

Problemi ai limiti

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli “Federico II”



Anno Accademico 2022/2023

Problemi ai limiti

- Introduzione
- Equazioni in forma autoaggiunta
- La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa
- Il problema di Sturm-Liouville

Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

dove i coefficienti a_1 e a_2 e il termine noto f sono funzioni reali continue nell'intervallo $[a, b]$.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

dove i coefficienti a_1 e a_2 e il termine noto f sono funzioni reali continue nell'intervallo $[a, b]$.

È noto che tale equazione ammette infinite soluzioni.

Introduzione

In particolare, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $C^2[a, b]$:

Introduzione

In particolare, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $C^2[a, b]$:

se y_1 e y_2 sono integrali indipendenti, l'integrale generale si scrive

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 ,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Introduzione

In particolare, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $C^2[a, b]$:

se y_1 e y_2 sono integrali indipendenti, l'integrale generale si scrive

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 ,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

L'integrale generale dell'equazione completa (1) si scrive

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + z , \tag{2}$$

essendo z una soluzione di (1).

Introduzione

Ricordiamo che il problema di Cauchy relativo all'equazione (1) consiste nell'assegnare i valori di y e di y' in uno stesso punto dell'intervallo $[a, b]$.

Introduzione

Ricordiamo che il problema di Cauchy relativo all'equazione (1) consiste nell'assegnare i valori di y e di y' in uno stesso punto dell'intervallo $[a, b]$.

Vale il seguente risultato di esistenza e unicità:

Introduzione

Ricordiamo che il problema di Cauchy relativo all'equazione (1) consiste nell'assegnare i valori di y e di y' in uno stesso punto dell'intervallo $[a, b]$.

Vale il seguente risultato di esistenza e unicità:

per ogni $x_0 \in [a, b]$ e $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, esiste un'unica $y \in C^2[a, b]$ che soddisfa (1) in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$ e verifica le condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Introduzione

Esaminiamo ora un problema diverso relativo all'equazione (1), consistente nel ricercare soluzioni dell'equazione soddisfacenti una condizione in a e una in b .

Introduzione

Esaminiamo ora un problema diverso relativo all'equazione (1), consistente nel ricercare soluzioni dell'equazione soddisfacenti una condizione in a e una in b .

Un problema di questo tipo, essendo le condizioni aggiuntive assegnate negli estremi dell'intervallo, si dice *problema ai limiti*.

Introduzione

Esaminiamo ora un problema diverso relativo all'equazione (1), consistente nel ricercare soluzioni dell'equazione soddisfacenti una condizione in a e una in b .

Un problema di questo tipo, essendo le condizioni aggiuntive assegnate negli estremi dell'intervallo, si dice *problema ai limiti*.

Ad esempio, costituisce un problema ai limiti la ricerca di integrali y di (1) con valori assegnati $y(a)$ e $y(b)$ negli estremi.

Introduzione

Esaminiamo ora un problema diverso relativo all'equazione (1), consistente nel ricercare soluzioni dell'equazione soddisfacenti una condizione in a e una in b .

Un problema di questo tipo, essendo le condizioni aggiuntive assegnate negli estremi dell'intervallo, si dice *problema ai limiti*.

Ad esempio, costituisce un problema ai limiti la ricerca di integrali y di (1) con valori assegnati $y(a)$ e $y(b)$ negli estremi.

Gli esempi seguenti mostrano che per i problemi ai limiti la situazione è notevolmente diversa rispetto al problema di Cauchy.

Esempio

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta, \end{cases} \quad (3)$$

essendo α e β costanti assegnate.

Esempio

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = \alpha, y(\pi) = \beta, \end{cases} \quad (3)$$

essendo α e β costanti assegnate.

L'integrale generale dell'equazione è

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Esempio (continuazione)

Evidentemente, per ogni scelta delle costanti, risulta

$$y(0) = -y(\pi),$$

Esempio (continuazione)

Evidentemente, per ogni scelta delle costanti, risulta

$$y(0) = -y(\pi),$$

quindi se il problema (3) ha soluzione, risulta necessariamente

$$\alpha = -\beta.$$

Esempio (continuazione)

Evidentemente, per ogni scelta delle costanti, risulta

$$y(0) = -y(\pi),$$

quindi se il problema (3) ha soluzione, risulta necessariamente

$$\alpha = -\beta.$$

È chiaro inoltre che, se tale condizione è soddisfatta, sono soluzioni del problema tutte e sole le funzioni

$$y = \alpha \cos x + c_2 \sin x,$$

con c_2 costante arbitraria; in particolare, il problema ha infinite soluzioni.

Esempio

È subito visto che il problema

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{in } [0, \pi/2] \\ y(0) = \alpha, y(\pi/2) = \beta, \end{cases} \quad (4)$$

ammette, per ogni α e β valori assegnati, l'unica soluzione

$$y = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

Introduzione

Più in generale, invece di $y(a)$ e $y(b)$, si assegnano i valori delle espressioni

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a), \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b),$$

essendo

$$(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0) \text{ e } (\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$$

coppie fissate.

