

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli “Federico II”



Anno Accademico 2022/2023

Equazioni differenziali alle derivate parziali

- Introduzione
- Equazioni di Laplace e Poisson
- Funzioni armoniche
- Risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un cerchio
- L'equazione del calore
- L'equazione delle onde

Introduzione

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è un'equazione del tipo

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = 0, \quad (1)$$

Introduzione

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è un'equazione del tipo

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = 0, \quad (1)$$

che esprime un legame tra la funzione di più variabili u , le variabili indipendenti x_1, \dots, x_n , ed alcune derivate di u .

Introduzione

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è un'equazione del tipo

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = 0, \quad (1)$$

che esprime un legame tra la funzione di più variabili u , le variabili indipendenti x_1, \dots, x_n , ed alcune derivate di u .

L'ordine massimo m di derivazione si chiama *ordine dell'equazione*.

Introduzione

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è un'equazione del tipo

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = 0, \quad (1)$$

che esprime un legame tra la funzione di più variabili u , le variabili indipendenti x_1, \dots, x_n , ed alcune derivate di u .

L'ordine massimo m di derivazione si chiama *ordine dell'equazione*.

Una *soluzione classica* dell'equazione è una funzione u di classe C^m in un aperto di \mathbb{R}^n verificante l'equazione in ogni punto.

Introduzione

L'equazione si dice *lineare* se F dipende linearmente da u e da tutte le sue derivate.

Introduzione

L'equazione si dice *lineare* se F dipende linearmente da u e da tutte le sue derivate.

Un'equazione lineare del secondo ordine in due variabili si scrive

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c u = f, \quad (2)$$

con i coefficienti a_{ij} , b_i , c e il termine noto f funzioni di x e y .

Introduzione

L'equazione si dice *lineare* se F dipende linearmente da u e da tutte le sue derivate.

Un'equazione lineare del secondo ordine in due variabili si scrive

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c u = f, \quad (2)$$

con i coefficienti a_{ij} , b_i , c e il termine noto f funzioni di x e y .

Le più importanti equazioni a derivate parziali della fisica matematica sono di questo tipo.

Esempio

Le equazioni di Laplace e di Poisson sono

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f, \quad (3)$$

dove

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

è l'operatore *Laplaciano*, spesso indicato anche con ∇^2 .

Esempio

L'equazione delle onde (in due variabili) è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Esempio

L'equazione del calore (in una variabile spaziale) è

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Introduzione

Nelle applicazioni, una questione fondamentale consiste nel ricercare una soluzione di un'equazione differenziale in un dominio D , soddisfacente ulteriori condizioni sulla frontiera di D .

Introduzione

Nelle applicazioni, una questione fondamentale consiste nel ricercare una soluzione di un'equazione differenziale in un dominio D , soddisfacente ulteriori condizioni sulla frontiera di D .

Tale questione si chiama *problema al contorno* per un'equazione alle derivate parziali ed è di essa che ci occuperemo prevalentemente, per l'equazione (2).

Introduzione

Nelle applicazioni, una questione fondamentale consiste nel ricercare una soluzione di un'equazione differenziale in un dominio D , soddisfacente ulteriori condizioni sulla frontiera di D .

Tale questione si chiama *problema al contorno* per un'equazione alle derivate parziali ed è di essa che ci occuperemo prevalentemente, per l'equazione (2).

Il tipo di condizioni aggiuntive dipende dal segno del determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Su di esso si basa la *classificazione* delle equazioni differenziali del tipo (2).

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

$A = 0$ in D : l'equazione si dice *parabolica*;

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

$A = 0$ in D : l'equazione si dice *parabolica*;

L'equazione si dice di tipo misto se in D si verificano almeno due delle condizioni precedenti.

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

$A = 0$ in D : l'equazione si dice *parabolica*;

L'equazione si dice di tipo misto se in D si verificano almeno due delle condizioni precedenti.

L'equazione di Laplace è ellittica;

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

$A = 0$ in D : l'equazione si dice *parabolica*;

L'equazione si dice di tipo misto se in D si verificano almeno due delle condizioni precedenti.

L'equazione di Laplace è ellittica;

l'equazione delle onde è iperbolica;

Introduzione

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

$A = 0$ in D : l'equazione si dice *parabolica*;

L'equazione si dice di tipo misto se in D si verificano almeno due delle condizioni precedenti.

L'equazione di Laplace è ellittica;

l'equazione delle onde è iperbolica;

l'equazione del calore è parabolica.

Equazioni di Laplace e Poisson

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ; le soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

si dicono *funzioni armoniche* in Ω .

Equazioni di Laplace e Poisson

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ; le soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

si dicono *funzioni armoniche* in Ω .

Più generale è l'equazione di Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

essendo f continua in Ω .

Equazioni di Laplace e Poisson

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ; le soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

si dicono *funzioni armoniche* in Ω .

Più generale è l'equazione di Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

essendo f continua in Ω .

Per tale equazione consideriamo due problemi al contorno. Sia D un dominio regolare (connesso).

Equazioni di Laplace e Poisson

Esempio (Problema di Dirichlet)

Cerchiamo $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \mathring{D} \\ u = g & \text{su } FD \end{cases} \quad (7)$$

dove f continua in \mathring{D} e g continua su FD sono funzioni assegnate.

Equazioni di Laplace e Poisson

Esempio (Problema di Neumann)

Cerchiamo $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^1(D)$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \mathring{D} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{su } FD \end{cases} \quad (8)$$

dove f continua in \mathring{D} e g continua su FD sono funzioni assegnate. ν è il versore normale a FD orientato verso l'esterno e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ è la derivata normale.

Funzioni armoniche

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n .

Funzioni armoniche

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n .

Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ si dice armonica in Ω se il suo laplaciano è identicamente nullo nell'aperto

$$\Delta u \equiv 0.$$

Funzioni armoniche

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n .

Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ si dice armonica in Ω se il suo laplaciano è identicamente nullo nell'aperto

$$\Delta u \equiv 0.$$

Come è noto, sono funzioni armoniche in due variabili parte reale e coefficiente dell'immaginario delle funzioni olomorfe.

Funzioni armoniche

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche.

Funzioni armoniche

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche.

Teorema (Indefinita derivabilità)

Ogni funzione armonica in Ω è di classe $C^\infty(\Omega)$.

Funzioni armoniche

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche.

Teorema (Indefinita derivabilità)

Ogni funzione armonica in Ω è di classe $C^\infty(\Omega)$.

Teorema (Proprietà di media)

Sia u armonica in Ω . Per ogni sfera chiusa $B = B(P_0, r)$ contenuta in Ω , risulta

$$u(P_0) = \frac{1}{\text{mis } FB} \int_{FB} u(P) d\sigma. \quad (9)$$

Funzioni armoniche

Ad esempio, in due variabili B è il cerchio di raggio r e centro $P_0 = (x_0, y_0)$, $\gamma = FD$ è la circonferenza che lo delimita, di lunghezza $2\pi r$.

Funzioni armoniche

Ad esempio, in due variabili B è il cerchio di raggio r e centro $P_0 = (x_0, y_0)$, $\gamma = FD$ è la circonferenza che lo delimita, di lunghezza $2\pi r$.

L'uguaglianza (9) diventa

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} u(x, y) ds. \quad (10)$$

Osservazione

(a) La proprietà di media sulle superfici sferiche espressa dalla (9) è equivalente alla versione sulle sfere piene

$$u(P_0) = \frac{1}{\text{mis } B} \int_B u(P) dP. \quad (11)$$

In effetti, la (11) segue dalla (9) integrando in coordinate sferiche; la (11) implica la (9) derivando rispetto al raggio r di B .

Osservazione

(a) La proprietà di media sulle superfici sferiche espressa dalla (9) è equivalente alla versione sulle sfere piene

$$u(P_0) = \frac{1}{\text{mis } B} \int_B u(P) dP. \quad (11)$$

In effetti, la (11) segue dalla (9) integrando in coordinate sferiche; la (11) implica la (9) derivando rispetto al raggio r di B .

(b) La proprietà di media caratterizza le funzioni armoniche, nel senso che, se $u \in C^0(\Omega)$ verifica la (9) per ogni sfera chiusa $B \subset \Omega$, essa è armonica in Ω , cioè $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \equiv 0$.

Teorema (Principio del massimo)

(a) Ogni funzione non costante armonica in un aperto connesso è priva di estremi relativi.

Teorema (Principio del massimo)

(a) *Ogni funzione non costante armonica in un aperto connesso è priva di estremi relativi.*

(b) *Sia D un dominio limitato; una funzione $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ armonica in \mathring{D} assume massimo e minimo sulla frontiera:*

$$\min_{FD} u \leq u(P) \leq \max_{FD} u, \quad \forall P \in D.$$

Funzioni armoniche

Dimostreremo queste proprietà in dimensione 2, ricavandole da noti risultati per le funzioni olomorfe.

