (17)

$$X(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + 2 \frac{d^2}{d\omega^2} \frac{\sin \omega}{\omega}. \quad (25)$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Calcoliamo la derivata in (25) mediante la formula di Leibniz:

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\sin \omega \times \frac{1}{\omega} \right) = -\frac{\sin \omega}{\omega} - 2 \frac{\cos \omega}{\omega^2} + 2 \frac{\sin \omega}{\omega^3}.$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Calcoliamo la derivata in (25) mediante la formula di Leibniz:

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\sin \omega \times \frac{1}{\omega} \right) = -\frac{\sin \omega}{\omega} - 2 \frac{\cos \omega}{\omega^2} + 2 \frac{\sin \omega}{\omega^3}.$$

Dunque, per $\omega \neq 0$,

$$X(\omega) = 4 \left(\frac{\sin \omega}{\omega^3} - \frac{\cos \omega}{\omega^2} \right). \quad (26)$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Inoltre chiaramente

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{4}{3}.$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Inoltre chiaramente

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{4}{3}.$$

Alternativamente, usando gli sviluppi di Mac Laurin di seno e coseno, abbiamo

$$\sin \omega - \omega \cos \omega = \omega - \frac{\omega^3}{6} + o(\omega^3) - \omega + \frac{\omega^3}{2} + o(\omega^3) = \frac{\omega^3}{3} + o(\omega^3)$$

e quindi da (26) ricaviamo nuovamente $X(0) = \frac{4}{3}$.

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo $X(\omega) = \mathcal{F}[e^{-t^2}]$ usando le proprietà fondamentali della trasformazione. La trasformata è già stata calcolata mediante il legame con la trasformata di Laplace, (10).

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo $X(\omega) = \mathcal{F}[e^{-t^2}]$ usando le proprietà fondamentali della trasformazione. La trasformata è già stata calcolata mediante il legame con la trasformata di Laplace, (10).

Abbiamo

$$j x'(t) = -2j t x(t)$$

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo $X(\omega) = \mathcal{F}[e^{-t^2}]$ usando le proprietà fondamentali della trasformazione. La trasformata è già stata calcolata mediante il legame con la trasformata di Laplace, (10).

Abbiamo

$$j x'(t) = -2j t x(t)$$

e quindi

$$j \mathcal{F}[x'(t)] = 2 \mathcal{F}[-j t x(t)],$$

Le formule fondamentali

Esempio

Calcoliamo $X(\omega) = \mathcal{F}[e^{-t^2}]$ usando le proprietà fondamentali della trasformazione. La trasformata è già stata calcolata mediante il legame con la trasformata di Laplace, (10).

Abbiamo

$$j x'(t) = -2j t x(t)$$

e quindi

$$j \mathcal{F}[x'(t)] = 2 \mathcal{F}[-j t x(t)],$$

ovvero, usando la II formula fondamentale a primo membro e la I formula fondamentale a secondo membro,

$$-\omega X(\omega) = 2 X'(\omega).$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili.

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili.

Ne ricaviamo

$$X(\omega) = X(0) e^{-\omega^2/4}.$$

Le formule fondamentali

Esempio (continuazione)

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili.

Ne ricaviamo

$$X(\omega) = X(0) e^{-\omega^2/4}.$$

Infine basta osservare che

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Una classe di funzioni particolarmente importante nella teoria della $\mathcal{F}$ -trasformazione è quella $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ di Schwartz o delle funzioni a decrescenza rapida.

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Una classe di funzioni particolarmente importante nella teoria della $\mathcal{F}$ -trasformazione è quella $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ di Schwartz o delle funzioni a decrescenza rapida.

Definizione

Una funzione $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ è detta a decrescenza rapida se, insieme con tutte le derivate, è infinitesima di ordine infinitamente grande a $\mp\infty$, cioè risulta, $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} t^n x^{(k)}(t) = 0.$$

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Esempio

Appartiene chiaramente a $\mathcal{S}$ ogni funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ nulla fuori di un intervallo limitato.

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Esempio

Appartiene chiaramente a $\mathcal{S}$ ogni funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ nulla fuori di un intervallo limitato.

La funzione $x(t) = e^{-t^2}$ è a decrescenza rapida.

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Esempio

Appartiene chiaramente a $\mathcal{S}$ ogni funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ nulla fuori di un intervallo limitato.

La funzione $x(t) = e^{-t^2}$ è a decrescenza rapida.

Per quanto ovvio, osserviamo esplicitamente che la funzione $t \mapsto 1/(1+t^2)$ *non* è a decrescenza rapida, pur essendo infinitesima a $\mp\infty$.

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Per i criteri di sommabilità, evidentemente

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}).$$

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Per i criteri di sommabilità, evidentemente

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}).$$

Inoltre le derivate di una funzione a decrescenza rapida sono anch'esse a decrescenza rapida, come pure il prodotto di una funzione a decrescenza rapida per un polinomio.

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Per i criteri di sommabilità, evidentemente

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}).$$

Inoltre le derivate di una funzione a decrescenza rapida sono anch'esse a decrescenza rapida, come pure il prodotto di una funzione a decrescenza rapida per un polinomio.