Introduzione

Dati due numeri reali γ_1 e γ_2 , consideriamo dunque il seguente problema

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) & \text{in } [a, b] \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \end{cases} \quad (5)$$

Introduzione

Dati due numeri reali γ_1 e γ_2 , consideriamo dunque il seguente problema

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) & \text{in } [a, b] \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \end{cases} \quad (5)$$

È sufficiente considerare i problemi con valori assegnati negli estremi nulli:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Un risultato che useremo spesso è il seguente.

Lemma

Se y_1 e y_2 sono derivabili e verificano le condizioni

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0 \\ \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

con $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$, il loro wronskiano si annulla in a :

$$W(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Introduzione

Le (6) possono essere riguardate come un sistema lineare omogeneo nelle incognite α_1 e β_1 , il cui determinante dei coefficienti è il wronskiano di y_1 e y_2 , calcolato in a .

Introduzione

Le (6) possono essere riguardate come un sistema lineare omogeneo nelle incognite α_1 e β_1 , il cui determinante dei coefficienti è il wronskiano di y_1 e y_2 , calcolato in a .

Poiché il sistema ammette una soluzione $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$, risulta $W(a) = 0$.

Introduzione

Le (6) possono essere riguardate come un sistema lineare omogeneo nelle incognite α_1 e β_1 , il cui determinante dei coefficienti è il wronskiano di y_1 e y_2 , calcolato in a .

Poiché il sistema ammette una soluzione $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$, risulta $W(a) = 0$.

Analogamente, se

$$\begin{cases} \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0 \\ \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0 \end{cases}$$

con $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$, risulta $W(b) = 0$.

Equazioni in forma autoaggiunta

Riscriviamo l'equazione (1).

Equazioni in forma autoaggiunta

Riscriviamo l'equazione (1).

La funzione

$$p(x) = \exp \left[\int_a^x a_1(\tau) d\tau \right]$$

appartiene a $C^1[a, b]$ ed è positiva in ogni punto.

Equazioni in forma autoaggiunta

Riscriviamo l'equazione (1).

La funzione

$$p(x) = \exp \left[\int_a^x a_1(\tau) d\tau \right]$$

appartiene a $C^1[a, b]$ ed è positiva in ogni punto.

Quindi l'equazione (1) è equivalente alla seguente

$$-p(x)y'' - p(x)a_1(x)y' - p(x)a_2(x)y = -p(x)f(x), \quad (7)$$

ottenuta moltiplicando ambo i membri per $-p(x)$.

Equazioni in forma autoaggiunta

Osservando che

$$p' = p a_1$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Osservando che

$$p' = p a_1$$

e ponendo

$$q = -p a_2, \quad F = -p f,$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Osservando che

$$p' = p a_1$$

e ponendo

$$q = -p a_2, \quad F = -p f,$$

la (7) diviene

$$-(p(x) y')' + q(x) y = F(x). \quad (8)$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Osservando che

$$p' = p a_1$$

e ponendo

$$q = -p a_2, \quad F = -p f,$$

la (7) diviene

$$-(p(x) y')' + q(x) y = F(x). \quad (8)$$

La (8) si chiama equazione in forma autoaggiunta.

Equazioni in forma autoaggiunta

Osservando che

$$p' = p a_1$$

e ponendo

$$q = -p a_2, \quad F = -p f,$$

la (7) diviene

$$-(p(x) y')' + q(x) y = F(x). \quad (8)$$

La (8) si chiama equazione in forma autoaggiunta.

Nel seguito considereremo sempre equazioni in forma autoaggiunta.

Equazioni in forma autoaggiunta

Introdotta l'operatore differenziale lineare (in forma autoaggiunta)

$$\mathcal{L}: y \in C^2[a, b] \rightarrow -(p(x)y')' + q(x)y \in C[a, b], \quad (9)$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Introdotta l'operatore differenziale lineare (in forma autoaggiunta)

$$\mathcal{L}: y \in C^2[a, b] \rightarrow -(p(x)y')' + q(x)y \in C[a, b], \quad (9)$$

l'equazione si scrive semplicemente

$$\mathcal{L}y = F.$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Introdotta l'operatore differenziale lineare (in forma autoaggiunta)

$$\mathcal{L}: y \in C^2[a, b] \rightarrow -(p(x)y')' + q(x)y \in C[a, b], \quad (9)$$

l'equazione si scrive semplicemente

$$\mathcal{L}y = F.$$

Per l'operatore \mathcal{L} vale la seguente *identità di Lagrange*, per ogni $y, z \in C^2[a, b]$:

$$z \mathcal{L}y - y \mathcal{L}z = (p(yz' - y'z))' = (pW)', \quad (10)$$

di facile verifica diretta. W è il wronskiano di y e z .

Equazioni in forma autoaggiunta

Mettiamo in luce una proprietà dell'operatore \mathcal{L} che giustifica l'appellativo di autoaggiunto.