Funzioni armoniche

Dimostreremo queste proprietà in dimensione 2, ricavandole da noti risultati per le funzioni olomorfe.

Per fare questo, cerchiamo di capire se, assegnata una funzione u armonica in un aperto Ω di \mathbb{R}^2 , esista una funzione f olomorfa in Ω di cui essa è la parte reale.

Funzioni armoniche

Dimostreremo queste proprietà in dimensione 2, ricavandole da noti risultati per le funzioni olomorfe.

Per fare questo, cerchiamo di capire se, assegnata una funzione u armonica in un aperto Ω di \mathbb{R}^2 , esista una funzione f olomorfa in Ω di cui essa è la parte reale.

Cioè esista v definita in Ω tale che $f = u + jv$ sia olomorfa nell'aperto.

Funzioni armoniche

Una v con tale proprietà sarà anch'essa armonica e si dirà *armonica coniugata* a u .

Funzioni armoniche

Una v con tale proprietà sarà anch'essa armonica e si dirà *armonica coniugata* a u .

Il legame tra u e v è costituito dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (12)$$

Funzioni armoniche

Una v con tale proprietà sarà anch'essa armonica e si dirà *armonica coniugata* a u .

Il legame tra u e v è costituito dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (12)$$

quindi v ha le derivate parziali assegnate.

Funzioni armoniche

Una v con tale proprietà sarà anch'essa armonica e si dirà *armonica coniugata* a u .

Il legame tra u e v è costituito dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (12)$$

quindi v ha le derivate parziali assegnate.

È chiaro dunque che v deve essere una primitiva della forma differenziale

$$-u_y dx + u_x dy . \quad (13)$$

Funzioni armoniche

Ricordiamo che una forma differenziale

$$X dx + Y dy$$

in Ω si dice *esatta* se esiste una funzione v della quale essa è il differenziale, quindi risulta

$$X = v_x \quad \text{e} \quad Y = v_y$$

Funzioni armoniche

Ricordiamo che una forma differenziale

$$X dx + Y dy$$

in Ω si dice *esatta* se esiste una funzione v della quale essa è il differenziale, quindi risulta

$$X = v_x \quad \text{e} \quad Y = v_y$$

Se i coefficienti X e Y sono di classe C^1 , la forma si dice *chiusa* se

$$X_y = Y_x$$

Funzioni armoniche

Ricordiamo che una forma differenziale

$$X dx + Y dy$$

in Ω si dice *esatta* se esiste una funzione v della quale essa è il differenziale, quindi risulta

$$X = v_x \quad \text{e} \quad Y = v_y$$

Se i coefficienti X e Y sono di classe C^1 , la forma si dice *chiusa* se

$$X_y = Y_x$$

Com'è noto, che la forma sia chiusa è condizione necessaria perché essa sia esatta, essendo in tal caso X_y e Y_x le derivate miste di ogni primitiva.

Funzioni armoniche

La condizione è anche sufficiente se l'aperto Ω è semplicemente connesso.

Funzioni armoniche

La condizione è anche sufficiente se l'aperto Ω è semplicemente connesso.

La condizione di chiusura della forma (13) si scrive

$$-u_{yy} = u_{xx}$$

Funzioni armoniche

La condizione è anche sufficiente se l'aperto Ω è semplicemente connesso.

La condizione di chiusura della forma (13) si scrive

$$-u_{yy} = u_{xx}$$

e quindi equivale alla armonicità di u .

Funzioni armoniche

La condizione è anche sufficiente se l'aperto Ω è semplicemente connesso.

La condizione di chiusura della forma (13) si scrive

$$-u_{yy} = u_{xx}$$

e quindi equivale alla armonicità di u . Dunque

Proposizione

In un aperto semplicemente connesso, ogni funzione armonica è dotata di armonica coniugata, cioè è la parte reale di una funzione olomorfa.

Funzioni armoniche

La proposizione consentirà di dedurre le menzionate proprietà per le funzioni armoniche a partire da quelle delle funzioni olomorfe.

Funzioni armoniche

La proposizione consentirà di dedurre le menzionate proprietà per le funzioni armoniche a partire da quelle delle funzioni olomorfe.

Un esempio è quello della indefinita derivabilità:

Funzioni armoniche

La proposizione consentirà di dedurre le menzionate proprietà per le funzioni armoniche a partire da quelle delle funzioni olomorfe.

Un esempio è quello della indefinita derivabilità:

per definizione, una funzione armonica è di classe C^2 , ma essendo la parte reale di una funzione olomorfa, essa risulta di classe C^∞ .

Funzioni armoniche

Nel caso in cui Ω non sia semplicemente connesso, in generale non possiamo vedere una funzione armonica come parte reale di una funzione olomorfa.

Funzioni armoniche

Nel caso in cui Ω non sia semplicemente connesso, in generale non possiamo vedere una funzione armonica come parte reale di una funzione olomorfa.

Possiamo però fare questo *localmente*, cioè in un intorno del generico punto di Ω .

Funzioni armoniche

Nel caso in cui Ω non sia semplicemente connesso, in generale non possiamo vedere una funzione armonica come parte reale di una funzione olomorfa.

Possiamo però fare questo *localmente*, cioè in un intorno del generico punto di Ω .

Questo consente ugualmente di ottenere la regolarità C^∞ :

Funzioni armoniche

Nel caso in cui Ω non sia semplicemente connesso, in generale non possiamo vedere una funzione armonica come parte reale di una funzione olomorfa.

Possiamo però fare questo *localmente*, cioè in un intorno del generico punto di Ω .

Questo consente ugualmente di ottenere la regolarità C^∞ :

per verificarla, basta ragionare sui cerchi (che evidentemente sono semplicemente connessi) contenuti in Ω .

Funzioni armoniche

Ricordiamo la proprietà di media per le funzioni olomorfe.

Funzioni armoniche

Ricordiamo la proprietà di media per le funzioni olomorfe.

Sia f olomorfa in Ω ; per ogni cerchio chiuso $B(z_0, r) \subset \Omega$, detta $\gamma(r)$ la frontiera, risulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma(r)} f(z) ds.$$

Funzioni armoniche

Ricordiamo la proprietà di media per le funzioni olomorfe.

Sia f olomorfa in Ω ; per ogni cerchio chiuso $B(z_0, r) \subset \Omega$, detta $\gamma(r)$ la frontiera, risulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma(r)} f(z) ds.$$

Scrivendo $f = u + jv$ in forma algebrica, abbiamo

$$u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma(r)} [u(x, y) + jv(x, y)] ds$$

e la (10) si ottiene separando reale dall'immaginario.

Funzioni armoniche

Il principio del massimo segue dalla proprietà di media.

Funzioni armoniche

Il principio del massimo segue dalla proprietà di media.

Ci limitiamo per semplicità ai punti di estremo assoluto.

Funzioni armoniche

Il principio del massimo segue dalla proprietà di media.

Ci limitiamo per semplicità ai punti di estremo assoluto.

Supponiamo P_0 punto di massimo assoluto di u in Ω e mostriamo che la funzione è costante.

Funzioni armoniche

Il principio del massimo segue dalla proprietà di media.

Ci limitiamo per semplicità ai punti di estremo assoluto.

Supponiamo P_0 punto di massimo assoluto di u in Ω e mostriamo che la funzione è costante.

Cominciamo mostrando che u è costante su un qualsiasi cerchio chiuso $B = B(P_0, r)$ contenuto in Ω .

Funzioni armoniche

Per la proprietà di media (11), abbiamo

$$u(P_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(P) dP$$

Funzioni armoniche

Per la proprietà di media (11), abbiamo

$$u(P_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(P) dP$$

e quindi

$$\int_B [u(P_0) - u(P)] dP = 0.$$

Funzioni armoniche

Per la proprietà di media (11), abbiamo

$$u(P_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(P) dP$$

e quindi

$$\int_B [u(P_0) - u(P)] dP = 0.$$

L'integrando è non-negativo, quindi esso è identicamente nullo, cioè $u \equiv u(P_0)$ su B .

Funzioni armoniche

Il ragionamento precedente mostra che l'insieme

$$E = \{ P \in \Omega : u(P) = \max u \}$$

è aperto.

Funzioni armoniche

Il ragionamento precedente mostra che l'insieme

$$E = \{ P \in \Omega : u(P) = \max u \}$$

è aperto.

Per la continuità di u , è aperto anche il complementare $\Omega - E$.

Funzioni armoniche

Il ragionamento precedente mostra che l'insieme

$$E = \{ P \in \Omega : u(P) = \max u \}$$

è aperto.

Per la continuità di u , è aperto anche il complementare $\Omega - E$.

Essendo Ω connesso e $E \neq \emptyset$ poiché $P_0 \in E$, risulta

$$E = \Omega,$$

cioè u è costante in Ω .

Funzioni armoniche

Il ragionamento precedente mostra che l'insieme

$$E = \{ P \in \Omega : u(P) = \max u \}$$

è aperto.

