Il campo complesso

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Anno Accademico 2022/2023

Il campo complesso

- Forma algebrica
- Rappresentazione geometrica
- Forma trigonometrica
- Radici
- Le funzioni elementari nel campo complesso
- Ampliamento del campo complesso. Elementi di topologia

Campo complesso, ampliamento del campo reale

$(\mathbb{R}, +, *, >)$ campo ordinato.

Campo complesso, ampliamento del campo reale

$(\mathbb{R}, +, *, >)$ campo ordinato.

L'esigenza di introdurre un ampliamento del campo dei numeri reali nasce dall'impossibilità di risolvere in esso l'equazione

$$x^2 = a$$

nell'incognita x, per $a \in \mathbb{R}$ generico numero assegnato.

Campo complesso, ampliamento del campo reale

$(\mathbb{R}, +, *, >)$ campo ordinato.

L'esigenza di introdurre un ampliamento del campo dei numeri reali nasce dall'impossibilità di risolvere in esso l'equazione

$$x^2 = a$$

nell'incognita x, per $a \in \mathbb{R}$ generico numero assegnato.
È chiaro infatti che, se $a < 0$, non esiste alcuna soluzione, poiché ovviamente risulta $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Campo complesso, ampliamento del campo reale

$(\mathbb{R}, +, *, >)$ campo ordinato.

L'esigenza di introdurre un ampliamento del campo dei numeri reali nasce dall'impossibilità di risolvere in esso l'equazione

$$x^2 = a$$

nell'incognita x, per $a \in \mathbb{R}$ generico numero assegnato.
È chiaro infatti che, se $a < 0$, non esiste alcuna soluzione, poiché ovviamente risulta $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Più in generale, nel campo reale un'equazione algebrica

$$P(x) = 0$$

con P polinomio, può essere priva di soluzioni.

Campo complesso

Il campo dei numeri complessi si costruisce sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, introducendo le operazioni di addizione e moltiplicazione:

$$\begin{gathered}
(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \\
(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.
\end{gathered} \tag{1}$$

Campo complesso

Il campo dei numeri complessi si costruisce sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, introducendo le operazioni di addizione e moltiplicazione:

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Con tali operazioni, $\mathbb{R}^2$ diviene un campo, che diremo *campo complesso* ed indicheremo con $\mathbb{C}$.

Campo complesso

Il campo dei numeri complessi si costruisce sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, introducendo le operazioni di addizione e moltiplicazione:

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Con tali operazioni, $\mathbb{R}^2$ diviene un campo, che diremo *campo complesso* ed indicheremo con $\mathbb{C}$.

(Proprietà di campo: $+$ e $\cdot$ associative e commutative, proprietà distributiva, zero, opposto, unità, reciproco di ogni elemento non zero; alla base dell'aritmetica elementare.)

Campo complesso

Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathscr{R} = \{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Campo complesso

Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathscr{R} = \{(x, 0) \, : \, x \in \mathbb{R}\} \, .$$

Evidentemente, esso è chiuso rispetto alle due operazioni, cioè la somma ed il prodotto di elementi di $\mathscr{R}$ appartengono a $\mathscr{R}$; il sottoinsieme risulta un sottocampo di $\mathbb{C}$ (cioè le operazioni (1), ristrette a $\mathscr{R}$, lo rendono un campo).

Campo complesso

Dal punto di vista insiemistico, è naturale identificare $\mathscr{R}$ con $\mathbb{R}$, facendo corrispondere al generico elemento $(x, 0) \in \mathscr{R}$ la sua prima componente $x \in \mathbb{R}$.

Campo complesso

Dal punto di vista insiemistico, è naturale identificare $\mathscr{R}$ con $\mathbb{R}$, facendo corrispondere al generico elemento $(x, 0) \in \mathscr{R}$ la sua prima componente $x \in \mathbb{R}$.

Chiaramente però tale identificazione fa corrispondere le strutture di campo su $\mathscr{R}$ e su $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccc} (x_1, 0) & \color{red}{+} & (x_2, 0) & = & (x_1 + x_2, 0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ x_1 & + & x_2 & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

dove $\color{red}{+}$ denota l'addizione in $\mathscr{R}$ (cioè in $\mathbb{C}$), e analogamente per la moltiplicazione; si dice che i due campi $\mathscr{R}$ e $\mathbb{R}$ sono isomorfi. Così il campo reale risulta un sottocampo del campo complesso, ovvero quest'ultimo è un ampliamento del primo.