Equazioni in forma autoaggiunta

Mettiamo in luce una proprietà dell'operatore \mathcal{L} che giustifica l'appellativo di autoaggiunto.

Consideriamo il sottospazio dello spazio reale $L^2(a, b)$

$$X = \left\{ y \in C^2[a, b] : \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \right\}. \quad (11)$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Mettiamo in luce una proprietà dell'operatore \mathcal{L} che giustifica l'appellativo di autoaggiunto.

Consideriamo il sottospazio dello spazio reale $L^2(a, b)$

$$X = \left\{ y \in C^2[a, b] : \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \right\}. \quad (11)$$

Lemma

Per ogni $y, z \in X$, risulta

$$(\mathcal{L}y, z) = (y, \mathcal{L}z). \quad (12)$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Ricordiamo che

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

è il prodotto scalare in $L^2(a, b)$ reale.

Equazioni in forma autoaggiunta

Ricordiamo che

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

è il prodotto scalare in $L^2(a, b)$ reale.

Per il **lemma**, il wronskiano di y e z si annulla in a e b ,

$$W(a) = W(b) = 0,$$

Equazioni in forma autoaggiunta

Ricordiamo che

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

è il prodotto scalare in $L^2(a, b)$ reale.

Per il **lemma**, il wronskiano di y e z si annulla in a e b ,

$$W(a) = W(b) = 0,$$

quindi, per l'identità di Lagrange,

$$(\mathcal{L}y, z) - (y, \mathcal{L}z) = \int_a^b (z\mathcal{L}y - y\mathcal{L}z) dt = [pW]_a^b = 0.$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

L'introduzione dello spazio in (11) consente di scrivere sinteticamente le condizioni ai limiti: $y \in X$.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

L'introduzione dello spazio in (11) consente di scrivere sinteticamente le condizioni ai limiti: $y \in X$.

Consideriamo il problema ai limiti

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = f \\ y \in X, \end{cases} \quad (13)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

L'introduzione dello spazio in (11) consente di scrivere sinteticamente le condizioni ai limiti: $y \in X$.

Consideriamo il problema ai limiti

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = f \\ y \in X, \end{cases} \quad (13)$$

e il corrispondente problema relativo all'equazione omogenea associata

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y \in X, \end{cases} \quad (14)$$

dove $p \in C^1[a, b]$, $p > 0$, $q, f \in C[a, b]$.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Proposizione

Se il problema (14) ammette solo la soluzione banale, il problema (13) ammette, per ogni $f \in C[a, b]$, un'unica soluzione.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Proposizione

Se il problema (14) ammette solo la soluzione banale, il problema (13) ammette, per ogni $f \in C[a, b]$, un'unica soluzione.

L'unicità è chiara: la differenza tra due soluzioni di (13) risolve (14).

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Proposizione

Se il problema (14) ammette solo la soluzione banale, il problema (13) ammette, per ogni $f \in C[a, b]$, un'unica soluzione.

L'unicità è chiara: la differenza tra due soluzioni di (13) risolve (14).

Per costruire una soluzione del problema (13), consideriamo soluzioni non banali y_1 e y_2 dell'equazione omogenea associata $\mathcal{L}y = 0$, verificanti rispettivamente le condizioni

$$\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0, \quad \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0. \quad (15)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Possiamo determinare y_1 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(a) = -\beta_1, y'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Possiamo determinare y_1 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(a) = -\beta_1, y'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

È $y_1 \neq 0$ perché $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Possiamo determinare y_1 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(a) = -\beta_1, y'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

È $y_1 \neq 0$ perché $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$.

Similmente determiniamo y_2 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(b) = -\beta_2, y'(b) = \alpha_2 \end{cases}$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Possiamo determinare y_1 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(a) = -\beta_1, y'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

È $y_1 \neq 0$ perché $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$.

Similmente determiniamo y_2 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(b) = -\beta_2, y'(b) = \alpha_2 \end{cases}$$

È chiaro che risulta

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) \neq 0, \quad \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \neq 0. \quad (16)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ad esempio, se fosse

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0,$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ad esempio, se fosse

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0,$$

la funzione y_1 sarebbe soluzione di (14) e quindi, per l'ipotesi, sarebbe la soluzione banale, che è falso.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ad esempio, se fosse

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0,$$

la funzione y_1 sarebbe soluzione di (14) e quindi, per l'ipotesi, sarebbe la soluzione banale, che è falso.

Le (16) implicano che y_1 e y_2 sono indipendenti:

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ad esempio, se fosse

$$\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0,$$

la funzione y_1 sarebbe soluzione di (14) e quindi, per l'ipotesi, sarebbe la soluzione banale, che è falso.

Le (16) implicano che y_1 e y_2 sono indipendenti:

se fossero dipendenti, sarebbero proporzionali e quindi le (16) sarebbero in contrasto con le (15).