Per la continuità di u , è aperto anche il complementare $\Omega - E$.

Essendo Ω connesso e $E \neq \emptyset$ poiché $P_0 \in E$, risulta

$$E = \Omega,$$

cioè u è costante in Ω .

Nel caso di un punto di minimo, si ragiona allo stesso modo.

Funzioni armoniche

L'altro enunciato segue poi da questo.

Funzioni armoniche

L'altro enunciato segue poi da questo.

Notiamo che per il teorema di Weierstrass u è dotata di minimo e di massimo in D .

Funzioni armoniche

L'altro enunciato segue poi da questo.

Notiamo che per il teorema di Weierstrass u è dotata di minimo e di massimo in D .

Se uno di essi fosse assunto in un punto interno, u sarebbe costante (almeno se \mathring{D} è connesso) e il risultato sarebbe banale.

Funzioni armoniche

L'altro enunciato segue poi da questo.

Notiamo che per il teorema di Weierstrass u è dotata di minimo e di massimo in D .

Se uno di essi fosse assunto in un punto interno, u sarebbe costante (almeno se \mathring{D} è connesso) e il risultato sarebbe banale.

Si mostra che l'ipotesi di connessione non è necessaria.

Funzioni armoniche

Dal principio del massimo segue subito un risultato di unicità per il problema (7) di Dirichlet relativo all'equazione di Poisson.

Funzioni armoniche

Dal principio del massimo segue subito un risultato di unicità per il problema (7) di Dirichlet relativo all'equazione di Poisson.

Corollario

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson ha al più una soluzione.

Funzioni armoniche

Dal principio del massimo segue subito un risultato di unicità per il problema (7) di Dirichlet relativo all'equazione di Poisson.

Corollario

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson ha al più una soluzione.

Se u_1 e u_2 sono soluzioni, la differenza

$$u = u_1 - u_2$$

verifica $\Delta u = 0$, cioè è armonica, in \mathring{D} e $u \equiv 0$ su FD .

Funzioni armoniche

Dal principio del massimo segue subito un risultato di unicità per il problema (7) di Dirichlet relativo all'equazione di Poisson.

Corollario

Il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson ha al più una soluzione.

Se u_1 e u_2 sono soluzioni, la differenza

$$u = u_1 - u_2$$

verifica $\Delta u = 0$, cioè è armonica, in \mathring{D} e $u \equiv 0$ su FD .

Pertanto $u \equiv 0$ in D , cioè

$$u_1 \equiv u_2$$

Funzioni armoniche

Veniamo al problema di Neumann.

Funzioni armoniche

Veniamo al problema di Neumann.

Ricaviamo alcune identità integrali che vanno sotto il nome di *formule di Green*.

Funzioni armoniche

Veniamo al problema di Neumann.

Ricaviamo alcune identità integrali che vanno sotto il nome di *formule di Green*.

Se $u \in C^2(D)$ e $v \in C^1(D)$, risulta

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u, \quad \operatorname{div}(v \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u.$$

Applichiamo il teorema della divergenza al campo vettoriale $v \nabla u$:

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) dP = \int_{FD} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \quad (14)$$

Applichiamo il teorema della divergenza al campo vettoriale $v \nabla u$:

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) dP = \int_{FD} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \quad (14)$$

Questa è la *prima formula di Green*.

Funzioni armoniche

Invertendo il ruolo di u e v (supposta anch'essa di classe $C^2(D)$),
abbiamo pure

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dP = \int_{FD} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

Funzioni armoniche

Invertendo il ruolo di u e v (supposta anch'essa di classe $C^2(D)$),
abbiamo pure

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dP = \int_{FD} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

e sottraendo

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) dP = \int_{FD} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (15)$$

Funzioni armoniche

Invertendo il ruolo di u e v (supposta anch'essa di classe $C^2(D)$),
abbiamo pure

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dP = \int_{FD} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

e sottraendo

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) dP = \int_{FD} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (15)$$

Questa è la *seconda formula di Green*.

Funzioni armoniche

Consideriamo alcuni casi particolari delle formule precedenti.

Funzioni armoniche

Consideriamo alcuni casi particolari delle formule precedenti.

Poniamo $v \equiv 1$ in (14):

$$\int_D \Delta u \, dP = \int_{FD} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma. \quad (16)$$

Questa uguaglianza implica immediatamente la seguente *condizione di compatibilità per il problema di Neumann*:

Questa uguaglianza implica immediatamente la seguente condizione di compatibilità per il problema di Neumann:

Corollario

Siano $f \in C(D)$ e $g \in C(FD)$. Se il problema (8) ammette soluzione, vale l'uguaglianza

$$\int_D f \, dP = \int_{FD} g \, d\sigma. \quad (17)$$

Funzioni armoniche

Prendiamo ora $v = u$ armonica in (14):

$$\int_D |\nabla u|^2 dP = \int_{FD} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \quad (18)$$

Funzioni armoniche

Prendiamo ora $v = u$ armonica in (14):

$$\int_D |\nabla u|^2 dP = \int_{FD} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \quad (18)$$

Se inoltre $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su FD , risulta

$$\int_D |\nabla u|^2 dP = 0$$

Funzioni armoniche

Prendiamo ora $v = u$ armonica in (14):

$$\int_D |\nabla u|^2 dP = \int_{FD} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \quad (18)$$

Se inoltre $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su FD , risulta

$$\int_D |\nabla u|^2 dP = 0$$

e quindi

$$\nabla u \equiv 0$$

in D .

Funzioni armoniche

È chiaro che, se u è soluzione del problema di Neumann (8), lo è pure $u + c$ per ogni costante c , essendo le condizioni del problema imposte sulle derivate, dunque non c'è unicità di soluzione.

È chiaro che, se u è soluzione del problema di Neumann (8), lo è pure $u + c$ per ogni costante c , essendo le condizioni del problema imposte sulle derivate, dunque non c'è unicità di soluzione.

Le considerazioni precedenti forniscono subito un risultato di *unicità a meno di una costante*.

Funzioni armoniche

Corollario

Due soluzioni del problema di Neumann (8) differiscono per una costante.

Funzioni armoniche

Corollario

Due soluzioni del problema di Neumann (8) differiscono per una costante.

Ricordiamo che D è connesso.

Corollario

Due soluzioni del problema di Neumann (8) differiscono per una costante.

Ricordiamo che D è connesso.

Se u_1 e u_2 risolvono entrambe il problema (8), la differenza

$$u = u_1 - u_2$$

è armonica in \mathring{D} e soddisfa $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su FD .

Funzioni armoniche

Corollario

Due soluzioni del problema di Neumann (8) differiscono per una costante.

Ricordiamo che D è connesso.

Se u_1 e u_2 risolvono entrambe il problema (8), la differenza

$$u = u_1 - u_2$$

è armonica in \mathring{D} e soddisfa $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su FD .

Pertanto

$$\nabla u \equiv 0$$

e u è costante.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Sia D il cerchio di centro l'origine O e raggio R :

$$D = \{P : \overline{OP} \leq R\}.$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Sia D il cerchio di centro l'origine O e raggio R :

$$D = \{P : \overline{OP} \leq R\}.$$

Consideriamo il problema di Dirichlet su D relativo all'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathring{D} \\ u = g & \text{su } \gamma(R) = FD \end{cases} \quad (19)$$

dove g continua su $\gamma(R) = FD$ è una funzione assegnata.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Costruiremo la soluzione mediante il *metodo di separazione delle variabili*.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Costruiremo la soluzione mediante il *metodo di separazione delle variabili*.

Adoperiamo le coordinate polari

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Costruiremo la soluzione mediante il *metodo di separazione delle variabili*.

Adoperiamo le coordinate polari

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta$$

e definiamo

$$U(\rho, \vartheta) = u(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta).$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Costruiremo la soluzione mediante il *metodo di separazione delle variabili*.

Adoperiamo le coordinate polari

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta$$

e definiamo

$$U(\rho, \vartheta) = u(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta).$$

Con abuso di notazioni, confonderemo u e U , cioè considereremo u funzione di ρ e ϑ .

Problema di Dirichlet in un cerchio

Il laplaciano si esprime in termini delle derivate rispetto a ρ e ϑ :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta} + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} \quad (20)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Il laplaciano si esprime in termini delle derivate rispetto a ρ e ϑ :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta} + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} \quad (20)$$

L'equazione di Laplace si riscrive dunque come segue

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \rho < R, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (21)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(\rho, \vartheta) = v(\rho) w(\vartheta). \quad (22)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(\rho, \vartheta) = v(\rho) w(\vartheta). \quad (22)$$

Una soluzione di questo tipo sarà detta *soluzione elementare*.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(\rho, \vartheta) = v(\rho) w(\vartheta). \quad (22)$$

Una soluzione di questo tipo sarà detta *soluzione elementare*.