Campo complesso

È naturale considerare anche l'altro sottoinsieme

$$\mathcal{I} = \{(0, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\} \,, \tag{2}$$

ma esso non è chiuso, in quanto ad esempio risulta

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \notin \mathcal{I} \,. \tag{3}$$

Gli elementi di $\mathcal{I}$ si dicono numeri (complessi) *immaginari*.
L'elemento $(0,1)$ è di fondamentale importanza; si dice *unità immaginaria* e si denota con j (spesso anche con i):

$$j = (0,1)\,.$$

Campo complesso

Gli elementi di $\mathcal{I}$ si dicono numeri (complessi) *immaginari*. L'elemento $(0,1)$ è di fondamentale importanza; si dice *unità immaginaria* e si denota con j (spesso anche con i):

$$j = (0,1)\,.$$

Con queste notazioni, l'uguaglianza (3) si riscrive

$$j^2 = -1\,.$$

Campo complesso

Gli elementi di $\mathcal{I}$ si dicono numeri (complessi) *immaginari*.
L'elemento $(0, 1)$ è di fondamentale importanza; si dice *unità immaginaria* e si denota con j (spesso anche con i):

$$j = (0, 1)\,.$$

Con queste notazioni, l'uguaglianza (3) si riscrive

$$j^2 = -1\,.$$

Dunque $\mathcal{I}$ non è un sottocampo.

Forma algebrica

Osserviamo che ogni numero complesso $z = (x, y)$ si può rappresentare come segue:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \tag{4}$$

ovvero (con l'identificazione tra $\mathscr{R}$ e $\mathbb{R}$),

$$z = x + j\, y\,.$$

Forma algebrica

Osserviamo che ogni numero complesso $z = (x, y)$ si può rappresentare come segue:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \tag{4}$$

ovvero (con l'identificazione tra $\mathscr{R}$ e $\mathbb{R}$),

$$z = x + j\,y\,.$$

Questa espressione si chiama *forma algebrica* del numero complesso $z = (x, y)$.

Forma algebrica

Osserviamo che ogni numero complesso $z = (x, y)$ si può rappresentare come segue:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \qquad (4)$$

ovvero (con l'identificazione tra $\mathscr{R}$ e $\mathbb{R}$),

$$z = x + j\,y\,.$$

Questa espressione si chiama *forma algebrica* del numero complesso $z = (x, y)$.
I numeri reali x e y si dicono rispettivamente *parte reale* e *coefficiente dell'immaginario* del numero complesso z e si denotano con

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{e} \quad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Forma algebrica

L'utilità della forma algebrica è nel fatto che sui numeri complessi in forma algebrica si opera, invece che usando direttamente le definizioni (1), mediante le usuali regole dell'aritmetica elementare, ricordando che $j^2 = -1$ e le relazioni che ne seguono:

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j\,,\ j^4 = (j^2)^2 = 1\,,\ j^5 = j^4 \cdot j = j\,,\ j^6 = j^2 = -1\,,\ldots$$

e analogamente

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = -j\,,\ j^{-2} = -1\,,\ j^{-3} = j\,,\ldots$$

In generale, se m e n sono numeri interi con $m - n$ divisibile per 4, risulta $j^m = j^n$.

Forma algebrica

Ad esempio,

$$
\begin{aligned}
(3+4\,j)\cdot(1-j)+(5+2\,j) &= (3-3\,j+4\,j-4\,j^2)+(5+2\,j) \\
&= (3+j+4)+(5+2\,j) = 3+j+4+5+2\,j = 12+3\,j\,.
\end{aligned}
$$

Forma algebrica

Ad esempio,

$$(3+4\,j)\cdot(1-j)+(5+2\,j)=(3-3\,j+4\,j-4\,j^2)+(5+2\,j)$$
$$=(3+j+4)+(5+2\,j)=3+j+4+5+2\,j=12+3\,j\,.$$

Vediamo qualche altro esempio di operazioni sui numeri complessi in forma algebrica. Dato $z=x+j\,y$, il numero

$$\bar{z}=x-j\,y$$

si chiama *coniugato* di z (un'altra notazione usata per il coniugato è z^*).

