

Esercitazione 3

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli “Federico II”



Anno Accademico 2022/2023

Esercizio 1-1

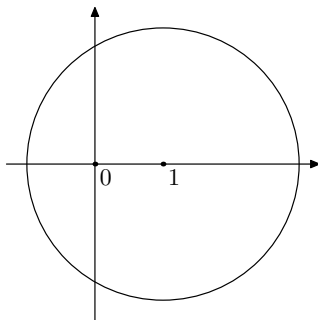
Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z-1|=2} \frac{2z+1}{z^2-z} dz$$

Esercizio 1-1

Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z-1|=2} \frac{2z+1}{z^2-z} dz$$



Esercizio 1-2

L'integrando è funzione razionale, olomorfa in \mathbb{C} esclusi i punti 0 e 1, che sono poli semplici.

Esercizio 1-2

L'integrando è funzione razionale, olomorfa in \mathbb{C} esclusi i punti 0 e 1, che sono poli semplici.

Entrambi i punti sono interni al cerchio di centro 1 e raggio 2, la cui frontiera è il cammino di integrazione.

Esercizio 1-2

L'integrando è funzione razionale, olomorfa in \mathbb{C} esclusi i punti 0 e 1, che sono poli semplici.

Entrambi i punti sono interni al cerchio di centro 1 e raggio 2, la cui frontiera è il cammino di integrazione.

Per il teorema dei residui, l'integrale vale dunque

$$2\pi j(R[0] + R[1]).$$

Esercizio 1-3

Inoltre

$$R[0] = \left. \frac{2z + 1}{z - 1} \right|_{z=0} = -1, \quad R[1] = \left. \frac{2z + 1}{z} \right|_{z=1} = 3.$$

Esercizio 1-3

Inoltre

$$R[0] = \left. \frac{2z+1}{z-1} \right|_{z=0} = -1, \quad R[1] = \left. \frac{2z+1}{z} \right|_{z=1} = 3.$$

Alternativamente, ricordando che la somma dei residui è nulla, troviamo

$$R[0] + R[1] = -R[\infty] = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{2z+1}{z^2-z} = 2.$$

Esercizio 1-3

Inoltre

$$R[0] = \left. \frac{2z+1}{z-1} \right|_{z=0} = -1, \quad R[1] = \left. \frac{2z+1}{z} \right|_{z=1} = 3.$$

Alternativamente, ricordando che la somma dei residui è nulla, troviamo

$$R[0] + R[1] = -R[\infty] = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{2z+1}{z^2-z} = 2.$$

In definitiva, l'integrale vale $4\pi j$.

Esercizio 2-1

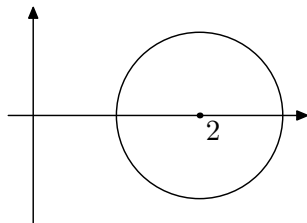
Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$$

Esercizio 2-1

Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$$



Esercizio 2-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0, 2\}$.

Esercizio 2-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0, 2\}$.

In base alla definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[2].$$

Esercizio 2-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0, 2\}$.

In base alla definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[2].$$

Osserviamo che 2 è un polo doppio, quindi

$$R[2] = \lim_{z \rightarrow 2} D \left\{ (z - 2)^2 \frac{e^z}{z(z - 2)^2} \right\} = e^z \frac{z - 1}{z^2} \Big|_{z=2} = \frac{e^2}{4}.$$

Esercizio 2-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0, 2\}$.

In base alla definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[2].$$

Osserviamo che 2 è un polo doppio, quindi

$$R[2] = \lim_{z \rightarrow 2} D \left\{ (z-2)^2 \frac{e^z}{z(z-2)^2} \right\} = e^z \frac{z-1}{z^2} \Big|_{z=2} = \frac{e^2}{4}.$$

In definitiva, il valore dell'integrale è

$$\frac{e^2 \pi j}{2}.$$

Esercizio 3-1

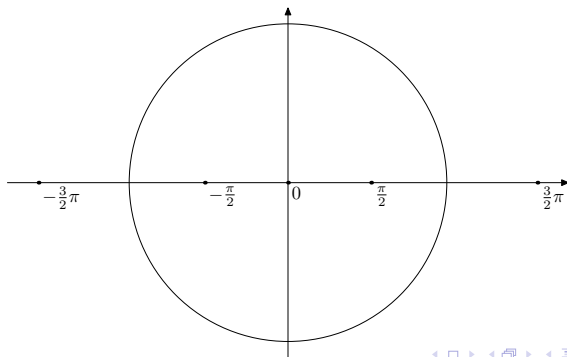
Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=3} \operatorname{tg} z \, dz$$

Esercizio 3-1

Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=3} \operatorname{tg} z \, dz$$



Esercizio 3-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Esercizio 3-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

I punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono poli semplici e, $\forall k \in \mathbb{Z}$, risulta

$$R \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \operatorname{tg} z \right] = \frac{\sin z}{-\sin z} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} = -1.$$

Esercizio 3-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

I punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono poli semplici e, $\forall k \in \mathbb{Z}$, risulta

$$R \left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \operatorname{tg} z \right] = \frac{\sin z}{-\sin z} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} = -1.$$

Nel cerchio di centro 0 e raggio 3 cadono $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, quindi l'integrale vale

$$2\pi j \left(R \left[-\frac{\pi}{2} \right] + R \left[\frac{\pi}{2} \right] \right) = -4\pi j.$$

Esercizio 4-1

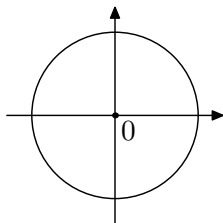
Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{1 - \cos z} dz$$

Esercizio 4-1

Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{1 - \cos z} dz$$



Esercizio 4-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Esercizio 4-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Di questi, 0 è anche zero semplice del numeratore, quindi è polo semplice dell'integrando. (Tutti gli altri punti sono poli doppi.)