L'equazione diviene

$$v''(\rho) w(\vartheta) + \frac{1}{\rho} v'(\rho) w(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2} v(\rho) w''(\vartheta) = 0,$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(\rho, \vartheta) = v(\rho) w(\vartheta). \quad (22)$$

Una soluzione di questo tipo sarà detta *soluzione elementare*.

L'equazione diviene

$$v''(\rho) w(\vartheta) + \frac{1}{\rho} v'(\rho) w(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2} v(\rho) w''(\vartheta) = 0,$$

ovvero

$$\frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = -\frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)}. \quad (23)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

In questa uguaglianza, il primo membro dipende esclusivamente da ρ , il secondo membro dipende da ϑ .

Problema di Dirichlet in un cerchio

In questa uguaglianza, il primo membro dipende esclusivamente da ρ , il secondo membro dipende da ϑ .

L'uguaglianza è possibile solo se i due membri sono uguali ad una stessa costante, che indichiamo con λ .

Problema di Dirichlet in un cerchio

In questa uguaglianza, il primo membro dipende esclusivamente da ρ , il secondo membro dipende da ϑ .

L'uguaglianza è possibile solo se i due membri sono uguali ad una stessa costante, che indichiamo con λ .

Pertanto

$$\begin{cases} -\frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)} = \lambda \\ \frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = \lambda \end{cases} \quad (24)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

La prima equazione si riscrive

$$w'' + \lambda w = 0$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

La prima equazione si riscrive

$$w'' + \lambda w = 0$$

Cerchiamo soluzioni non identicamente nulle che abbiano un prolungamento periodico di periodo 2π .

Problema di Dirichlet in un cerchio

La prima equazione si riscrive

$$w'' + \lambda w = 0$$

Cerchiamo soluzioni non identicamente nulle che abbiano un prolungamento periodico di periodo 2π .

Per $\lambda < 0$ non ce ne sono.

Problema di Dirichlet in un cerchio

La prima equazione si riscrive

$$w'' + \lambda w = 0$$

Cerchiamo soluzioni non identicamente nulle che abbiano un prolungamento periodico di periodo 2π .

Per $\lambda < 0$ non ce ne sono.

Per $\lambda = 0$, le soluzioni ammissibili sono le costanti.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Per $\lambda > 0$, l'integrale generale è

$$w = a \cos \sqrt{\lambda} \vartheta + b \sin \sqrt{\lambda} \vartheta$$

ed è periodico di periodo 2π se e solo se $\sqrt{\lambda}$ è intero.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Per $\lambda > 0$, l'integrale generale è

$$w = a \cos \sqrt{\lambda} \vartheta + b \sin \sqrt{\lambda} \vartheta$$

ed è periodico di periodo 2π se e solo se $\sqrt{\lambda}$ è intero.

Dunque $\lambda = n^2$, con $n \in \mathbb{N}_0$.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Per $\lambda > 0$, l'integrale generale è

$$w = a \cos \sqrt{\lambda} \vartheta + b \sin \sqrt{\lambda} \vartheta$$

ed è periodico di periodo 2π se e solo se $\sqrt{\lambda}$ è intero.

Dunque $\lambda = n^2$, con $n \in \mathbb{N}_0$.

In corrispondenza di tali valori di λ , troviamo le soluzioni

$$w = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta.$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Consideriamo ora la seconda equazione in (24) per i valori di $\lambda = n^2$ trovati:

$$\rho^2 v'' + \rho v' - n^2 v = 0. \quad (25)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Consideriamo ora la seconda equazione in (24) per i valori di $\lambda = n^2$ trovati:

$$\rho^2 v'' + \rho v' - n^2 v = 0. \quad (25)$$

Per $n = 0$, l'integrale generale è

$$v = a + b \log \rho.$$

Per $n > 0$, l'integrale generale è

$$v = a \rho^n + b \rho^{-n}.$$

Dunque, v è continua in 0 se e solo se $b = 0$.

Problema di Dirichlet in un cerchio

In definitiva, troviamo le soluzioni elementari

$$u_n(\rho, \vartheta) = \rho^n (a_n \cos m\vartheta + b_n \sin m\vartheta). \quad (26)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

In definitiva, troviamo le soluzioni elementari

$$u_n(\rho, \vartheta) = \rho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta). \quad (26)$$

Notiamo che

$$\rho^n \cos n\vartheta = \operatorname{Re} z^n = \operatorname{Re}(x+jy)^n, \quad \rho^n \sin n\vartheta = \operatorname{Im} z^n = \operatorname{Im}(x+jy)^n.$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Dobbiamo soddisfare la condizione al contorno, che si riscrive

$$u(R, \vartheta) = g(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo g dipendente da ϑ .)

Problema di Dirichlet in un cerchio

Dobbiamo soddisfare la condizione al contorno, che si riscrive

$$u(R, \vartheta) = g(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo g dipendente da ϑ .)

La condizione al contorno è verificata da una soluzione elementare solo per dati g particolari.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Dobbiamo soddisfare la condizione al contorno, che si riscrive

$$u(R, \vartheta) = g(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo g dipendente da ϑ .)

La condizione al contorno è verificata da una soluzione elementare solo per dati g particolari.

Per g continua generica, possiamo pensare di soddisfarla con una somma finita o una serie di soluzioni elementari

$$u(\rho, \vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta). \quad (27)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Se la serie converge in maniera opportuna, si può dimostrare che la somma è armonica per $\rho < R$ e continua per $\rho \leq R$.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Se la serie converge in maniera opportuna, si può dimostrare che la somma è armonica per $\rho < R$ e continua per $\rho \leq R$.

La condizione al contorno diventa

$$g(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

Se la serie converge in maniera opportuna, si può dimostrare che la somma è armonica per $\rho < R$ e continua per $\rho \leq R$.

La condizione al contorno diventa

$$g(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Tale uguaglianza è possibile se e solo se a secondo membro compare la serie di Fourier di g , cioè

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt,$$

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos nt dt, \quad R^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin nt dt, \quad (28)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Sotto l'ipotesi che g sia continua, è possibile giustificare il procedimento esposto e mostrare che esso fornisce la soluzione (unica) del problema.

Problema di Dirichlet in un cerchio

Sotto l'ipotesi che g sia continua, è possibile giustificare il procedimento esposto e mostrare che esso fornisce la soluzione (unica) del problema.

Inseriamo nella (27) i coefficienti dati dalle (28).

Problema di Dirichlet in un cerchio

Sotto l'ipotesi che g sia continua, è possibile giustificare il procedimento esposto e mostrare che esso fornisce la soluzione (unica) del problema.

Inseriamo nella (27) i coefficienti dati dalle (28).

Essendo

$$\cos nt \cos n\vartheta + \sin nt \sin n\vartheta = \cos n(\vartheta - t),$$

troviamo

$$u(\rho, \vartheta) = a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} g(t) \cos n(\vartheta - t) dt.$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

È possibile invertire sommatoria e integrale e scrivere

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2} dt \quad (29)$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

È possibile invertire sommatoria e integrale e scrivere

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2} dt \quad (29)$$

L'integrale a secondo membro della (29) si chiama *integrale di Poisson*.

Problema di Dirichlet in un cerchio

È possibile invertire sommatoria e integrale e scrivere

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2} dt \quad (29)$$

L'integrale a secondo membro della (29) si chiama *integrale di Poisson*.

Detti $P \in \mathring{D}$ il punto di coordinate polari (ρ, ϑ) e $Q \in \gamma(R) = FD$ il punto di coordinate polari (R, t) , la (29) si riscrive

$$u(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma(R)} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{PQ^2} g(Q) ds(Q).$$

Problema di Dirichlet in un cerchio

In definitiva, la funzione

$$u(P) = \begin{cases} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{2\pi R} \int_{\gamma} \frac{g(Q)}{PQ^2} ds(Q), & P \in \mathring{D} \\ g(P), & P \in \gamma = FD \end{cases}$$

verifica $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C(D)$ e $\Delta u \equiv 0$ in \mathring{D} , cioè è soluzione del problema.

Problema di Dirichlet in un cerchio

In definitiva, la funzione

$$u(P) = \begin{cases} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{2\pi R} \int_{\gamma} \frac{g(Q)}{PQ^2} ds(Q), & P \in \mathring{D} \\ g(P), & P \in \gamma = FD \end{cases}$$

verifica $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C(D)$ e $\Delta u \equiv 0$ in \mathring{D} , cioè è soluzione del problema.

La funzione

$$K(P, Q) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{PQ^2}, \quad P \in \mathring{D}, Q \in FD,$$

si chiama *nucleo di Poisson*.

L'equazione del calore

L'equazione del calore è

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (30)$$

L'equazione del calore

L'equazione del calore è

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (30)$$

È un'equazione di tipo parabolico, che regge il fenomeno della conduzione del calore attraverso un mezzo isotropo omogeneo, in assenza di sorgente.