Forma algebrica

Ad esempio,

$$
\begin{gathered}
(3+4\,j)\cdot(1-j)+(5+2\,j)=(3-3\,j+4\,j-4\,j^2)+(5+2\,j)\\
=(3+j+4)+(5+2\,j)=3+j+4+5+2\,j=12+3\,j\,.
\end{gathered}
$$

Vediamo qualche altro esempio di operazioni sui numeri complessi in forma algebrica. Dato $z = x + j\,y$, il numero

$$\bar{z} = x - j\,y$$

si chiama *coniugato* di z (un'altra notazione usata per il coniugato è z^*).

Calcoliamo l'espressione

$$z\,\bar{z} = (x + j\,y)\,(x - j\,y)\,.$$

Forma algebrica

Usando il ben noto prodotto notevole dell'aritmetica elementare (somma per differenza), scriviamo subito

$$z\,\bar{z} = (x + j\,y)\,(x - j\,y) = x^2 - (j\,y)^2 = x^2 - j^2\,y^2 = x^2 + y^2\,.$$

Forma algebrica

Usando il ben noto prodotto notevole dell'aritmetica elementare (somma per differenza), scriviamo subito

$$z\,\bar{z} = (x + j\,y)\,(x - j\,y) = x^2 - (j\,y)^2 = x^2 - j^2\,y^2 = x^2 + y^2\,.$$

Il numero reale non-negativo

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

si dice *modulo* di z e si indica con $|z|$. Dunque

$$z\,\bar{z} = |z|^2\,.$$

Forma algebrica

Osserviamo che $|z| \geq 0$ e

$$|z| = 0 \iff z = 0\,.$$

Forma algebrica

Osserviamo che $|z| \geq 0$ e

$$|z| = 0 \iff z = 0\,.$$

Inoltre

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z\,, \qquad z - \bar{z} = 2\,j\,\mathrm{Im}\,z\,.$$

Forma algebrica

Osserviamo che $|z| \geq 0$ e

$$|z| = 0 \iff z = 0 \,.$$

Inoltre

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z\,, \qquad z - \bar{z} = 2j\,\mathrm{Im}\, z\,.$$

Osservazione

La notazione per il modulo di un numero complesso è identica a quella usata per il valore assoluto di un numero reale. In effetti, se $z = x$ è un numero complesso reale, il suo modulo coincide con il valore assoluto.

Forma algebrica

Scriviamo il reciproco di $z = x + j\,y \neq 0$ in forma algebrica:

Forma algebrica

Scriviamo il reciproco di $z = x + j\,y \neq 0$ in forma algebrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - j\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\,\frac{y}{x^2 + y^2}\,,$$

Forma algebrica

Scriviamo il reciproco di $z = x + j\,y \neq 0$ in forma algebrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - j\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\,\frac{y}{x^2 + y^2}\,,$$

cioè

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \qquad \mathrm{Im}\,\frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,.$$

Notiamo che per l'ipotesi $z \neq 0$, risulta $x^2 + y^2 > 0$.

Forma algebrica

Vediamo un altro esempio.

Forma algebrica

Vediamo un altro esempio.

Calcoliamo

$$\sum_{k=1}^{365} j^k \, .$$

Forma algebrica

Vediamo un altro esempio.

Calcoliamo

$$\sum_{k=1}^{365} j^k \, .$$

A tale scopo, ricordiamo che le potenze consecutive dell'unità immaginaria sono

$$j\,,\ -1\,,\ -j\,,\ 1\,,\ j\,,\ -1\,,\ -j\,,\ 1\,,\ldots$$

Forma algebrica

Notando che

$$j - 1 - j + 1 = 0\,,$$

conviene associare i termini della sommatoria a gruppi di quattro consecutivi.

Forma algebrica

Notando che

$$j - 1 - j + 1 = 0\,,$$

conviene associare i termini della sommatoria a gruppi di quattro consecutivi.

Poiché 365 non è divisibile per 4, rimarranno alcuni termini che non completano uno di questi gruppi.

Forma algebrica

Notando che

$$j - 1 - j + 1 = 0\,,$$

conviene associare i termini della sommatoria a gruppi di quattro consecutivi.