Esercizio 4-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Di questi, 0 è anche zero semplice del numeratore, quindi è polo semplice dell'integrando. (Tutti gli altri punti sono poli doppi.)

Per definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[0].$$

Esercizio 4-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Di questi, 0 è anche zero semplice del numeratore, quindi è polo semplice dell'integrando. (Tutti gli altri punti sono poli doppi.)

Per definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[0].$$

Essendo

$$R[0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z}{1 - \cos z} = 2,$$

l'integrale vale $4\pi j$.

Esercizio 5-1

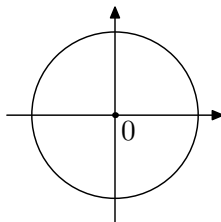
Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z^2) - 1}{z^3} dz$$

Esercizio 5-1

Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z^2) - 1}{z^3} dz$$



Esercizio 5-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0\}$.

Esercizio 5-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0\}$.

0 è zero di ordine 2 per il numeratore e di ordine 3 per il denominatore, quindi è polo semplice dell'integrando.

Esercizio 5-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0\}$.

0 è zero di ordine 2 per il numeratore e di ordine 3 per il denominatore, quindi è polo semplice dell'integrando.

Per la definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[0].$$

Esercizio 5-2

L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0\}$.

0 è zero di ordine 2 per il numeratore e di ordine 3 per il denominatore, quindi è polo semplice dell'integrando.

Per la definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j R[0].$$

Essendo

$$R[0] = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\exp(z^2) - 1}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z^2) - 1}{z^2} = 1,$$

l'integrale vale $2\pi j$.

Esercizio 6-1

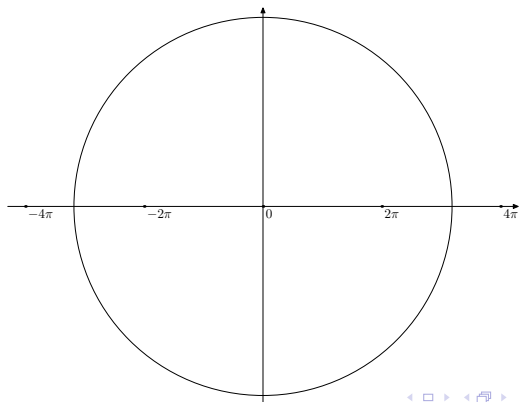
Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=10} \frac{z \sin z}{1 - \cos z} dz$$

Esercizio 6-1

Usando i teoremi dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=10} \frac{z \sin z}{1 - \cos z} dz$$



Esercizio 6-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Esercizio 6-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Di questi, 0 è anche zero doppio del numeratore, quindi è singolarità eliminabile dell'integrando.

Esercizio 6-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Di questi, 0 è anche zero doppio del numeratore, quindi è singolarità eliminabile dell'integrando.

Tutti gli altri punti sono zeri semplici del numeratore, quindi poli semplici dell'integrando.

Esercizio 6-2

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi.

Di questi, 0 è anche zero doppio del numeratore, quindi è singolarità eliminabile dell'integrando.

Tutti gli altri punti sono zeri semplici del numeratore, quindi poli semplici dell'integrando.

In base al teorema dei residui, il valore dell'integrale è

$$2\pi j(R[-2\pi] + R[2\pi]).$$

Esercizio 6-3

Inoltre

$$\begin{aligned} R[2\pi] &= \lim_{z \rightarrow 2\pi} (z - 2\pi) \frac{z \sin z}{1 - \cos z} \\ &= 2\pi \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{(z - 2\pi)^2}{1 - \cos(z - 2\pi)} \frac{\sin(z - 2\pi)}{z - 2\pi} = 4\pi \end{aligned}$$

e analogamente $R[-2\pi] = -4\pi$. Pertanto l'integrale è nullo.

Esercizio 6-3

Inoltre

$$\begin{aligned}R[2\pi] &= \lim_{z \rightarrow 2\pi} (z - 2\pi) \frac{z \sin z}{1 - \cos z} \\ &= 2\pi \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{(z - 2\pi)^2}{1 - \cos(z - 2\pi)} \frac{\sin(z - 2\pi)}{z - 2\pi} = 4\pi\end{aligned}$$

e analogamente $R[-2\pi] = -4\pi$. Pertanto l'integrale è nullo.

Tale risultato segue immediatamente, in quanto la funzione integranda è pari il cammino di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, quindi i residui si presentano a coppie di numeri opposti.

Esercizio 7-1

Ricaviamo una formula per l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} \quad (1)$$

con a, b e $c \in \mathbb{R}$ verificanti $a^2 > b^2 + c^2$.