L'equazione del calore

L'equazione del calore è

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (30)$$

È un'equazione di tipo parabolico, che regge il fenomeno della conduzione del calore attraverso un mezzo isotropo omogeneo, in assenza di sorgente.

Il punto (x, y, z) varia in un dominio dello spazio \mathbb{R}^3 , mentre $t \geq 0$ è una variabile temporale.

L'equazione del calore

L'equazione del calore è

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (30)$$

È un'equazione di tipo parabolico, che regge il fenomeno della conduzione del calore attraverso un mezzo isotropo omogeneo, in assenza di sorgente.

Il punto (x, y, z) varia in un dominio dello spazio \mathbb{R}^3 , mentre $t \geq 0$ è una variabile temporale.

La funzione incognita $u = u(x, y, z, t)$ rappresenta la temperatura nel punto (x, y, z) all'istante t . $C > 0$ è una costante che dipende dal mezzo.

L'equazione del calore

Noi consideriamo una semplificazione unidimensionale della (30), costituita da un filo sottile disposto lungo l'asse x . Le altre due dimensioni si immaginano trascurabili.

L'equazione del calore

Noi consideriamo una semplificazione unidimensionale della (30), costituita da un filo sottile disposto lungo l'asse x . Le altre due dimensioni si immaginano trascurabili.

Per semplicità, supponiamo inoltre che sia $C = 1$. Il caso generale si tratta analogamente, o si riconduce al caso in esame con un cambiamento di variabili.

L'equazione del calore

Noi consideriamo una semplificazione unidimensionale della (30), costituita da un filo sottile disposto lungo l'asse x . Le altre due dimensioni si immaginano trascurabili.

Per semplicità, supponiamo inoltre che sia $C = 1$. Il caso generale si tratta analogamente, o si riconduce al caso in esame con un cambiamento di variabili.

Dunque l'equazione è

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (31)$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Immaginiamo un filo illimitato, che occupi interamente l'asse x , e descriviamo come evolve la temperatura quando è assegnata in ogni punto all'istante iniziale.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

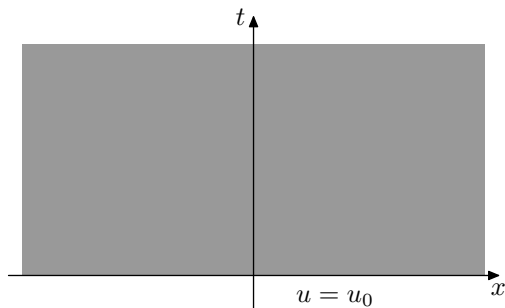
Immaginiamo un filo illimitato, che occupi interamente l'asse x , e descriviamo come evolve la temperatura quando è assegnata in ogni punto all'istante iniziale.

Dunque consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (32)$$

nel semipiano $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano



L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Supponiamo $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$ e $u_{xx}(\cdot, t)$ sommabili su \mathbb{R} , $\forall t \geq 0$.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Supponiamo $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$ e $u_{xx}(\cdot, t)$ sommabili su \mathbb{R} , $\forall t \geq 0$.

Inoltre, per ogni $T > 0$, esista $f = f_T(x)$ sommabile su \mathbb{R} tale che

$$|u_t(x, t)| \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T].$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Supponiamo $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$ e $u_{xx}(\cdot, t)$ sommabili su \mathbb{R} , $\forall t \geq 0$.

Inoltre, per ogni $T > 0$, esista $f = f_T(x)$ sommabile su \mathbb{R} tale che

$$|u_t(x, t)| \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T].$$

Quest'ultima ipotesi permetterà di derivare sotto il segno di integrale la funzione

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx$$

e altre espressioni simili.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Per risolvere il problema (32), usiamo la trasformazione di Fourier rispetto alla variabile x :

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Per risolvere il problema (32), usiamo la trasformazione di Fourier rispetto alla variabile x :

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Applicando la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione $u_t = u_{xx}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}].$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Per risolvere il problema (32), usiamo la trasformazione di Fourier rispetto alla variabile x :

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Applicando la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione $u_t = u_{xx}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}].$$

Indichiamo con $\hat{u} = \hat{u}(\omega, t)$ la trasformata di $u(\cdot, t)$.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Per risolvere il problema (32), usiamo la trasformazione di Fourier rispetto alla variabile x :

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Applicando la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione $u_t = u_{xx}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}].$$

Indichiamo con $\hat{u} = \hat{u}(\omega, t)$ la trasformata di $u(\cdot, t)$.

Notiamo che

$$\mathcal{F}[u_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} u_t(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} u(x, t) dx$$

per l'ipotesi fatta.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Consideriamo la variabile ω come parametro.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Consideriamo la variabile ω come parametro.

Per la seconda formula fondamentale, vediamo che $\hat{u}(\omega, \cdot)$ risolve, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Consideriamo la variabile ω come parametro.

Per la seconda formula fondamentale, vediamo che $\hat{u}(\omega, \cdot)$ risolve, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

e quindi

$$\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

La condizione iniziale implica $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{u}_0(\omega)$, dunque

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}. \quad (33)$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

La condizione iniziale implica $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{u}_0(\omega)$, dunque

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}. \quad (33)$$

Per ricavare u , dobbiamo antitrasformare.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

La condizione iniziale implica $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{u}_0(\omega)$, dunque

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}. \quad (33)$$

Per ricavare u , dobbiamo antitrasformare.

Tenendo presente che

$$e^{-\omega^2 t} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] \quad (34)$$

e ricordando che la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate, riconosciamo nel secondo membro della (33) la trasformata di

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) \right], \quad (35)$$

che fornisce la soluzione del problema.

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

La funzione

$$K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (36)$$

si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. La soluzione data dalla (35) si scrive

$$u(x, t) = K(x, t) * u_0(x). \quad (37)$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

La funzione

$$K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (36)$$

si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. La soluzione data dalla (35) si scrive

$$u(x, t) = K(x, t) * u_0(x). \quad (37)$$

Osservazione

Risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t) dx = 1, \quad \forall t > 0. \quad (38)$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

La funzione

$$K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (36)$$

si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. La soluzione data dalla (35) si scrive

$$u(x, t) = K(x, t) * u_0(x). \quad (37)$$

Osservazione

Risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t) dx = 1, \quad \forall t > 0. \quad (38)$$

Questa uguaglianza è il caso $\omega = 0$ di (34).

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Osservazione (continuazione)

Inoltre

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Osservazione (continuazione)

Inoltre

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Ne segue, per il teorema sulle δ -successioni

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} K(x, t) = \delta(x)$$

L'equazione del calore: problema di Cauchy nel semipiano

Osservazione (continuazione)

Inoltre

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Ne segue, per il teorema sulle δ -successioni

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} K(x, t) = \delta(x)$$

e ancora

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} K(x, t) * u_0(x) = \delta(x) * u_0(x) = u_0(x).$$

L'equazione delle onde

Per semplicità, ci limitiamo all'equazione delle onde in una variabile spaziale

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \quad (39)$$

L'equazione delle onde

Per semplicità, ci limitiamo all'equazione delle onde in una variabile spaziale

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \quad (39)$$

Si tratta di un'equazione iperbolica. L'operatore differenziale lineare che a primo membro è applicato a u si chiama *operatore delle onde*, o *d'Alembertiano*, e si denota con \square :

$$\square u = u_{tt} - u_{xx}.$$

L'equazione delle onde

Con il cambiamento di variabili

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t, \quad (40)$$

abbiamo

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2},$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

e

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (41)$$

nel semipiano

$$\{ (x, t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \}. \quad (42)$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Consideriamo il seguente problema

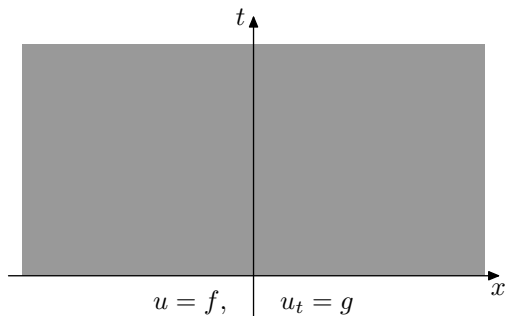
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (41)$$

nel semipiano

$$\{ (x, t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \}. \quad (42)$$

Le funzioni f e g definite in \mathbb{R} sono assegnate.

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano



L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Esso si dice *problema di Cauchy*, poiché sono imposte le due condizioni iniziali.

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Esso si dice *problema di Cauchy*, poiché sono imposte le due condizioni iniziali.

Usando il cambiamento di variabili (40), l'equazione si riscrive

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0. \quad (43)$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo u funzione di ξ e η .)

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Esso si dice *problema di Cauchy*, poiché sono imposte le due condizioni iniziali.

Usando il cambiamento di variabili (40), l'equazione si riscrive

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0. \quad (43)$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo u funzione di ξ e η .)