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Determiniamo la soluzione di (13) mediante il metodo di Lagrange della variazione delle costanti, che consiste nel cercare y sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \quad (17)$$

con c_1 e c_2 funzioni da determinare.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Determiniamo la soluzione di (13) mediante il metodo di Lagrange della variazione delle costanti, che consiste nel cercare y sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \quad (17)$$

con c_1 e c_2 funzioni da determinare.

L'equazione

$$\mathcal{L}y = f$$

è una condizione da soddisfare, mentre abbiamo due funzioni da determinare:

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Determiniamo la soluzione di (13) mediante il metodo di Lagrange della variazione delle costanti, che consiste nel cercare y sotto la forma

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \quad (17)$$

con c_1 e c_2 funzioni da determinare.

L'equazione

$$\mathcal{L}y = f$$

è una condizione da soddisfare, mentre abbiamo due funzioni da determinare:

possiamo pensare di imporre una condizione aggiuntiva su c_1 e c_2 .

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Essendo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = -\left(p(c_1 y_1 + c_2 y_2)'\right)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2),$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Essendo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = -(p(c_1 y_1 + c_2 y_2)')' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2),$$

dobbiamo calcolare

$$y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'.$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Essendo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = -\left(p(c_1 y_1 + c_2 y_2)'\right)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2),$$

dobbiamo calcolare

$$y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'.$$

Imponiamo la condizione

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Essendo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = -\left(p(c_1 y_1 + c_2 y_2)'\right)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2),$$

dobbiamo calcolare

$$y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'.$$

Imponiamo la condizione

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

che garantisce che la derivata di y si calcoli come se c_1 e c_2 fossero costanti:

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Essendo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = -\left(p(c_1 y_1 + c_2 y_2)'\right)' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2),$$

dobbiamo calcolare

$$y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'.$$

Imponiamo la condizione

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

che garantisce che la derivata di y si calcoli come se c_1 e c_2 fossero costanti:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2'. \quad (18)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Sotto questa condizione, l'equazione $\mathcal{L}y = f$ si scrive

$$y_1' c_1' + y_2' c_2' = -\frac{f}{p}$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Sotto questa condizione, l'equazione $\mathcal{L}y = f$ si scrive

$$y_1' c_1' + y_2' c_2' = -\frac{f}{p}$$

e giungiamo al sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = -\frac{f}{p} \end{cases}$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Sotto questa condizione, l'equazione $\mathcal{L}y = f$ si scrive

$$y_1' c_1' + y_2' c_2' = -\frac{f}{p}$$

e giungiamo al sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = -\frac{f}{p} \end{cases}$$

nelle incognite c_1' e c_2' .

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Sotto questa condizione, l'equazione $\mathcal{L}y = f$ si scrive

$$y_1' c_1' + y_2' c_2' = -\frac{f}{p}$$

e giungiamo al sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = -\frac{f}{p} \end{cases}$$

nelle incognite c_1' e c_2' .

Il determinante dei coefficienti è il wronskiano W che risulta diverso da zero in ogni punto, essendo y_1 e y_2 indipendenti.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Risolvendo il sistema mediante la regola di Cramer, ricaviamo pertanto

$$c'_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ -f/p & y'_2 \end{vmatrix} = \frac{f y_2}{pW}, \quad c'_2 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & -f/p \end{vmatrix} = -\frac{f y_1}{pW}.$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Risolvendo il sistema mediante la regola di Cramer, ricaviamo pertanto

$$c'_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ -f/p & y'_2 \end{vmatrix} = \frac{f y_2}{p W}, \quad c'_2 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & -f/p \end{vmatrix} = -\frac{f y_1}{p W}.$$

Osserviamo che la funzione $p W$ è costante in $[a, b]$, poiché per l'identità di Lagrange

$$(p W)' = y_2 \mathcal{L} y_1 - y_1 \mathcal{L} y_2 = 0,$$

essendo $\mathcal{L} y_1 = \mathcal{L} y_2 = 0$.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ricordando che y' si calcola come se c_1 e c_2 fossero costanti, la condizione

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ricordando che y' si calcola come se c_1 e c_2 fossero costanti, la condizione

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$

diviene

$$0 = c_1(a) (\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)) + c_2(a) (\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)).$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ricordando che y' si calcola come se c_1 e c_2 fossero costanti, la condizione

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$

diviene

$$0 = c_1(a) (\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)) + c_2(a) (\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)).$$

Quindi, per (15) e (16), equivale a

$$c_2(a) = 0.$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Ricordando che y' si calcola come se c_1 e c_2 fossero costanti, la condizione

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$

diviene

$$0 = c_1(a) (\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)) + c_2(a) (\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)).$$