Esercizio 7-1

Ricaviamo una formula per l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} \quad (1)$$

con a, b e $c \in \mathbb{R}$ verificanti $a^2 > b^2 + c^2$.

Questa condizione assicura che il denominatore non si annulla ed è concorde col coefficiente a , $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi l'integrando è continuo. Chiaramente, anche I è concorde con a .

Esercizio 7-1

Ricaviamo una formula per l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} \quad (1)$$

con a, b e $c \in \mathbb{R}$ verificanti $a^2 > b^2 + c^2$.

Questa condizione assicura che il denominatore non si annulla ed è concorde col coefficiente a , $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi l'integrando è continuo. Chiaramente, anche I è concorde con a .

Il caso $b = c = 0$ è banale, poiché l'integrando risulta costante, quindi supponiamo che uno almeno dei due coefficienti sia non nullo.

Esercizio 7-2

Con la usuale posizione $z = e^{jx}$, abbiamo

$$a + b \cos x + c \sin x = a + b \frac{z + 1/z}{2} + c \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{1}{2z} (\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}),$$

dove $\alpha = b - jc \neq 0$.

Esercizio 7-2

Con la usuale posizione $z = e^{jx}$, abbiamo

$$a + b \cos x + c \sin x = a + b \frac{z + 1/z}{2} + c \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{1}{2z} (\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}),$$

dove $\alpha = b - jc \neq 0$.

Quindi

$$I = \frac{2}{j} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}}.$$

Esercizio 7-2

Con la usuale posizione $z = e^{jx}$, abbiamo

$$a + b \cos x + c \sin x = a + b \frac{z + 1/z}{2} + c \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{1}{2z} (\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}),$$

dove $\alpha = b - jc \neq 0$.

Quindi

$$I = \frac{2}{j} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}}.$$

Osserviamo inoltre che

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha} \neq 0.$$

Esercizio 7-2

Con la usuale posizione $z = e^{jx}$, abbiamo

$$a + b \cos x + c \sin x = a + b \frac{z + 1/z}{2} + c \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{1}{2z} (\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}),$$

dove $\alpha = b - jc \neq 0$.

Quindi

$$I = \frac{2}{j} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}}.$$

Osserviamo inoltre che

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha} \neq 0.$$

Infatti, se $|z| = 1$, per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}| \geq 2 |a z| - (|\alpha z^2| + |\bar{\alpha}|) = 2(|a| - |\alpha|) > 0.$$

Esercizio 7-3

Detti z_1 e z_2 gli zeri di $\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}$ e supposto com'è lecito $|z_1| \leq |z_2|$, risulta $z_1 z_2 = \bar{\alpha}/\alpha$, quindi $|z_1| |z_2| = |\bar{\alpha}|/|\alpha| = 1$ e dunque

$$|z_1| < 1 < |z_2|.$$

Esercizio 7-3

Detti z_1 e z_2 gli zeri di $\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}$ e supposto com'è lecito $|z_1| \leq |z_2|$, risulta $z_1 z_2 = \bar{\alpha}/\alpha$, quindi $|z_1| |z_2| = |\bar{\alpha}|/|\alpha| = 1$ e dunque

$$|z_1| < 1 < |z_2|.$$

Per la definizione di residuo, l'integrale vale

$$I = \frac{2}{j} 2\pi j R[z_1] = 4\pi R[z_1].$$

Esercizio 7-3

Detti z_1 e z_2 gli zeri di $\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}$ e supposto com'è lecito $|z_1| \leq |z_2|$, risulta $z_1 z_2 = \bar{\alpha}/\alpha$, quindi $|z_1| |z_2| = |\bar{\alpha}|/|\alpha| = 1$ e dunque

$$|z_1| < 1 < |z_2|.$$

Per la definizione di residuo, l'integrale vale

$$I = \frac{2}{j} 2\pi j R[z_1] = 4\pi R[z_1].$$

D'altra parte $\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha} = \alpha (z - z_1)(z - z_2)$, quindi

$$R[z_1] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}} = \frac{1}{\alpha (z_1 - z_2)}.$$

Esercizio 7-4

Tenendo presente la formula risolutiva dell'equazione di II grado, per gli zeri di $\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}$ abbiamo chiaramente

$$z_1 - z_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha} .$$

Esercizio 7-4

Tenendo presente la formula risolutiva dell'equazione di II grado, per gli zeri di $\alpha z^2 + 2 a z + \bar{\alpha}$ abbiamo chiaramente

$$z_1 - z_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}.$$

Pertanto

$$R[z_1] = \frac{1}{\pm 2\sqrt{a^2 - |\alpha|^2}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}},$$

dove la determinazione della radice è quella aritmetica del numero reale positivo $a^2 - |\alpha|^2 = a^2 - b^2 - c^2$.

Esercizio 7-5

In definitiva,

$$I = 2\pi \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}. \quad (2)$$

Esercizio 7-5

In definitiva,

$$I = 2\pi \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}. \quad (2)$$

Ad esempio,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + 3 \cos x + 2 \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{16 - 9 - 4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 8-1

Per gli integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x) dx, \quad \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x) dx,$$

con \mathcal{R} funzione razionale propria, può convenire decomporre \mathcal{R} in fratti semplici.