Notiamo che il semipiano (42) si trasforma nel semipiano del piano ξ, η

$$\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi \geq \eta \}.$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Dalla (43) segue che $\frac{\partial}{\partial \eta} u$ è costante rispetto a ξ ,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = h(\eta)$$

per un'opportuna funzione h .

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Dalla (43) segue che $\frac{\partial}{\partial \eta} u$ è costante rispetto a ξ ,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = h(\eta)$$

per un'opportuna funzione h .

Integrando rispetto a η , otteniamo che u si esprime come somma di una funzione di ξ e una di η :

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta).$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Dalla (43) segue che $\frac{\partial}{\partial \eta} u$ è costante rispetto a ξ ,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = h(\eta)$$

per un'opportuna funzione h .

Integrando rispetto a η , otteniamo che u si esprime come somma di una funzione di ξ e una di η :

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta).$$

Tornando alle variabili x e t ,

$$u(x, t) = \Phi(x + t) + \Psi(x - t). \quad (44)$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Questa è la soluzione generale dell'equazione in (41).

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Questa è la soluzione generale dell'equazione in (41).

Le condizioni iniziali divengono allora

$$u(x, 0) = \Phi(x) + \Psi(x) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi'(x) - \Psi'(x) = g(x). \quad (45)$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Questa è la soluzione generale dell'equazione in (41).

Le condizioni iniziali divengono allora

$$u(x, 0) = \Phi(x) + \Psi(x) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi'(x) - \Psi'(x) = g(x). \quad (45)$$

Ricaviamo Φ e Ψ in termini di f e g da queste uguaglianze.

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Questa è la soluzione generale dell'equazione in (41).

Le condizioni iniziali divengono allora

$$u(x, 0) = \Phi(x) + \Psi(x) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi'(x) - \Psi'(x) = g(x). \quad (45)$$

Ricaviamo Φ e Ψ in termini di f e g da queste uguaglianze.

Sia (x_0, t_0) un punto del semipiano (42), cioè $t_0 \geq 0$.

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Dalla seconda uguaglianza, integrando abbiamo

$$\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(x) dx = \Phi(x_0+t_0) - \Psi(x_0+t_0) - \Phi(x_0-t_0) + \Psi(x_0-t_0),$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Dalla seconda uguaglianza, integrando abbiamo

$$\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(x) dx = \Phi(x_0+t_0) - \Psi(x_0+t_0) - \Phi(x_0-t_0) + \Psi(x_0-t_0),$$

mentre dalla prima otteniamo

$$f(x_0+t_0) + f(x_0-t_0) = \Phi(x_0+t_0) + \Psi(x_0+t_0) + \Phi(x_0-t_0) + \Psi(x_0-t_0),$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Dalla seconda uguaglianza, integrando abbiamo

$$\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(x) dx = \Phi(x_0+t_0) - \Psi(x_0+t_0) - \Phi(x_0-t_0) + \Psi(x_0-t_0),$$

mentre dalla prima otteniamo

$$f(x_0+t_0) + f(x_0-t_0) = \Phi(x_0+t_0) + \Psi(x_0+t_0) + \Phi(x_0-t_0) + \Psi(x_0-t_0),$$

quindi, sommando e dividendo per 2, ricaviamo

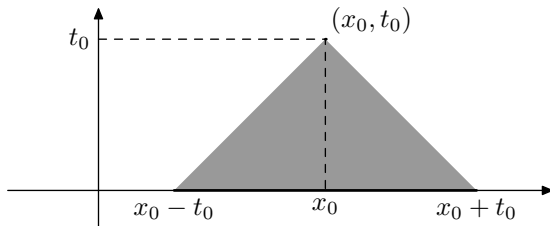
$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \Phi(x_0+t_0) + \Psi(x_0-t_0) \\ &= \frac{1}{2} [f(x_0+t_0) + f(x_0-t_0)] + \frac{1}{2} \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} g(x) dx. \end{aligned} \tag{46}$$

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Da questa formula si evince che $u(x_0, t_0)$ dipende solo da f e g sull'intervallo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ (non su tutto \mathbb{R}).

L'equazione delle onde: problema di Cauchy nel semipiano

Da questa formula si evince che $u(x_0, t_0)$ dipende solo da f e g sull'intervallo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ (non su tutto \mathbb{R}).



L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Consideriamo ora il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \forall t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (47)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Consideriamo ora il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \forall t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{array} \right. \quad (47)$$

Le ultime due condizioni al contorno si interpretano come condizioni iniziali (all'istante $t = 0$), quindi (47) si dice problema misto di Cauchy–Dirichlet.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

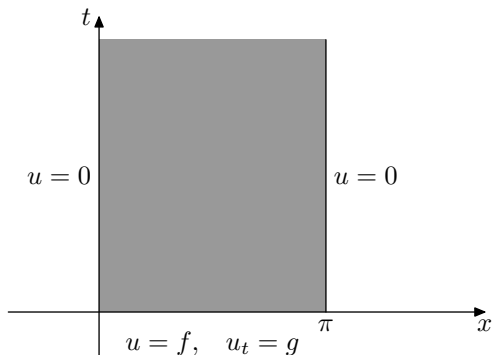
La funzione incognita u è definita nella semistriscia

$$S = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \}.$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

La funzione incognita u è definita nella semistriscia

$$S = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \}.$$



L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Facciamo alcune considerazioni preliminari.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Facciamo alcune considerazioni preliminari.

Moltiplichiamo per u_t ambo i membri dell'equazione:

$$0 = -u_{xx} u_t + u_{tt} u_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x)^2 - \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t). \quad (48)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Facciamo alcune considerazioni preliminari.

Moltiplichiamo per u_t ambo i membri dell'equazione:

$$0 = -u_{xx} u_t + u_{tt} u_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x)^2 - \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t). \quad (48)$$

Integriamo sul rettangolo $[0, \pi] \times [0, T]$, per un certo $T > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + u_x^2) dt - \int_0^T dt \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [|\nabla u(x, T)|^2 - |\nabla u(x, 0)|^2] dx \\ &\quad - \int_0^T [u_x(\pi, t) u_t(\pi, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)] dt, \end{aligned} \quad (49)$$

dove $\nabla u = (u_x, u_t)$ è il gradiente.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Dalle condizioni al contorno $u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \geq 0$,
derivando rispetto a t , abbiamo $\forall t \geq 0$

$$u_t(0, t) = u_t(\pi, t) = 0,$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Dalle condizioni al contorno $u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \geq 0$,
derivando rispetto a t , abbiamo $\forall t \geq 0$

$$u_t(0, t) = u_t(\pi, t) = 0,$$

quindi l'ultimo integrale in (49) è nullo.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Dalle condizioni al contorno $u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \geq 0$, derivando rispetto a t , abbiamo $\forall t \geq 0$

$$u_t(0, t) = u_t(\pi, t) = 0,$$

quindi l'ultimo integrale in (49) è nullo.

Inoltre, tenendo presenti le condizioni iniziali, abbiamo $\forall x \in [0, \pi]$,

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad u_x(x, 0) = f'(x),$$

e riscriviamo la (49) come segue:

$$\int_0^\pi [|u_x(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2] dx = \int_0^\pi [|f'(x)|^2 + |g(x)|^2] dx. \quad (50)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Questa è detta *equazione dell'energia* e, data l'arbitrarietà di T , mostra che la quantità a primo membro è costante.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Questa è detta *equazione dell'energia* e, data l'arbitrarietà di T , mostra che la quantità a primo membro è costante.

La (50) permette di mostrare l'unicità di soluzione.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Questa è detta *equazione dell'energia* e, data l'arbitrarietà di T , mostra che la quantità a primo membro è costante.

La (50) permette di mostrare l'unicità di soluzione.

In effetti, se u_1 e u_2 risolvono (47), la differenza $u = u_1 - u_2$ soddisfa un problema analogo, con dati iniziali nulli; in tal caso, il secondo membro in (50) è nullo, cioè

$$\int_0^\pi [|u_x(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2] dx = 0. \quad (51)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Questa è detta *equazione dell'energia* e, data l'arbitrarietà di T , mostra che la quantità a primo membro è costante.

La (50) permette di mostrare l'unicità di soluzione.

In effetti, se u_1 e u_2 risolvono (47), la differenza $u = u_1 - u_2$ soddisfa un problema analogo, con dati iniziali nulli; in tal caso, il secondo membro in (50) è nullo, cioè

$$\int_0^\pi [|u_x(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2] dx = 0. \quad (51)$$

Per l'arbitrarietà di $T > 0$, (51) implica che u ha le derivate nulle nella semistriscia e quindi è costante; annullandosi nei punti $(0, t)$ e (π, t) , $\forall t > 0$, essa è identicamente nulla.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Per risolvere il problema (47), usiamo la trasformazione unilatera di Laplace rispetto alla variabile t (che per semplicità indichiamo con \mathcal{L}); poniamo

$$\varphi(x, s) = \mathcal{L}[u(x, \cdot)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt \quad (52)$$

(supponendo la trasformabilità), dove s è complesso.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Per risolvere il problema (47), usiamo la trasformazione unilatera di Laplace rispetto alla variabile t (che per semplicità indichiamo con \mathcal{L}); poniamo

$$\varphi(x, s) = \mathcal{L}[u(x, \cdot)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt \quad (52)$$

(supponendo la trasformabilità), dove s è complesso.

Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale, abbiamo $\mathcal{L}[u_{xx}] = \varphi_{xx} = \varphi''$, mentre per la seconda formula fondamentale

$$\mathcal{L}[u_{tt}] = s^2 \varphi - s u(x, 0) - u_t(x, 0) = s^2 \varphi - s f(x) - g(x).$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Trasformando ambo i membri dell'equazione in (47), arriviamo all'equazione differenziale ordinaria per $\varphi(\cdot, s)$:

$$\varphi'' = s^2 \varphi - s f(x) - g(x),$$

dove s figura come parametro.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Trasformando ambo i membri dell'equazione in (47), arriviamo all'equazione differenziale ordinaria per $\varphi(\cdot, s)$:

$$\varphi'' = s^2 \varphi - s f(x) - g(x),$$

dove s figura come parametro.

D'altra parte, dalle condizioni al contorno deduciamo

$$\varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0.$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Trasformando ambo i membri dell'equazione in (47), arriviamo all'equazione differenziale ordinaria per $\varphi(\cdot, s)$:

$$\varphi'' = s^2 \varphi - s f(x) - g(x),$$

dove s figura come parametro.

D'altra parte, dalle condizioni al contorno deduciamo

$$\varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0.$$

Pertanto $\varphi(\cdot, s)$ risolve il seguente problema di Picard

$$\begin{cases} -\varphi'' + s^2 \varphi = s f(x) + g(x) \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

In base al teorema dell'alternativa, tale problema è risolubile per ogni f e g se e solo se il problema relativo all'equazione omogenea associata

$$\begin{cases} -\varphi'' = -s^2 \varphi \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

ha solo la soluzione banale, ovvero $\lambda = -s^2$ non è autovalore.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

In base al teorema dell'alternativa, tale problema è risolubile per ogni f e g se e solo se il problema relativo all'equazione omogenea associata

$$\begin{cases} -\varphi'' = -s^2 \varphi \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

ha solo la soluzione banale, ovvero $\lambda = -s^2$ non è autovalore.

Sappiamo che gli autovalori sono $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, quindi $s \neq \pm jn$.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

In base al teorema dell'alternativa, tale problema è risolubile per ogni f e g se e solo se il problema relativo all'equazione omogenea associata

$$\begin{cases} -\varphi'' = -s^2 \varphi \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

ha solo la soluzione banale, ovvero $\lambda = -s^2$ non è autovalore.

Sappiamo che gli autovalori sono $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, quindi $s \neq \pm jn$.

Dunque possiamo supporre $\operatorname{Re} s > 0$.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

In base al teorema dell'alternativa, tale problema è risolubile per ogni f e g se e solo se il problema relativo all'equazione omogenea associata

$$\begin{cases} -\varphi'' = -s^2 \varphi \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

ha solo la soluzione banale, ovvero $\lambda = -s^2$ non è autovalore.

Sappiamo che gli autovalori sono $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, quindi $s \neq \pm jn$.

Dunque possiamo supporre $\operatorname{Re} s > 0$.

Una volta risolto (53), per ricavare u bisogna antitrasformare,

$$u = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(x, \cdot)].$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Illustriamo il procedimento esposto nel caso

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Illustriamo il procedimento esposto nel caso

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

La trasformata φ di u risolve il seguente problema

$$\begin{cases} -\varphi'' + s^2 \varphi = s \sin x \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Illustriamo il procedimento esposto nel caso

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

La trasformata φ di u risolve il seguente problema

$$\begin{cases} -\varphi'' + s^2 \varphi = s \sin x \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

dove $\operatorname{Re} s > 0$.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Illustriamo il procedimento esposto nel caso

$$f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = 0, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

La trasformata φ di u risolve il seguente problema

$$\begin{cases} -\varphi'' + s^2 \varphi = s \sin x \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

dove $\operatorname{Re} s > 0$.

Possiamo supporre s reale, $s > 0$, e ricavare il caso generale mediante l'analiticità.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Poiché $-s^2$ non è autovalore del problema relativo all'equazione omogenea associata, il problema (55) ha un'unica soluzione.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Poiché $-s^2$ non è autovalore del problema relativo all'equazione omogenea associata, il problema (55) ha un'unica soluzione.

Risolviamo il problema (55) scrivendo l'integrale generale dell'equazione e poi imponendo le condizioni ai limiti.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Poiché $-s^2$ non è autovalore del problema relativo all'equazione omogenea associata, il problema (55) ha un'unica soluzione.

Risolviamo il problema (55) scrivendo l'integrale generale dell'equazione e poi imponendo le condizioni ai limiti.

L'integrale generale dell'equazione

$$-\varphi'' + s^2 \varphi = s \sin x \quad (56)$$

si ottiene sommando un integrale particolare $\tilde{\varphi}$ all'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$-\varphi'' + s^2 \varphi = 0 \quad (57)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Il termine noto dell'equazione (56) è di tipo particolare.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Il termine noto dell'equazione (56) è di tipo particolare.

È noto quindi che l'equazione ha un integrale del tipo

$$\tilde{\varphi}(x) = a \cos x + b \sin x \quad (58)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Il termine noto dell'equazione (56) è di tipo particolare.

È noto quindi che l'equazione ha un integrale del tipo

$$\tilde{\varphi}(x) = a \cos x + b \sin x \quad (58)$$

dove a e b sono costanti rispetto a x , ma possono dipendere dal parametro s .

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Il termine noto dell'equazione (56) è di tipo particolare.

È noto quindi che l'equazione ha un integrale del tipo

$$\tilde{\varphi}(x) = a \cos x + b \sin x \quad (58)$$

dove a e b sono costanti rispetto a x , ma possono dipendere dal parametro s .

Imponendo che $\tilde{\varphi}$ soddisfi l'equazione (56), troviamo

$$(1 + s^2)(a \cos x + b \sin x) = s \sin x$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Il termine noto dell'equazione (56) è di tipo particolare.

È noto quindi che l'equazione ha un integrale del tipo

$$\tilde{\varphi}(x) = a \cos x + b \sin x \quad (58)$$

dove a e b sono costanti rispetto a x , ma possono dipendere dal parametro s .

Imponendo che $\tilde{\varphi}$ soddisfi l'equazione (56), troviamo

$$(1 + s^2)(a \cos x + b \sin x) = s \sin x$$

da cui

$$a = 0, \quad b = \frac{s}{1 + s^2}.$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Pertanto

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, s) = \frac{s}{1 + s^2} \sin x \quad (59)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Pertanto

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, s) = \frac{s}{1+s^2} \sin x \quad (59)$$

Notiamo che $\tilde{\varphi}$ verifica le condizioni ai limiti del problema (55):

$$\tilde{\varphi}(0, s) = \tilde{\varphi}(\pi, s) = 0$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Pertanto

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, s) = \frac{s}{1+s^2} \sin x \quad (59)$$

Notiamo che $\tilde{\varphi}$ verifica le condizioni ai limiti del problema (55):

$$\tilde{\varphi}(0, s) = \tilde{\varphi}(\pi, s) = 0$$

Dunque $\tilde{\varphi}$ è la soluzione del problema (55).

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Pertanto

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, s) = \frac{s}{1+s^2} \sin x \quad (59)$$

Notiamo che $\tilde{\varphi}$ verifica le condizioni ai limiti del problema (55):

$$\tilde{\varphi}(0, s) = \tilde{\varphi}(\pi, s) = 0$$

Dunque $\tilde{\varphi}$ è la soluzione del problema (55).

(Non c'è bisogno di integrare l'equazione omogenea.)

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Concludiamo antitrasformando

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\varphi}(x, s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2} \sin x\right] = \cos t \sin x.$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Concludiamo antitrasformando

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\varphi}(x, s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2} \sin x\right] = \cos t \sin x.$$

Osserviamo che risulta

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)].$$

Richiamo

A scopo illustrativo, determiniamo anche la funzione di Green del problema (55), per $s > 0$ fissato.