Quindi, per (15) e (16), equivale a

$$c_2(a) = 0.$$

Analogamente, la condizione

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

significa

$$c_1(b) = 0.$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Pertanto

$$c_2(x) = -\frac{1}{pW} \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi, \quad c_1(x) = -\frac{1}{pW} \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Pertanto

$$c_2(x) = -\frac{1}{pW} \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi, \quad c_1(x) = -\frac{1}{pW} \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi$$

ed in definitiva

$$y(x) = -\frac{1}{pW} \left[y_2(x) \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi + y_1(x) \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi \right]. \quad (19)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Se poniamo

$$G(x, \xi) := \begin{cases} -\frac{y_1(x) y_2(\xi)}{pW}, & a \leq x \leq \xi \leq b \\ -\frac{y_1(\xi) y_2(x)}{pW}, & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (20)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Se poniamo

$$G(x, \xi) := \begin{cases} -\frac{y_1(x) y_2(\xi)}{pW}, & a \leq x \leq \xi \leq b \\ -\frac{y_1(\xi) y_2(x)}{pW}, & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (20)$$

possiamo riscrivere (19) come segue

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (21)$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

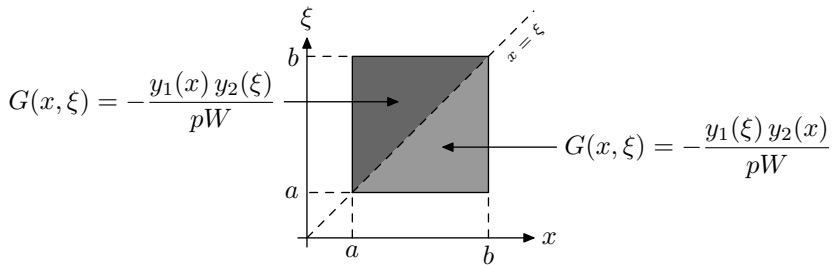
Se poniamo

$$G(x, \xi) := \begin{cases} -\frac{y_1(x) y_2(\xi)}{pW}, & a \leq x \leq \xi \leq b \\ -\frac{y_1(\xi) y_2(x)}{pW}, & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (20)$$

possiamo riscrivere (19) come segue

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (21)$$

La funzione $G = G(x, \xi)$ si dice *funzione di Green* del problema (13). Essa è reale, continua in $[a, b]^2$ e simmetrica, cioè verifica $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.



La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Esempio

Troviamo la funzione di Green relativa al problema

$$\begin{cases} -y'' = f & \text{in } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Esempio

Troviamo la funzione di Green relativa al problema

$$\begin{cases} -y'' = f & \text{in } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è

$$-y'' = 0,$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Esempio

Troviamo la funzione di Green relativa al problema

$$\begin{cases} -y'' = f & \text{in } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è

$$-y'' = 0,$$

il cui integrale generale è $y = c_0 + c_1x$, con c_0 e c_1 costanti arbitrarie.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Esempio

Troviamo la funzione di Green relativa al problema

$$\begin{cases} -y'' = f & \text{in } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è

$$-y'' = 0,$$

il cui integrale generale è $y = c_0 + c_1x$, con c_0 e c_1 costanti arbitrarie.

Possiamo scegliere

$$y_1(x) = x \text{ e } y_2(x) = 1 - x.$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Esempio (continuazione)

Il wronskiano è

$$W = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - 1 + x = -1$$

e poiché $p \equiv 1$, risulta $pW = -1$.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Esempio (continuazione)

Il wronskiano è

$$W = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - 1 + x = -1$$

e poiché $p \equiv 1$, risulta $pW = -1$.

Pertanto

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \\ (1-x)\xi, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Elenchiamo ulteriori proprietà della funzione di Green.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Elenchiamo ulteriori proprietà della funzione di Green.

Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, risulta:

- $G(\cdot, \xi) \in C[a, b] \cap C^2([a, b] - \{\xi\})$, con ξ discontinuità di I specie per le derivate $G_x(\cdot, \xi)$ e $G_{xx}(\cdot, \xi)$;

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Elenchiamo ulteriori proprietà della funzione di Green.

Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, risulta:

- $G(\cdot, \xi) \in C[a, b] \cap C^2([a, b] - \{\xi\})$, con ξ discontinuità di I specie per le derivate $G_x(\cdot, \xi)$ e $G_{xx}(\cdot, \xi)$;
- risulta $\mathcal{L}G(\cdot, \xi) = 0$ in $[a, b] - \{\xi\}$ e valgono le condizioni ai limiti

$$\alpha_1 G(a, \xi) + \beta_1 G_x(a, \xi) = 0, \quad \alpha_2 G(b, \xi) + \beta_2 G_x(b, \xi) = 0;$$

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Elenchiamo ulteriori proprietà della funzione di Green.

Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, risulta:

- $G(\cdot, \xi) \in C[a, b] \cap C^2([a, b] - \{\xi\})$, con ξ discontinuità di I specie per le derivate $G_x(\cdot, \xi)$ e $G_{xx}(\cdot, \xi)$;
- risulta $\mathcal{L}G(\cdot, \xi) = 0$ in $[a, b] - \{\xi\}$ e valgono le condizioni ai limiti

$$\alpha_1 G(a, \xi) + \beta_1 G_x(a, \xi) = 0, \quad \alpha_2 G(b, \xi) + \beta_2 G_x(b, \xi) = 0;$$

- $p(\cdot) G_x(\cdot, \xi)$ ha in $x = \xi$ salto di discontinuità pari a -1 .