Poiché 365 non è divisibile per 4, rimarranno alcuni termini che non completano uno di questi gruppi.

Precisamente, essendo $365 = 364 + 1$ ed essendo 364 divisibile per 4, risulta

$$\sum_{k=1}^{365} j^k = \sum_{k=1}^{364} j^k + j^{365} = 0 + j = j\,.$$

Forma algebrica

È facile verificare che il coniugato della somma è la somma dei coniugati: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; analogamente per prodotto e rapporto.

Forma algebrica

È facile verificare che il coniugato della somma è la somma dei coniugati: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; analogamente per prodotto e rapporto.

Ne segue che, se $\mathscr{R}(z_1, \dots, z_n)$ è una funzione razionale dei suoi argomenti (cioè un'espressione che si calcola a partire dai numeri $z_1, \dots, z_n$ mediante le quattro operazioni razionali), risulta

$$\mathscr{R}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \overline{\mathscr{R}(z_1, \dots, z_n)}\,.$$

Forma algebrica

È facile verificare che il coniugato della somma è la somma dei coniugati: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; analogamente per prodotto e rapporto.

Ne segue che, se $\mathscr{R}(z_1, \ldots, z_n)$ è una funzione razionale dei suoi argomenti (cioè un'espressione che si calcola a partire dai numeri $z_1, \ldots, z_n$ mediante le quattro operazioni razionali), risulta

$$\mathscr{R}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) = \overline{\mathscr{R}(z_1, \ldots, z_n)}\,.$$

Se $P(z) = a_0 + a_1\,z + a_2\,z^2 + \cdots + a_n\,z^n$ è un polinomio, chiaramente risulta $P(z) = \mathscr{R}(z, a_0, a_1, \ldots, a_n)$. In particolare, se i coefficienti di P sono reali, abbiamo

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}\,.$$

Forma algebrica

È facile verificare che il coniugato della somma è la somma dei coniugati: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; analogamente per prodotto e rapporto.

Ne segue che, se $\mathscr{R}(z_1, \ldots, z_n)$ è una funzione razionale dei suoi argomenti (cioè un'espressione che si calcola a partire dai numeri $z_1, \ldots, z_n$ mediante le quattro operazioni razionali), risulta

$$\mathscr{R}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) = \overline{\mathscr{R}(z_1, \ldots, z_n)}\,.$$

Se $P(z) = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + \cdots + a_n\, z^n$ è un polinomio, chiaramente risulta $P(z) = \mathscr{R}(z, a_0, a_1, \ldots, a_n)$. In particolare, se i coefficienti di P sono reali, abbiamo

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}\,.$$

Si dice che P è *hermitiano*.

Rappresentazione geometrica

Una rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi si ottiene mediante quella ben nota di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sul piano, che si ottiene facendo corrispondere alla coppia (x, y) il punto P che la ammette come coppia di coordinate.

Rappresentazione geometrica

Una rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi si ottiene mediante quella ben nota di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sul piano, che si ottiene facendo corrispondere alla coppia (x, y) il punto P che la ammette come coppia di coordinate.

Il punto $P(x, y)$ si dice *immagine* del numero complesso $z = x + j\,y$.

Rappresentazione geometrica

Una rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi si ottiene mediante quella ben nota di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sul piano, che si ottiene facendo corrispondere alla coppia (x, y) il punto P che la ammette come coppia di coordinate.

Il punto $P(x, y)$ si dice *immagine* del numero complesso $z = x + j\,y$.

Dunque, l'origine è l'immagine di 0;

Rappresentazione geometrica

Una rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi si ottiene mediante quella ben nota di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sul piano, che si ottiene facendo corrispondere alla coppia (x, y) il punto P che la ammette come coppia di coordinate.

Il punto $P(x, y)$ si dice *immagine* del numero complesso $z = x + j\,y$.

Dunque, l'origine è l'immagine di 0;

i numeri reali hanno per immagini i punti dell'asse delle ascisse, che per tal motivo si dice *asse reale*;

Rappresentazione geometrica

Una rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi si ottiene mediante quella ben nota di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sul piano, che si ottiene facendo corrispondere alla coppia (x, y) il punto P che la ammette come coppia di coordinate.