A scopo illustrativo, determiniamo anche la funzione di Green del problema (55), per $s > 0$ fissato.

$$G(x, \xi) := \begin{cases} -\frac{y_1(x) y_2(\xi)}{pW}, & a \leq x \leq \xi \leq b \\ -\frac{y_1(\xi) y_2(x)}{pW}, & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (60)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Occorre trovare due integrali indipendenti φ_1 e φ_2 dell'equazione omogenea (57), con φ_1 verificante la condizione in 0 e φ_2 verificante la condizione in π :

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(\pi) = 0.$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Occorre trovare due integrali indipendenti φ_1 e φ_2 dell'equazione omogenea (57), con φ_1 verificante la condizione in 0 e φ_2 verificante la condizione in π :

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(\pi) = 0.$$

L'equazione caratteristica di (57) è

$$\sigma^2 - s^2 = 0$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Occorre trovare due integrali indipendenti φ_1 e φ_2 dell'equazione omogenea (57), con φ_1 verificante la condizione in 0 e φ_2 verificante la condizione in π :

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(\pi) = 0.$$

L'equazione caratteristica di (57) è

$$\sigma^2 - s^2 = 0$$

quindi una coppia di integrali indipendenti è e^{sx} , e^{-sx} .

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Possiamo dunque prendere

$$\varphi_1(x) = \sinh sx, \quad \varphi_2(x) = \sinh s(x - \pi).$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Possiamo dunque prendere

$$\varphi_1(x) = \sinh sx, \quad \varphi_2(x) = \sinh s(x - \pi).$$

Sono indipendenti perché non banali. Nell'equazione in (55) risulta $\rho \equiv 1$.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Possiamo dunque prendere

$$\varphi_1(x) = \sinh sx, \quad \varphi_2(x) = \sinh s(x - \pi).$$

Sono indipendenti perché non banali. Nell'equazione in (55) risulta $\rho \equiv 1$.

Calcoliamo il wronskiano di φ_1 e φ_2 :

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \sinh sx & \sinh s(x - \pi) \\ s \cosh sx & s \cosh s(x - \pi) \end{vmatrix} \\ &= s[\sinh sx \cosh s(x - \pi) - \cosh sx \sinh s(x - \pi)] \\ &= s \sinh[sx - s(x - \pi)] = s \sinh s\pi. \end{aligned}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Pertanto

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\sinh sx \sinh s(\xi - \pi)}{s \sinh s\pi}, & 0 \leq x \leq \xi \leq \pi \\ -\frac{\sinh s\xi \sinh s(x - \pi)}{s \sinh s\pi}, & 0 \leq \xi \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (61)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Pertanto

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{\sinh sx \sinh s(\xi - \pi)}{s \sinh s\pi}, & 0 \leq x \leq \xi \leq \pi \\ -\frac{\sinh s\xi \sinh s(x - \pi)}{s \sinh s\pi}, & 0 \leq \xi \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (61)$$

Ad esempio, per l'integrale $\tilde{\varphi}$ in (59) risulta

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \int_0^\pi G(x, \xi) s \sin \xi d\xi \\ &= -\frac{1}{\sinh s\pi} \left[\sinh s(x - \pi) \int_0^x \sinh s\xi \sin \xi d\xi \right. \\ &\quad \left. + \sinh sx \int_x^\pi \sinh s(\xi - \pi) \sin \xi d\xi \right] \end{aligned} \quad (62)$$

Introdotta la funzione di Green, la soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = f \\ y \in X, \end{cases}$$

Introdotta la funzione di Green, la soluzione del problema ai limiti

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = f \\ y \in X, \end{cases}$$

si scrive

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (63)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Gli integrali in (62) si calcolano per parti. Il calcolo è laborioso.

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Gli integrali in (62) si calcolano per parti. Il calcolo è laborioso.

$$\int_0^x \sinh s\xi \sin \xi d\xi = -\sinh sx \cos x + s \int_0^x \cosh s\xi \cos \xi d\xi,$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Gli integrali in (62) si calcolano per parti. Il calcolo è laborioso.

$$\int_0^x \sinh s\xi \sin \xi \, d\xi = -\sinh sx \cos x + s \int_0^x \cosh s\xi \cos \xi \, d\xi,$$

$$\int_0^x \cosh s\xi \cos \xi \, d\xi = \cosh sx \sin x - s \int_0^x \sinh s\xi \sin \xi \, d\xi,$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Gli integrali in (62) si calcolano per parti. Il calcolo è laborioso.

$$\int_0^x \sinh s\xi \sin \xi d\xi = -\sinh sx \cos x + s \int_0^x \cosh s\xi \cos \xi d\xi,$$

$$\int_0^x \cosh s\xi \cos \xi d\xi = \cosh sx \sin x - s \int_0^x \sinh s\xi \sin \xi d\xi,$$

quindi

$$\int_0^x \sinh s\xi \sin \xi d\xi = \frac{-\sinh sx \cos x + s \cosh sx \sin x}{1 + s^2} \quad (64)$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre, ponendo $\eta = \xi - \pi$,

$$\begin{aligned}\int_x^\pi \sinh s(\xi - \pi) \sin \xi \, d\xi &= \int_{x-\pi}^0 \sinh s\eta \sin(\eta + \pi) \, d\eta \\ &= \int_0^{x-\pi} \sinh s\eta \sin \eta \, d\eta\end{aligned}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre, ponendo $\eta = \xi - \pi$,

$$\begin{aligned}\int_x^\pi \sinh s(\xi - \pi) \sin \xi \, d\xi &= \int_{x-\pi}^0 \sinh s\eta \sin(\eta + \pi) \, d\eta \\ &= \int_0^{x-\pi} \sinh s\eta \sin \eta \, d\eta\end{aligned}$$

che è l'integrale calcolato in (64), con $x - \pi$ al posto di x , quindi otteniamo

$$\int_x^\pi \sinh s(\xi - \pi) \sin \xi \, d\xi = \frac{\sinh s(x - \pi) \cos x - s \cosh s(x - \pi) \sin x}{1 + s^2}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre

$$\begin{aligned} & \sinh s(x - \pi)[- \sinh sx \cos x + s \cosh sx \sin x] \\ & + \sinh sx[\sinh s(x - \pi) \cos x - s \cosh s(x - \pi) \sin x] \end{aligned}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre

$$\begin{aligned} & \sinh s(x - \pi)[- \sinh sx \cos x + s \cosh sx \sin x] \\ & \quad + \sinh sx[\sinh s(x - \pi) \cos x - s \cosh s(x - \pi) \sin x] \\ & = s[\cosh sx \sinh s(x - \pi) - \sinh sx \cosh s(x - \pi)] \sin x \end{aligned}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre

$$\begin{aligned} & \sinh s(x - \pi)[- \sinh sx \cos x + s \cosh sx \sin x] \\ & \quad + \sinh sx[\sinh s(x - \pi) \cos x - s \cosh s(x - \pi) \sin x] \\ & = s[\cosh sx \sinh s(x - \pi) - \sinh sx \cosh s(x - \pi)] \sin x \\ & = s \sinh[s(x - \pi) - sx] \sin x \end{aligned}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre

$$\begin{aligned} & \sinh s(x - \pi)[- \sinh sx \cos x + s \cosh sx \sin x] \\ & \quad + \sinh sx[\sinh s(x - \pi) \cos x - s \cosh s(x - \pi) \sin x] \\ & = s[\cosh sx \sinh s(x - \pi) - \sinh sx \cosh s(x - \pi)] \sin x \\ & = s \sinh[s(x - \pi) - sx] \sin x \\ & = -s \sinh s\pi \sin x \end{aligned}$$

L'equazione delle onde: problema misto nella semistriscia

Inoltre

$$\begin{aligned} & \sinh s(x - \pi)[- \sinh sx \cos x + s \cosh sx \sin x] \\ & \quad + \sinh sx[\sinh s(x - \pi) \cos x - s \cosh s(x - \pi) \sin x] \\ & = s[\cosh sx \sinh s(x - \pi) - \sinh sx \cosh s(x - \pi)] \sin x \\ & = s \sinh[s(x - \pi) - sx] \sin x \\ & = -s \sinh s\pi \sin x \end{aligned}$$

In definitiva, ritroviamo (59).

Nel corso della verifica, abbiamo usato la formula di addizione

$$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$$

Osservazione

Nel corso della verifica, abbiamo usato la formula di addizione

$$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$, che segue da un calcolo diretto.

Osservazione

Nel corso della verifica, abbiamo usato la formula di addizione

$$\sinh(z + w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w$$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$, che segue da un calcolo diretto.

D'altra parte, mutando z in jz e w in jw , la formula si scrive equivalentemente

$$\sinh(jz + jw) = \sinh jz \cosh jw + \cosh jz \sinh jw$$

Osservazione

Ricordando che, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\cosh j\alpha = \cos \alpha, \quad \sinh j\alpha = j \sin \alpha,$$

Osservazione

Ricordando che, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\cosh j\alpha = \cos \alpha, \quad \sinh j\alpha = j \sin \alpha,$$

la formula diviene

$$j \sin(z + w) = j \sin z \cos w + \cos z j \sin w$$

Osservazione

Ricordando che, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\cosh j\alpha = \cos \alpha, \quad \sinh j\alpha = j \sin \alpha,$$

la formula diviene

$$j \sin(z + w) = j \sin z \cos w + \cos z j \sin w$$

e quindi corrisponde alla formula di addizione del seno.