Esercizio 8-1

Per gli integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x) dx, \quad \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x) dx,$$

con \mathcal{R} funzione razionale propria, può convenire decomporre \mathcal{R} in fratti semplici.

Ad esempio, se i poli w_k di $\mathcal{R}(w)$ sono tutti reali semplici e in valore assoluto maggiori di 1, mostrare la formula

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x) dx = -2\pi \sum_k R[w_k] \frac{\operatorname{sgn} w_k}{\sqrt{w_k^2 - 1}},$$

i residui essendo relativi a \mathcal{R} .

Esercizio 8-1

Per gli integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x) dx, \quad \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos x) dx,$$

con \mathcal{R} funzione razionale propria, può convenire decomporre \mathcal{R} in fratti semplici.

Ad esempio, se i poli w_k di $\mathcal{R}(w)$ sono tutti reali semplici e in valore assoluto maggiori di 1, mostrare la formula

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x) dx = -2\pi \sum_k R[w_k] \frac{\operatorname{sgn} w_k}{\sqrt{w_k^2 - 1}},$$

i residui essendo relativi a \mathcal{R} .

Valutare

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{12 \sin^2 x - 35 \sin x + 25}$$

Esercizio 8-2

Per le ipotesi fatte su \mathcal{R} , abbiamo

$$\mathcal{R}(w) = \sum_k \frac{R[w_k]}{w - w_k}$$

Esercizio 8-2

Per le ipotesi fatte su \mathcal{R} , abbiamo

$$\mathcal{R}(w) = \sum_k \frac{R[w_k]}{w - w_k}$$

e quindi

$$\mathcal{R}(\sin x) = \sum_k \frac{R[w_k]}{\sin x - w_k}.$$

Concludiamo allora usando la formula (2) dell'esercizio precedente.

Esercizio 8-3

Nel caso particolare in esame, gli zeri di $12 w^2 - 35 w + 25$ sono

$$w_1 = \frac{35 - \sqrt{1225 - 1200}}{24} = \frac{35 - 5}{24} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}, \quad w_2 = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}.$$

Esercizio 8-3

Nel caso particolare in esame, gli zeri di $12 w^2 - 35 w + 25$ sono

$$w_1 = \frac{35 - \sqrt{1225 - 1200}}{24} = \frac{35 - 5}{24} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}, \quad w_2 = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}.$$

Inoltre

$$R \left[\frac{5}{4} \right] = \frac{1}{12 \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3} \right)} = -\frac{1}{5}, \quad R \left[\frac{5}{3} \right] = \frac{1}{12 \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4} \right)} = \frac{1}{5}$$

(potevamo anche notare che $R[\infty] = 0$, quindi $R \left[\frac{5}{3} \right] = -R \left[\frac{5}{4} \right]$).

Esercizio 8-4

Dunque abbiamo

$$\frac{1}{12w^2 - 35w + 25} = \frac{1/5}{w - 5/3} - \frac{1/5}{w - 5/4},$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{12 \sin^2 x - 35 \sin x + 25} &= 2\pi \left(-\frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}-1}} + \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}-1}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{5} \left(\frac{4}{\sqrt{25-16}} - \frac{3}{\sqrt{25-9}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{5} \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{30} \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 9-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx.$$

Esercizio 9-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx.$$

Gli zeri del denominatore sono π e 2π , che sono discontinuità eliminabili dell'integrando.

Esercizio 9-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx.$$

Gli zeri del denominatore sono π e 2π , che sono discontinuità eliminabili dell'integrando.

Inoltre l'integrando è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi l'integrale converge assolutamente.

Esercizio 9-2

Per il calcolo mediante la teoria dei residui, scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}.$$

Esercizio 9-2

Per il calcolo mediante la teoria dei residui, scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}.$$

Per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è $\text{Im } f(x)$, quindi l'integrale cercato sarà

$$\text{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Esercizio 9-2

Per il calcolo mediante la teoria dei residui, scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}.$$

Per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è $\text{Im } f(x)$, quindi l'integrale cercato sarà

$$\text{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Notiamo che l'integrale di f è inteso nel senso del valor principale poiché π e 2π sono poli semplici di f .

Esercizio 9-3

Come è noto

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j (R[\pi] + R[2\pi]).$$

Esercizio 9-3

Come è noto

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j (R[\pi] + R[2\pi]).$$

Essendo

$$R[\pi] = \left. \frac{e^{jz}}{D(z^2 - 3\pi z + 2\pi^2)} \right|_{z=\pi} = \frac{e^{j\pi}}{2\pi - 3\pi} = \frac{-1}{-\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Esercizio 9-3

Come è noto

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j (R[\pi] + R[2\pi]).$$

Essendo

$$R[\pi] = \left. \frac{e^{jz}}{D(z^2 - 3\pi z + 2\pi^2)} \right|_{z=\pi} = \frac{e^{j\pi}}{2\pi - 3\pi} = \frac{-1}{-\pi} = \frac{1}{\pi}$$

e analogamente

$$R[2\pi] = \frac{e^{2j\pi}}{4\pi - 3\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Esercizio 9-4

troviamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j \frac{2}{\pi} = 2j$$

Esercizio 9-4

troviamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j \frac{2}{\pi} = 2j$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx = \text{Im}(2j) = 2.$$

Esercizio 9-5

Notiamo che

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)^2 + \left(2 - \frac{9}{4}\right)\pi^2} = \frac{-j e^{j\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)}}{\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}},$$

Esercizio 9-5

Notiamo che

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)^2 + \left(2 - \frac{9}{4}\right)\pi^2} = \frac{-j e^{j\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)}}{\left(z - \frac{3}{2}\pi\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}},$$

quindi

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-j e^{jx}}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} dx \\ &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - j \cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} dx \end{aligned}$$

è chiaramente immaginario.