Il punto $P(x, y)$ si dice *immagine* del numero complesso $z = x + j\,y$.

Dunque, l'origine è l'immagine di 0;

i numeri reali hanno per immagini i punti dell'asse delle ascisse, che per tal motivo si dice *asse reale*;

i numeri immaginari hanno per immagini i punti dell'asse delle ordinate, che si dice *asse immaginario*.

Rappresentazione geometrica

Le immagini di z e $\bar{z}$ sono simmetriche rispetto all'asse reale.

Rappresentazione geometrica

Le immagini di z e $\bar{z}$ sono simmetriche rispetto all'asse reale.

Nel seguito, identificheremo sistematicamente i numeri complessi con le loro immagini sul piano; questo, com'è noto, permette di adottare la terminologia geometrica a proposito di numeri e sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

Rappresentazione geometrica

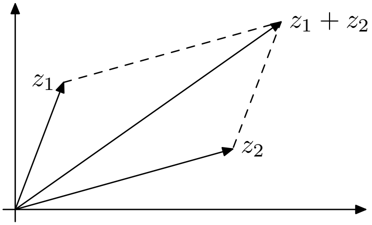
Le immagini di z e $\bar{z}$ sono simmetriche rispetto all'asse reale.

Nel seguito, identificheremo sistematicamente i numeri complessi con le loro immagini sul piano; questo, com'è noto, permette di adottare la terminologia geometrica a proposito di numeri e sottoinsiemi di $\mathbb{C}$.

Ad esempio, chiameremo un numero $z \in \mathbb{C}$ *punto* complesso. O, anche, faremo riferimento a $|z|$ come distanza di z dall'origine.

Rappresentazione geometrica

In maniera equivalente, possiamo rappresentare i numeri complessi come segmenti orientati, di primo estremo l'origine. In questo modo, possiamo illustrare geometricamente la somma di due numeri complessi ricordando la costruzione geometrica della somma di due vettori del piano.



Rappresentazione geometrica

Così otteniamo la doppia disuguaglianza

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{5}$$

Rappresentazione geometrica

Così otteniamo la doppia disuguaglianza

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{5}$$

Il contenuto geometrico della (5) è evidente.

Rappresentazione geometrica

Così otteniamo la doppia disuguaglianza

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{5}$$

Il contenuto geometrico della (5) è evidente.

La prima disuguaglianza esprime la proprietà che in un triangolo il valore assoluto della differenza tra le lunghezze di due lati non supera la lunghezza del terzo lato.

Rappresentazione geometrica

Così otteniamo la doppia disuguaglianza

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{5}$$

Il contenuto geometrico della (5) è evidente.

La prima disuguaglianza esprime la proprietà che in un triangolo il valore assoluto della differenza tra le lunghezze di due lati non supera la lunghezza del terzo lato.

La seconda disuguaglianza corrisponde al fatto che in un triangolo la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due.

Rappresentazione geometrica

Così otteniamo la doppia disuguaglianza

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \tag{5}$$

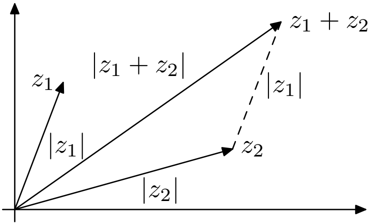
Il contenuto geometrico della (5) è evidente.

La prima disuguaglianza esprime la proprietà che in un triangolo il valore assoluto della differenza tra le lunghezze di due lati non supera la lunghezza del terzo lato.

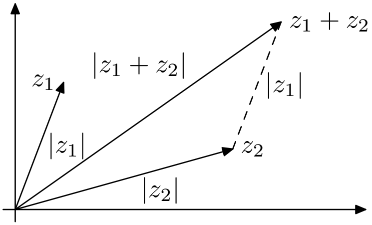
La seconda disuguaglianza corrisponde al fatto che in un triangolo la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due.

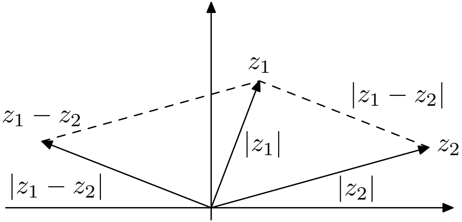
Per questi motivi, la (5) è detta *disuguaglianza triangolare*.