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Usando le proprietà di G , è possibile anche verificare a posteriori che, per ogni $f \in C[a, b]$, la funzione y data dalla (21) è di classe $C^2[a, b]$ e risolve il problema (13).

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Usando le proprietà di G , è possibile anche verificare a posteriori che, per ogni $f \in C[a, b]$, la funzione y data dalla (21) è di classe $C^2[a, b]$ e risolve il problema (13).

Osservazione

Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, la funzione $G(\cdot, \xi)$ soddisfa l'equazione

$$\mathcal{L}G(\cdot, \xi) = \delta(\cdot - \xi) \quad (22)$$

nel senso delle distribuzioni.

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Usando le proprietà di G , è possibile anche verificare a posteriori che, per ogni $f \in C[a, b]$, la funzione y data dalla (21) è di classe $C^2[a, b]$ e risolve il problema (13).

Osservazione

Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, la funzione $G(\cdot, \xi)$ soddisfa l'equazione

$$\mathcal{L}G(\cdot, \xi) = \delta(\cdot - \xi) \quad (22)$$

nel senso delle distribuzioni.

Per questo motivo, G si dice *soluzione fondamentale* del problema (13).

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

A complemento della **proposizione**, enunciamo il

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

A complemento della **proposizione**, enunciamo il

Teorema (dell'alternativa)

Si verifica una delle due eventualità:

- 1 *il problema (14) ha solo la soluzione banale e, per ogni $f \in C[a, b]$, il problema (13) ha un'unica soluzione;*

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

A complemento della **proposizione**, enunciamo il

Teorema (dell'alternativa)

Si verifica una delle due eventualità:

- 1 *il problema (14) ha solo la soluzione banale e, per ogni $f \in C[a, b]$, il problema (13) ha un'unica soluzione;*
- 2 *il problema (14) ammette soluzioni non banali e il problema (13) ha soluzione se e solo se f è ortogonale a tutte le soluzioni di (14).*

La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

A complemento della **proposizione**, enunciamo il

Teorema (dell'alternativa)

Si verifica una delle due eventualità:

- 1 *il problema (14) ha solo la soluzione banale e, per ogni $f \in C[a, b]$, il problema (13) ha un'unica soluzione;*
- 2 *il problema (14) ammette soluzioni non banali e il problema (13) ha soluzione se e solo se f è ortogonale a tutte le soluzioni di (14).*

In altri termini, unicità e risolubilità per ogni f o valgono entrambe o falliscono entrambe.

Il problema di Sturm-Liouville

Assegnate le funzioni continue p, q, r sull'intervallo $[a, b]$, con p derivabile e p' continua, consideriamo l'equazione omogenea

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad (23)$$

dove λ è un parametro numerico.

Il problema di Sturm-Liouville

Assegnate le funzioni continue p, q, r sull'intervallo $[a, b]$, con p derivabile e p' continua, consideriamo l'equazione omogenea

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad (23)$$

dove λ è un parametro numerico.

Date $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ e $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$, consideriamo il *problema di Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

consistente nella ricerca di integrali dell'equazione verificanti le condizioni negli estremi.

Il problema di Sturm-Liouville

La funzione identicamente nulla banalmente risolve (24), per ogni valore del parametro λ .

Il problema di Sturm-Liouville

La funzione identicamente nulla banalmente risolve (24), per ogni valore del parametro λ .

Un valore di λ per cui esistono soluzioni non banali si dice *autovalore* del problema; ogni soluzione non banale corrispondente si dice *autofunzione*, o *autosoluzione*, associata all'autovalore λ .

Il problema di Sturm-Liouville

La funzione identicamente nulla banalmente risolve (24), per ogni valore del parametro λ .

Un valore di λ per cui esistono soluzioni non banali si dice *autovalore* del problema; ogni soluzione non banale corrispondente si dice *autofunzione*, o *autosoluzione*, associata all'autovalore λ .

Per l'omogeneità del problema, le autofunzioni relative ad un fissato autovalore, (aggiungendo la soluzione banale) formano uno spazio vettoriale, che si dice *autospazio*.

Il problema di Sturm-Liouville

La funzione identicamente nulla banalmente risolve (24), per ogni valore del parametro λ .

Un valore di λ per cui esistono soluzioni non banali si dice *autovalore* del problema; ogni soluzione non banale corrispondente si dice *autofunzione*, o *autosoluzione*, associata all'autovalore λ .

Per l'omogeneità del problema, le autofunzioni relative ad un fissato autovalore, (aggiungendo la soluzione banale) formano uno spazio vettoriale, che si dice *autospazio*.

Un autovalore si dice *semplice* se il relativo autospazio ha dimensione 1.