Poiché le funzioni di $\mathcal{S}$ hanno sia buon comportamento all'infinito che regolarità C^∞ , in virtù delle formule fondamentali, lo stesso vale per le loro trasformate di Fourier.

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Dunque,

$$\mathcal{F}[x] \in \mathcal{S}, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Dunque,

$$\mathcal{F}[x] \in \mathcal{S}, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Inoltre si può applicare la formula di antitrasformazione. Pertanto vale il seguente

La trasformata di funzioni a decrescenza rapida

Dunque,

$$\mathcal{F}[x] \in \mathcal{S}, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Inoltre si può applicare la formula di antitrasformazione. Pertanto vale il seguente

Teorema

La trasformazione di Fourier

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

è biunivoca. La trasformazione inversa

$$\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

è definita nella (12).

La trasformata della convoluzione

Teorema

Se $x, y \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y]. \quad (27)$$

La trasformata della convoluzione

Teorema

Se $x, y \in L^1(\mathbb{R})$, risulta

$$\mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y]. \quad (27)$$

Per la dimostrazione, osserviamo che, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, risulta

$$\begin{aligned} e^{-j\omega t} x * y(t) &= e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \tau} x(\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} y(t - \tau) d\tau \\ &= (e^{-j\omega t} x(t)) * (e^{-j\omega t} y(t)). \end{aligned}$$

La trasformata della convoluzione

Essendo $\mathcal{F}[x * y]$ l'integrale del primo membro, la formula (27) segue ricordando che l'integrale del prodotto di convoluzione è il prodotto degli integrali:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x * y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x * y(t) dt \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-j\omega t} x(t)) * (e^{-j\omega t} y(t)) dt \\&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} y(t) dt \right] \\&= \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y].\end{aligned}$$

La trasformata della convoluzione

Esempio

La trasformata di Λ calcolata in (24) può essere ottenuta anche dalla formula (27), ricordando $\mathcal{F}[\Pi]$ in (7) e l'uguaglianza

$$\Lambda(t) = \Pi * \Pi(t).$$

La trasformata della convoluzione

Esempio

La trasformata di Λ calcolata in (24) può essere ottenuta anche dalla formula (27), ricordando $\mathcal{F}[\Pi]$ in (7) e l'uguaglianza

$$\Lambda(t) = \Pi * \Pi(t).$$

In tal modo, ritroviamo

$$\mathcal{F}[\Lambda](\omega) = \mathcal{F}[\Pi * \Pi(t)] = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right)^2.$$

La trasformata della convoluzione

Procedendo formalmente, ricaviamo la trasformata del prodotto dalla (27), che riscriviamo

$$\mathcal{F}[x * y] = X Y .$$

La trasformata della convoluzione

Procedendo formalmente, ricaviamo la trasformata del prodotto dalla (27), che riscriviamo

$$\mathcal{F}[x * y] = X Y .$$

Applicando ad ambo i membri la $\mathcal{F}$ ed usando (14), troviamo

$$\mathcal{F}[X Y] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[x * y]] = 2 \pi x * y(-t) .$$

La trasformata della convoluzione

Procedendo formalmente, ricaviamo la trasformata del prodotto dalla (27), che riscriviamo

$$\mathcal{F}[x * y] = X Y.$$

Applicando ad ambo i membri la $\mathcal{F}$ ed usando (14), troviamo

$$\mathcal{F}[X Y] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[x * y]] = 2 \pi x * y(-t).$$

Inoltre

$$\mathcal{F}[X] = 2 \pi x(-t), \quad \mathcal{F}[Y] = 2 \pi y(-t)$$

La trasformata della convoluzione

Procedendo formalmente, ricaviamo la trasformata del prodotto dalla (27), che riscriviamo

$$\mathcal{F}[x * y] = X Y.$$

Applicando ad ambo i membri la $\mathcal{F}$ ed usando (14), troviamo

$$\mathcal{F}[X Y] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[x * y]] = 2\pi x * y(-t).$$

Inoltre

$$\mathcal{F}[X] = 2\pi x(-t), \quad \mathcal{F}[Y] = 2\pi y(-t)$$

e per un'osservazione precedente,

$$x(-t) * y(-t) = (x * y)(-t).$$

La trasformata della convoluzione

Pertanto

$$\mathcal{F}[X \cdot Y] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X] * \mathcal{F}[Y]. \quad (28)$$

La trasformata della convoluzione

Pertanto

$$\mathcal{F}[X \cdot Y] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X] * \mathcal{F}[Y]. \quad (28)$$

È da notare a proposito di questa formula però che

$$X, Y \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow X \cdot Y \in L^1(\mathbb{R}).$$

La trasformata della convoluzione

Pertanto

$$\mathcal{F}[X \cdot Y] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X] * \mathcal{F}[Y]. \quad (28)$$

È da notare a proposito di questa formula però che

$$X, Y \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow X \cdot Y \in L^1(\mathbb{R}).$$

La (28) vale certamente per $X, Y \in \mathcal{S}$.