Esercizio 10-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{2x^2 + x} dx.$$

Esercizio 10-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{2x^2 + x} dx.$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando è continuo in \mathbb{R} (i punti 0 e $-1/2$ sono discontinuità eliminabili) ed è $O(1/x^2)$, quindi sommabile, intorno a $\mp\infty$.

Esercizio 10-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{2x^2 + x} dx.$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando è continuo in \mathbb{R} (i punti 0 e $-1/2$ sono discontinuità eliminabili) ed è $O(1/x^2)$, quindi sommabile, intorno a $\mp\infty$.

Scegliamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{j2\pi z}}{2z^2 + z},$$

Esercizio 10-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{2x^2 + x} dx.$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando è continuo in \mathbb{R} (i punti 0 e $-1/2$ sono discontinuità eliminabili) ed è $O(1/x^2)$, quindi sommabile, intorno a $\mp\infty$.

Scegliamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{j2\pi z}}{2z^2 + z},$$

in modo che, per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando sia il coefficiente dell'immaginario di $f(x)$.

Esercizio 10-2

Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè 0 e $-1/2$, che risultano poli semplici, entrambi reali.

Esercizio 10-2

Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè 0 e $-1/2$, che risultano poli semplici, entrambi reali.

L'integrale si calcola dunque mediante la formula

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{2x^2 + x} dx &= \text{Im} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \\ &= \text{Im} (\pi j R[0] + \pi j R[-1/2]) \\ &= \pi \text{Re} (R[0] + R[-1/2]).\end{aligned}$$

Esercizio 10-2

Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè 0 e $-1/2$, che risultano poli semplici, entrambi reali.

L'integrale si calcola dunque mediante la formula

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{2x^2 + x} dx &= \text{Im} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \\ &= \text{Im} (\pi j R[0] + \pi j R[-1/2]) \\ &= \pi \text{Re} (R[0] + R[-1/2]).\end{aligned}$$

(L'integrale di $f(x)$ va inteso nel senso del valor principale, per la presenza dei due poli reali.)

Esercizio 10-3

Inoltre

$$R[0] = \left. \frac{e^{j2\pi z}}{2z+1} \right|_{z=0} = 1, \quad R[-1/2] = \left. \frac{e^{j2\pi z}}{4z+1} \right|_{z=-1/2} = 1$$

e l'integrale cercato vale 2π .

Esercizio 11-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

Esercizio 11-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

L'integrando ha una discontinuità eliminabile in $-\pi/4$, è continuo in $\mathbb{R} - \{-\pi/4\}$ e per $x \rightarrow \pm\infty$ è $O(x^{-3})$; pertanto l'integrale converge assolutamente.

Esercizio 11-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

L'integrando ha una discontinuità eliminabile in $-\pi/4$, è continuo in $\mathbb{R} - \{-\pi/4\}$ e per $x \rightarrow \pm\infty$ è $O(x^{-3})$; pertanto l'integrale converge assolutamente.

Osserviamo pure che

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$$

Esercizio 11-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

L'integrando ha una discontinuità eliminabile in $-\pi/4$, è continuo in $\mathbb{R} - \{-\pi/4\}$ e per $x \rightarrow \pm\infty$ è $O(x^{-3})$; pertanto l'integrale converge assolutamente.

Osserviamo pure che

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$$

e quindi l'integrale cercato I è uguale a

$$I = \sqrt{2} \operatorname{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\pi/4} e^{jx}}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx \right].$$

Esercizio 11-2

Equivalentemente, troviamo $I = \operatorname{Re} I_1 + \operatorname{Im} I_1$, dove

$$I_1 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

Esercizio 11-2

Equivalentemente, troviamo $I = \operatorname{Re} I_1 + \operatorname{Im} I_1$, dove

$$I_1 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

Notiamo che l'integrale I_1 è inteso nel senso del valor principale, poiché per l'integrando il punto $-\pi/4$ è un infinito del primo ordine (non più discontinuità eliminabile).

Esercizio 11-2

Equivalentemente, troviamo $I = \operatorname{Re} I_1 + \operatorname{Im} I_1$, dove

$$I_1 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{(4x + \pi)(x^2 + \pi^2)} dx.$$

Notiamo che l'integrale I_1 è inteso nel senso del valor principale, poiché per l'integrando il punto $-\pi/4$ è un infinito del primo ordine (non più discontinuità eliminabile).