Il problema di Sturm-Liouville

Come osservato, le condizioni ai limiti si esprimono mediante la relazione $y \in X$, essendo X definito in (11).

Il problema di Sturm-Liouville

Come osservato, le condizioni ai limiti si esprimono mediante la relazione $y \in X$, essendo X definito in (11).

Il problema (24) si riscrive

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = \lambda r(x)y \\ y \in X \end{cases} \quad (25)$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio

Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio

Consideriamo il problema di Sturm–Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione banale.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio

Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione banale.

Infatti, l'equazione diviene $y'' = 0$,

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio

Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione banale.

Infatti, l'equazione diviene $y'' = 0$, quindi

$$y(x) = c_0 + c_1 x,$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio

Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione banale.

Infatti, l'equazione diviene $y'' = 0$, quindi

$$y(x) = c_0 + c_1 x,$$

con c_0 e c_1 costanti.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio

Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione banale.

Infatti, l'equazione diviene $y'' = 0$, quindi

$$y(x) = c_0 + c_1 x,$$

con c_0 e c_1 costanti.

Imponendo le condizioni ai limiti, troviamo $y \equiv 0$.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Anche per $\lambda < 0$ c'è solo la soluzione banale.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Anche per $\lambda < 0$ c'è solo la soluzione banale.

In effetti, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Anche per $\lambda < 0$ c'è solo la soluzione banale.

In effetti, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

con c_1 e c_2 arbitrarie.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Anche per $\lambda < 0$ c'è solo la soluzione banale.

In effetti, l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

con c_1 e c_2 arbitrarie.

Imponendo le condizioni ai limiti, perveniamo al sistema

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

nelle incognite c_1 e c_2 .

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Essendo il determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0,$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Essendo il determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0,$$

deve essere $c_1 = c_2 = 0$, cioè come detto $y \equiv 0$.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Consideriamo il caso $\lambda > 0$.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Consideriamo il caso $\lambda > 0$.

L'integrale generale dell'equazione si scrive

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

con c_1 e c_2 arbitrarie.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Consideriamo il caso $\lambda > 0$.

L'integrale generale dell'equazione si scrive

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

con c_1 e c_2 arbitrarie.

Esaminiamo le condizioni ai limiti.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Consideriamo il caso $\lambda > 0$.

L'integrale generale dell'equazione si scrive

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

con c_1 e c_2 arbitrarie.

Esaminiamo le condizioni ai limiti.

Chiaramente $y(0) = c_1 = 0$.

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Inoltre

$$y(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Inoltre

$$y(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

e poiché stiamo cercando di soddisfare tale condizione con $c_2 \neq 0$, dobbiamo avere

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0,$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Inoltre

$$y(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

e poiché stiamo cercando di soddisfare tale condizione con $c_2 \neq 0$, dobbiamo avere

$$\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0,$$

vale a dire

$$\sqrt{\lambda} \pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Pertanto il problema ammette soluzioni non banali in corrispondenza dei valori

$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il problema di Sturm-Liouville

Esempio (continuazione)

Pertanto il problema ammette soluzioni non banali in corrispondenza dei valori

$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Questi sono dunque gli autovalori del problema e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, le autofunzioni associate a λ_n sono

$$y(x) = c \sin nx,$$

al variare di $c \neq 0$.

Il problema di Sturm-Liouville

Nell'esempio il problema ammette una successione di autovalori: questo, come vedremo, accade in generale.

Il problema di Sturm-Liouville

Nell'esempio il problema ammette una successione di autovalori: questo, come vedremo, accade in generale.

Un'altra proprietà che vale in generale è l'ortogonalità di autosoluzioni corrispondenti ad autovalori distinti.

Il problema di Sturm-Liouville

Nell'esempio il problema ammette una successione di autovalori: questo, come vedremo, accade in generale.

Un'altra proprietà che vale in generale è l'ortogonalità di autosoluzioni corrispondenti ad autovalori distinti.

In effetti, le autosoluzioni $\sin nx$ sono a due a due ortogonali: se $n \neq m$, risulta

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin nx \sin mx \, dx = 0.$$

Il problema di Sturm-Liouville

Precisamente, vale il seguente risultato.

Il problema di Sturm-Liouville

Precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione

Supponiamo p , p' , q , r funzioni reali continue in $[a, b]$.

Il problema di Sturm-Liouville

Precisamente, vale il seguente risultato.

Proposizione

Supponiamo p, p', q, r funzioni reali continue in $[a, b]$.

Se y_m e y_n sono autofunzioni del problema (24) associate agli autovalori λ_m e λ_n distinti, esse sono ortogonali rispetto al peso r , cioè risulta

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx = 0. \quad (27)$$

Il problema di Sturm-Liouville

L'ortogonalità segue subito dalla proprietà di \mathcal{L} di essere autoaggiunto, espressa dalla (12).

Il problema di Sturm-Liouville

L'ortogonalità segue subito dalla proprietà di \mathcal{L} di essere autoaggiunto, espressa dalla (12).