Rappresentazione geometrica



Rappresentazione geometrica





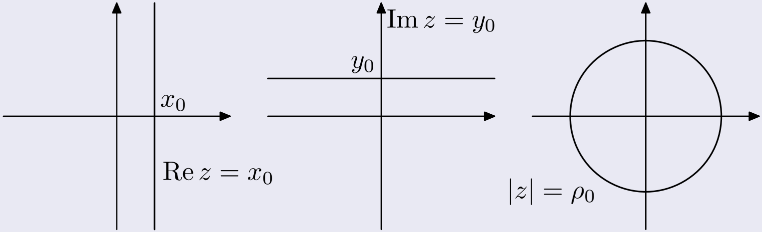
Rappresentazione geometrica

Esempio

Fissati x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, le equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ rappresentano rispettivamente una retta verticale e una orizzontale. Fissato $\rho_0 > 0$, l'equazione $|z| = \rho_0$ rappresenta una circonferenza di centro 0.

Esempio

Fissati x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, le equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ rappresentano rispettivamente una retta verticale e una orizzontale. Fissato $\rho_0 > 0$, l'equazione $|z| = \rho_0$ rappresenta una circonferenza di centro 0.



Forma trigonometrica

Nel piano, consideriamo l'usuale sistema di *coordinate polari* avente polo nell'origine O e semiasse polare coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

Forma trigonometrica

Nel piano, consideriamo l'usuale sistema di *coordinate polari* avente polo nell'origine O e semiasse polare coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

Le formule che legano le coordiante cartesiane a quelle polari sono

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \tag{6}$$

Forma trigonometrica

Da queste otteniamo

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \,,$$

quindi

$$\rho = 0 \iff x = y = 0 \,.$$

In tal caso ϑ è indeterminato, nel senso che le uguaglianze (6) valgono $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, e il punto $P(x, y)$ coincide con l'origine.

Forma trigonometrica

Se invece P è distinto dall'origine, è $\rho > 0$, e da (6) ricaviamo

$$\begin{cases} \cos\vartheta = x/\rho \\ \sin\vartheta = y/\rho \end{cases}$$

e queste uguaglianze individuano ϑ a meno di un multiplo di $2\,\pi$, cioè

$$\vartheta = \tilde{\vartheta} + 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{7}$$

essendo $\tilde{\vartheta}$ una soluzione particolare.

Forma trigonometrica

Se invece P è distinto dall'origine, è $\rho > 0$, e da (6) ricaviamo

$$\begin{cases} \cos\vartheta = x/\rho \\ \sin\vartheta = y/\rho \end{cases}$$

e queste uguaglianze individuano ϑ a meno di un multiplo di $2\,\pi$, cioè

$$\vartheta = \tilde{\vartheta} + 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{7}$$

essendo $\tilde{\vartheta}$ una soluzione particolare.

Ricordiamo che ρ e l'insieme dei valori di ϑ indicati in (7) si dicono rispettivamente *raggio vettore* e *anomalia* di P; i singoli valori di ϑ, che si ottengono fissando $k \in \mathbb{Z}$ nella (7), si dicono *determinazioni* dell'anomalia.

Forma trigonometrica

Sia $z = x + j\,y$ un numero complesso. Usando le (6), possiamo scrivere

$$z = x + j\,y = \rho\,(\cos\vartheta + j\,\sin\vartheta)\,. \tag{8}$$

Questa si chiama *forma trigonometrica* di z.

Forma trigonometrica

Sia $z = x + j\,y$ un numero complesso. Usando le (6), possiamo scrivere

$$z = x + j\,y = \rho\,(\cos\vartheta + j\,\sin\vartheta)\,. \tag{8}$$

Questa si chiama *forma trigonometrica* di z.

Evidentemente

$$\rho = |z|$$

è il modulo di z. In riferimento a z, ϑ si dice argomento di z e si denota con

$$\arg z\,.$$

Forma trigonometrica

Com'è noto, 0 è l'unico numero di modulo nullo.