Per calcolare I_1 consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{(4z + \pi)(z^2 + \pi^2)}.$$

Esercizio 11-3

Essa ha poli semplici nei punti $-\frac{\pi}{4}$ e $\pm\pi j$, quindi

$$I_1 = 2\pi j R[\pi j] + \pi j R[-\frac{\pi}{4}].$$

Esercizio 11-3

Essa ha poli semplici nei punti $-\frac{\pi}{4}$ e $\pm\pi j$, quindi

$$I_1 = 2\pi j R[\pi j] + \pi j R[-\frac{\pi}{4}].$$

Essendo

$$R[\pi j] = \left. \frac{e^{jz}}{2z(4z + \pi)} \right|_{z=\pi j} = \frac{e^{-\pi}}{2\pi j(4\pi j + \pi)}, \quad R[-\frac{\pi}{4}] = \frac{2\sqrt{2}(1-j)}{17\pi^2},$$

Esercizio 11-3

Essa ha poli semplici nei punti $-\frac{\pi}{4}$ e $\pm\pi j$, quindi

$$I_1 = 2\pi j R[\pi j] + \pi j R[-\frac{\pi}{4}].$$

Essendo

$$R[\pi j] = \left. \frac{e^{jz}}{2z(4z + \pi)} \right|_{z=\pi j} = \frac{e^{-\pi}}{2\pi j(4\pi j + \pi)}, \quad R[-\frac{\pi}{4}] = \frac{2\sqrt{2}(1-j)}{17\pi^2},$$

abbiamo

$$I_1 = \frac{e^{-\pi}}{\pi(1+4j)} + j \frac{2\sqrt{2}(1-j)}{17\pi} = \frac{e^{-\pi}(1-4j)}{17\pi} + \frac{2\sqrt{2}(1+j)}{17\pi}$$

Esercizio 11-3

Essa ha poli semplici nei punti $-\frac{\pi}{4}$ e $\pm\pi j$, quindi

$$I_1 = 2\pi j R[\pi j] + \pi j R[-\frac{\pi}{4}].$$

Essendo

$$R[\pi j] = \left. \frac{e^{jz}}{2z(4z + \pi)} \right|_{z=\pi j} = \frac{e^{-\pi}}{2\pi j(4\pi j + \pi)}, \quad R[-\frac{\pi}{4}] = \frac{2\sqrt{2}(1-j)}{17\pi^2},$$

abbiamo

$$I_1 = \frac{e^{-\pi}}{\pi(1+4j)} + j \frac{2\sqrt{2}(1-j)}{17\pi} = \frac{e^{-\pi}(1-4j)}{17\pi} + \frac{2\sqrt{2}(1+j)}{17\pi}$$

e quindi l'integrale cercato è

$$I = \frac{2\sqrt{2} + e^{-\pi} + 2\sqrt{2} - 4e^{-\pi}}{17\pi} = \frac{4\sqrt{2} - 3e^{-\pi}}{17\pi}.$$

Esercizio 12-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

Esercizio 12-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

Con la sostituzione $z = e^{jx}$, l'integrale si trasforma in un integrale curvilineo esteso alla circonferenza unitaria $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$:

Esercizio 12-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

Con la sostituzione $z = e^{jx}$, l'integrale si trasforma in un integrale curvilineo esteso alla circonferenza unitaria $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{[5 + 2(z + 1/z)]^2} \frac{dz}{jz} = \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} dz.$$

Esercizio 12-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

Con la sostituzione $z = e^{jx}$, l'integrale si trasforma in un integrale curvilineo esteso alla circonferenza unitaria $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{[5 + 2(z + 1/z)]^2} \frac{dz}{jz} = \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} dz.$$

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri $-\frac{1}{2}$ e -2 del denominatore.

Esercizio 12-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

Con la sostituzione $z = e^{jx}$, l'integrale si trasforma in un integrale curvilineo esteso alla circonferenza unitaria $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{[5 + 2(z + 1/z)]^2} \frac{dz}{jz} = \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} dz.$$

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri $-\frac{1}{2}$ e -2 del denominatore.

Sono zeri doppi e quindi poli doppi dell'integrando.

Esercizio 12-2

Per definizione di residuo,

$$\frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} dz = 2\pi R \left[-\frac{1}{2} \right].$$

Esercizio 12-2

Per definizione di residuo,

$$\frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} dz = 2\pi R \left[-\frac{1}{2} \right].$$

Essendo $2z^2 + 5z + 2 = 2(z + \frac{1}{2})(z + 2)$, risulta

$$R \left[-\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} D \frac{z}{(z+2)^2} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{2-z}{(z+2)^3} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{5}{27}.$$

Esercizio 12-2

Per definizione di residuo,

$$\frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2} dz = 2\pi R \left[-\frac{1}{2} \right].$$

Essendo $2z^2 + 5z + 2 = 2(z + \frac{1}{2})(z + 2)$, risulta

$$R \left[-\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} D \frac{z}{(z+2)^2} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{2-z}{(z+2)^3} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{5}{27}.$$

Pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2} dx = \frac{10\pi}{27}.$$

Esercizio 13-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2} dx .$$

Esercizio 13-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2} dx .$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando ha una discontinuità eliminabile in 0 ed è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Esercizio 13-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2} dx .$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando ha una discontinuità eliminabile in 0 ed è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Per il calcolo, scriviamo il numeratore come polinomio trigonometrico.

Esercizio 13-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2} dx.$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando ha una discontinuità eliminabile in 0 ed è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Per il calcolo, scriviamo il numeratore come polinomio trigonometrico.