Invero, risultando $y_m, y_n \in X$, abbiamo

$$\lambda_m (r y_m, y_n) = (\mathcal{L}y_m, y_n) = (y_m, \mathcal{L}y_n) = \lambda_n (y_m, r y_n)$$

e quindi la tesi, essendo $\lambda_m \neq \lambda_n$.

Il problema di Sturm-Liouville

L'ortogonalità segue subito dalla proprietà di \mathcal{L} di essere autoaggiunto, espressa dalla (12).

Invero, risultando $y_m, y_n \in X$, abbiamo

$$\lambda_m (r y_m, y_n) = (\mathcal{L} y_m, y_n) = (y_m, \mathcal{L} y_n) = \lambda_n (y_m, r y_n)$$

e quindi la tesi, essendo $\lambda_m \neq \lambda_n$.

Ricordiamo che

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

è il prodotto scalare in $L^2(a, b)$ reale.

Il problema di Sturm-Liouville

Ci occupiamo adesso dell'esistenza di autovalori.

Il problema di Sturm-Liouville

Ci occupiamo adesso dell'esistenza di autovalori.

Consideriamo il particolare problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(py')' + qy = \lambda r y \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

che si chiama *problema di Picard*.

Il problema di Sturm-Liouville

Teorema

Se $p > 0$, $r > 0$ e $q \geq 0$, il problema (28) ammette una successione di autovalori, che sono positivi e semplici; possono essere ordinati in una successione crescente

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

e risulta $\lim_n \lambda_n = +\infty$.

Il problema di Sturm-Liouville

Teorema

Se $p > 0$, $r > 0$ e $q \geq 0$, il problema (28) ammette una successione di autovalori, che sono positivi e semplici; possono essere ordinati in una successione crescente

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

e risulta $\lim_n \lambda_n = +\infty$.

Le relative autofunzioni y_n , $n \in \mathbb{N}$, formano un sistema ortonormale completo, cioè il sottospazio generato è denso.

Il problema di Sturm-Liouville

Teorema

Se $p > 0$, $r > 0$ e $q \geq 0$, il problema (28) ammette una successione di autovalori, che sono positivi e semplici; possono essere ordinati in una successione crescente

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

e risulta $\lim_n \lambda_n = +\infty$.

Le relative autofunzioni y_n , $n \in \mathbb{N}$, formano un sistema ortonormale completo, cioè il sottospazio generato è denso.

Inoltre, per ogni $n > 1$, la autofunzione y_n ha esattamente $n - 1$ zeri in $]a, b[$.

Il problema di Sturm-Liouville

L'ortogonalità è intesa rispetto al peso r , cfr. (27).

Il problema di Sturm-Liouville

L'ortogonalità è intesa rispetto al peso r , cfr. (27).

Ci limitiamo a verificare alcune delle affermazioni contenute nell'enunciato.

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono positivi.

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono positivi.

Se λ è un autovalore e y una autofunzione associata, moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione per y , troviamo $(\mathcal{L}y, y) = \lambda (ry, y)$.

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono positivi.

Se λ è un autovalore e y una autofunzione associata, moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione per y , troviamo $(\mathcal{L}y, y) = \lambda (ry, y)$. Inoltre

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}y, y) &= \int_a^b [-(py')' + qy]y \, dx = -[py'y]_a^b + \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx \\ &= \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx > 0\end{aligned}$$

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono positivi.

Se λ è un autovalore e y una autofunzione associata, moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione per y , troviamo $(\mathcal{L}y, y) = \lambda (ry, y)$. Inoltre

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}y, y) &= \int_a^b [-(py')' + qy]y \, dx = -[py'y]_a^b + \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx \\ &= \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx > 0\end{aligned}$$

e

$$(ry, y) = \int_a^b r|y|^2 \, dx > 0,$$

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono positivi.

Se λ è un autovalore e y una autofunzione associata, moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione per y , troviamo $(\mathcal{L}y, y) = \lambda (ry, y)$. Inoltre

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}y, y) &= \int_a^b [-(py')' + qy]y \, dx = -[py'y]_a^b + \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx \\ &= \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx > 0\end{aligned}$$

e

$$(ry, y) = \int_a^b r|y|^2 \, dx > 0,$$

dunque $\lambda > 0$.

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono semplici.

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono semplici.

Siano y_1 e y_2 autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ .

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono semplici.

Siano y_1 e y_2 autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ .

Dunque essi sono soluzioni di una medesima equazione omogenea

$$\mathcal{L}y = \lambda r(x) y .$$

Il problema di Sturm-Liouville

- Gli autovalori sono semplici.

Siano y_1 e y_2 autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ .

Dunque essi sono soluzioni di una medesima equazione omogenea

$$\mathcal{L}y = \lambda r(x) y.$$

Il wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

si annulla in a e in b , quindi, come è noto, è identicamente nullo, $W \equiv 0$, e i due integrali sono linearmente dipendenti.