Forma trigonometrica

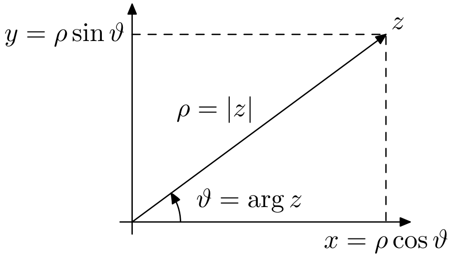
Com'è noto, 0 è l'unico numero di modulo nullo.

Se $z \neq 0$, l'argomento è un insieme di valori che a due a due differiscono per un multiplo di 2π e si chiamano *determinazioni dell'argomento*. (Con leggero abuso di notazione, $\arg z$ indica pure una qualsiasi determinazione.)

Forma trigonometrica

Com'è noto, 0 è l'unico numero di modulo nullo.

Se $z \neq 0$, l'argomento è un insieme di valori che a due a due differiscono per un multiplo di 2π e si chiamano *determinazioni dell'argomento*. (Con leggero abuso di notazione, $\arg z$ indica pure una qualsiasi determinazione.)



Forma trigonometrica

Per indicare che ρ e ϑ sono modulo e argomento di z, a volte scriveremo sinteticamente

$$z = [\rho\,,\,\vartheta]\,.$$

Forma trigonometrica

Per indicare che ρ e ϑ sono modulo e argomento di z, a volte scriveremo sinteticamente

$$z = [\rho\,,\,\vartheta]\,.$$

La determinazione dell'argomento che cade in $]-\pi, \pi]$ si dice *argomento principale* (o determinazione principale dell'argomento) di z e si indica con

$$\operatorname{Arg} z\,.$$

Forma trigonometrica

La corrispondenza

$$z \to \arg z$$

fornisce un esempio di *funzione polidroma*, in quanto ad ogni numero complesso è associato un insieme (non unitario) di valori.

Forma trigonometrica

La corrispondenza

$$z \to \arg z$$

fornisce un esempio di *funzione polidroma*, in quanto ad ogni numero complesso è associato un insieme (non unitario) di valori.

Viceversa, la corrispondenza

$$z \in \mathbb{C} - \{0\} \to \operatorname{Arg} z$$

definisce una funzione *monodroma*, cioè una funzione in senso usuale.

Forma trigonometrica

Le (6) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1\,,\;\frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\sin\frac{\pi}{2} = j\,.$$

Forma trigonometrica

Le (6) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1\,,\ \frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\sin\frac{\pi}{2} = j\,.$$

Effettuiamo l'operazione inversa per $z \neq 0$.

Forma trigonometrica

Le (6) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1\,,\ \frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\sin\frac{\pi}{2} = j\,.$$

Effettuiamo l'operazione inversa per $z \neq 0$.

Se $z = x$ è reale positivo, risulta $\rho = x$ e (una determinazione di) $\vartheta = 0$;

Forma trigonometrica

Le (6) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1\,,\,\frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\sin\frac{\pi}{2} = j\,.$$

Effettuiamo l'operazione inversa per $z \neq 0$.

Se $z = x$ è reale positivo, risulta $\rho = x$ e (una determinazione di) $\vartheta = 0$;

se $z = x < 0$, è $\rho = -x$ e $\vartheta = \pi$.

Forma trigonometrica

Le (6) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1\,,\ \frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\sin\frac{\pi}{2} = j\,.$$

Effettuiamo l'operazione inversa per $z \neq 0$.

Se $z = x$ è reale positivo, risulta $\rho = x$ e (una determinazione di) $\vartheta = 0$;

se $z = x < 0$, è $\rho = -x$ e $\vartheta = \pi$.

Se $z = j\,y$ è immaginario con $y > 0$, è $\rho = y$ e $\vartheta = \pi/2$;

Forma trigonometrica

Le (6) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1\,,\,\frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + j\,\sin\frac{\pi}{2} = j\,.$$

Effettuiamo l'operazione inversa per $z \neq 0$.

Se $z = x$ è reale positivo, risulta $\rho = x$ e (una determinazione di) $\vartheta = 0$;

se $z = x < 0$, è $\rho = -x$ e $\vartheta = \pi$.

Se $z = j\,y$ è immaginario con $y > 0$, è $\rho = y$ e $\vartheta = \pi/2$;

se $z = j\,y$ con $y < 0$, è $\rho = -y$ e $\vartheta = -\pi/2$.