Per una formula di trigonometria, abbiamo

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x).$$

Esercizio 13-2

Possiamo “ricostruire” la formula di trigonometria mediante il formalismo dell’esponenziale, attraverso la formula di Eulero:

Esercizio 13-2

Possiamo “ricostruire” la formula di trigonometria mediante il formalismo dell’esponenziale, attraverso la formula di Eulero:

$$\begin{aligned}\sin x \sin 2x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \cdot \frac{e^{2jx} - e^{-2jx}}{2j} \\ &= -\frac{1}{4} (e^{3jx} - e^{-jx} - e^{jx} + e^{-3jx}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x).\end{aligned}$$

Esercizio 13-3

L'integrale cercato è pertanto la metà di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx .$$

Esercizio 13-3

L'integrale cercato è pertanto la metà di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx .$$

Scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz} - e^{3jz}}{z^2} ,$$

Esercizio 13-3

L'integrale cercato è pertanto la metà di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx.$$

Scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz} - e^{3jz}}{z^2},$$

in modo che, per $z = x \in \mathbb{R}$, risulti

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \operatorname{Re} f(x).$$

Esercizio 13-4

Ne segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right]. \quad (3)$$

Esercizio 13-4

Ne segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right]. \quad (3)$$

L'integrale di f è inteso nel senso del valor principale poiché 0 è polo semplice, essendo zero semplice del numeratore:

$$D(e^{jz} - e^{3jz})|_{z=0} = j e^{jz} - 3j e^{3jz}|_{z=0} = -2j \neq 0.$$

Esercizio 13-5

Risulta

$$R[0] = 2 \frac{D(e^{jz} - e^{3jz})}{D^2(z^2)} \Big|_{z=0} = 2 \frac{-2j}{2} = -2j,$$

Esercizio 13-5

Risulta

$$R[0] = 2 \frac{D(e^{jz} - e^{3jz})}{D^2(z^2)} \Big|_{z=0} = 2 \frac{-2j}{2} = -2j,$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\pi j(-2j)] = \pi.$$

Esercizio 13-5

Risulta

$$R[0] = 2 \frac{D(e^{jz} - e^{3jz})}{D^2(z^2)} \Big|_{z=0} = 2 \frac{-2j}{2} = -2j,$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\pi j(-2j)] = \pi.$$

Osserviamo che

$$\operatorname{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - \sin 3x}{x^2} dx$$

è banalmente nullo, perché l'integrando è dispari, in accordo col fatto che l'integrale di $f(x)$ è reale.

Esercizio 14-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Esercizio 14-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando ha una discontinuità eliminabile in 0 ed è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Esercizio 14-1

Mediante la teoria dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando ha una discontinuità eliminabile in 0 ed è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Per il calcolo, scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{1 - e^{jz}}{z^2}.$$

Esercizio 14-2

Per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è $\operatorname{Re} f(x)$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Esercizio 14-2

Per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è $\operatorname{Re} f(x)$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Il polo semplice 0 è l'unica singolarità (al finito) di f , quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j R[0] = \pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{jz}}{z} = \pi j (-j) = \pi. \quad (4)$$

Esercizio 14-2

Per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è $\operatorname{Re} f(x)$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Il polo semplice 0 è l'unica singolarità (al finito) di f , quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi j R[0] = \pi j \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{jz}}{z} = \pi j (-j) = \pi. \quad (4)$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi. \quad (5)$$

Esercizio 14-3

Osserviamo che

$$\operatorname{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin x}{x^2} dx$$

è banalmente nullo, in accordo col fatto che l'integrale di $f(x)$ è reale.

Esercizio 14-3

Osserviamo che

$$\operatorname{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin x}{x^2} dx$$

è banalmente nullo, in accordo col fatto che l'integrale di $f(x)$ è reale.

Mediante cambiamento di variabile, da (5) otteniamo per $\omega > 0$

$$I(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega x}{x^2} dx = \omega \pi.$$

Esercizio 14-3

Osserviamo che

$$\operatorname{Im} \left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\sin x}{x^2} dx$$

è banalmente nullo, in accordo col fatto che l'integrale di $f(x)$ è reale.

Mediante cambiamento di variabile, da (5) otteniamo per $\omega > 0$

$$I(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega x}{x^2} dx = \omega \pi .$$

L'integrale in (3) dell'esercizio precedente è

$$I(3) - I(1) = 3\pi - \pi = 2\pi .$$

Esercizio 15-1

Calcolare la trasformata di Fourier

$$X(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{1 - \cos t}{t^2} \right].$$

Esercizio 15-1

Calcolare la trasformata di Fourier

$$X(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{1 - \cos t}{t^2} \right].$$

Procedendo in base alla definizione, si tratta di calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-j\omega t} dt,$$

per $\omega \in \mathbb{R}$.

Esercizio 15-2

Riscriviamo l'integrando esprimendo $\cos t$ mediante la formula di Eulero

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-j\omega t} &= \frac{e^{-j\omega t} - \frac{e^{j(1-\omega)t} + e^{-j(1+\omega)t}}{2}}{t^2} \\ &= -\frac{1 - e^{-j\omega t}}{t^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j(1-\omega)t}}{t^2} + \frac{1 - e^{-j(1+\omega)t}}{t^2} \right].\end{aligned}\tag{6}$$

Esercizio 15-2

Riscriviamo l'integrando esprimendo $\cos t$ mediante la formula di Eulero

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-j\omega t} &= \frac{e^{-j\omega t} - \frac{e^{j(1-\omega)t} + e^{-j(1+\omega)t}}{2}}{t^2} \\ &= -\frac{1 - e^{-j\omega t}}{t^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j(1-\omega)t}}{t^2} + \frac{1 - e^{-j(1+\omega)t}}{t^2} \right].\end{aligned}\tag{6}$$

Posto, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$J(\alpha) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{j\alpha t}}{t^2} dt,$$

Esercizio 15-2

Riscriviamo l'integrando esprimendo $\cos t$ mediante la formula di Eulero

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-j\omega t} &= \frac{e^{-j\omega t} - \frac{e^{j(1-\omega)t} + e^{-j(1+\omega)t}}{2}}{t^2} \\ &= -\frac{1 - e^{-j\omega t}}{t^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j(1-\omega)t}}{t^2} + \frac{1 - e^{-j(1+\omega)t}}{t^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Posto, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$J(\alpha) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{j\alpha t}}{t^2} dt,$$

risulta

$$X(\omega) = -J(-\omega) + \frac{1}{2} J(1 - \omega) + \frac{1}{2} J(-(1 + \omega)).$$

Esercizio 15-3

Calcoliamo $J(\alpha)$. Banalmente $J(0) = 0$.

Esercizio 15-3

Calcoliamo $J(\alpha)$. Banalmente $J(0) = 0$.

In (4) è stato calcolato $J(1)$.

Esercizio 15-3

Calcoliamo $J(\alpha)$. Banalmente $J(0) = 0$.

In (4) è stato calcolato $J(1)$. Mediante il cambiamento di variabile $\tau = \alpha t$, troviamo

$$J(\alpha) = \pi |\alpha|.$$

Esercizio 15-3

Calcoliamo $J(\alpha)$. Banalmente $J(0) = 0$.

In (4) è stato calcolato $J(1)$. Mediante il cambiamento di variabile $\tau = \alpha t$, troviamo

$$J(\alpha) = \pi |\alpha|.$$

Osserviamo che l'integrale che definisce $J(\alpha)$ si calcola mediante la teoria dei residui, scegliendo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{1 - e^{j\alpha z}}{z^2}$$

e distinguendo in base al segno di α :

$$J(\alpha) = \begin{cases} j\pi R[0; f], & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -j\pi R[0; f], & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 15-4

e

$$R[0; f] = -j\alpha.$$

Esercizio 15-4

e

$$R[0; f] = -j\alpha.$$

In definitiva,

$$X(\omega) = \pi \left(-|\omega| + \frac{|1 - \omega| + |1 + \omega|}{2} \right).$$

Esercizio 15-4

e

$$R[0; f] = -j\alpha.$$

In definitiva,

$$X(\omega) = \pi \left(-|\omega| + \frac{|1-\omega| + |1+\omega|}{2} \right).$$

Notiamo che

$$-|\omega| + \frac{|1-\omega| + |1+\omega|}{2} = \begin{cases} \omega + \frac{1-\omega-1-\omega}{2} = 0, & \text{se } \omega < -1 \\ \omega + \frac{1-\omega+1+\omega}{2} = 1+\omega, & \text{se } -1 < \omega < 0 \\ -\omega + \frac{1-\omega+1+\omega}{2} = 1-\omega, & \text{se } 0 < \omega < 1 \\ -\omega + \frac{-1+\omega+1+\omega}{2} = 0, & \text{se } 1 < \omega \end{cases}$$

Esercizio 15-4

e

$$R[0; f] = -j\alpha.$$

In definitiva,

$$X(\omega) = \pi \left(-|\omega| + \frac{|1-\omega| + |1+\omega|}{2} \right).$$

Notiamo che

$$-|\omega| + \frac{|1-\omega| + |1+\omega|}{2} = \begin{cases} \omega + \frac{1-\omega-1-\omega}{2} = 0, & \text{se } \omega < -1 \\ \omega + \frac{1-\omega+1+\omega}{2} = 1+\omega, & \text{se } -1 < \omega < 0 \\ -\omega + \frac{1-\omega+1+\omega}{2} = 1-\omega, & \text{se } 0 < \omega < 1 \\ -\omega + \frac{-1+\omega+1+\omega}{2} = 0, & \text{se } 1 < \omega \end{cases}$$

Pertanto

$$X = \pi \Lambda. \quad (7)$$

Esercizio 15-5

La (7) si può ottenere più facilmente.

Esercizio 15-5

La (7) si può ottenere più facilmente.

Osserviamo che

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 .$$

Esercizio 15-5

La (7) si può ottenere più facilmente.

Osserviamo che

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2.$$

Ricordando che

$$\left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 = \mathcal{F}[\Lambda(\omega)],$$

Esercizio 15-5

La (7) si può ottenere più facilmente.

Osserviamo che

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2.$$

Ricordando che

$$\left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^2 = \mathcal{F}[\Lambda(\omega)],$$

applicando nuovamente la trasformazione, otteniamo

$$\mathcal{F} \left[\frac{1 - \cos t}{t^2} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{F} \left[\mathcal{F}[\Lambda(\omega)] \right] = \pi \Lambda(\omega).$$