Forma trigonometrica

Esclusi questi casi, risulta $\cos\vartheta \neq 0$ e quindi da (6) ricaviamo

$$\tan\vartheta = \frac{y}{x}\,, \tag{9}$$

Forma trigonometrica

Esclusi questi casi, risulta $\cos\vartheta \neq 0$ e quindi da (6) ricaviamo

$$\tan\vartheta = \frac{y}{x}\,, \tag{9}$$

da cui

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}\,, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x} + \pi\,, & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Forma trigonometrica

Esclusi questi casi, risulta $\cos\vartheta \neq 0$ e quindi da (6) ricaviamo

$$\tan\vartheta = \frac{y}{x}\,, \tag{9}$$

da cui

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}\,, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x} + \pi\,, & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Notiamo che (9) è meno precisa di (6), in quanto non distingue tra $z = x + jy$ e $-z = -x - jy$:

$$\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}\,.$$

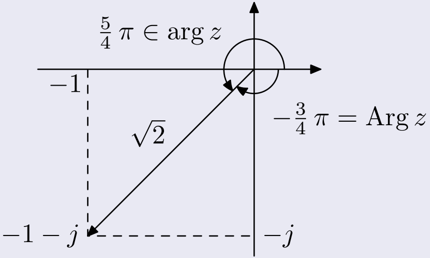
Forma trigonometrica

Esempio

Volendo scrivere in forma trigonometrica $-1-j$, troviamo $\rho = \sqrt{2}$ ed usando (10) $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$. Osserviamo che $-1-j$ cade nel terzo quadrante, quindi ha una determinazione dell'argomento verificante $\pi < \vartheta < \frac{3}{2}\pi$ (in effetti il punto è sulla bisettrice del quadrante). L'argomento principale è $\operatorname{Arg} z = \frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$.

Esempio

Volendo scrivere in forma trigonometrica $-1-j$, troviamo $\rho = \sqrt{2}$ ed usando (10) $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$. Osserviamo che $-1-j$ cade nel terzo quadrante, quindi ha una determinazione dell'argomento verificante $\pi < \vartheta < \frac{3}{2}\pi$ (in effetti il punto è sulla bisettrice del quadrante). L'argomento principale è $\operatorname{Arg} z = \frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$.



Forma trigonometrica

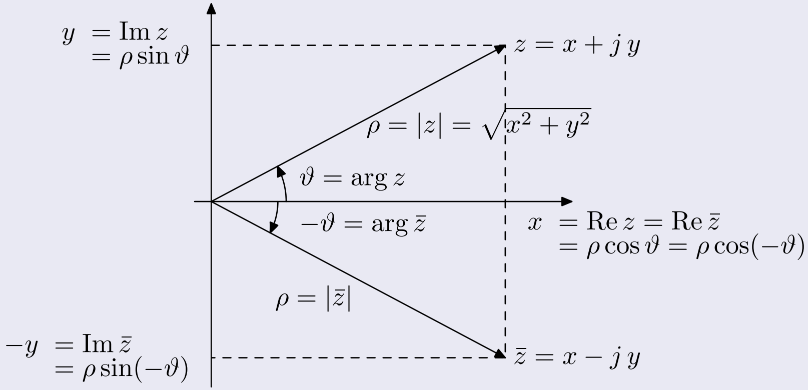
Esempio

Se $z \neq 0$ e $\bar{z}$ è il coniugato, risulta $|\bar{z}| = |z|$ e $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Forma trigonometrica

Esempio

Se $z \neq 0$ e $\bar{z}$ è il coniugato, risulta $|\bar{z}| = |z|$ e $\arg \bar{z} = -\arg z$.



Forma trigonometrica

La forma trigonometrica risulta comoda per calcolare il prodotto tra numeri complessi.

Forma trigonometrica

La forma trigonometrica risulta comoda per calcolare il prodotto tra numeri complessi.

Dati $z = [\rho\,,\,\vartheta]$ e $w = [r\,,\,\varphi]$,

Forma trigonometrica

La forma trigonometrica risulta comoda per calcolare il prodotto tra numeri complessi.

Dati $z = [\rho\,,\,\vartheta]$ e $w = [r\,,\,\varphi]$, risulta

$$\begin{aligned} z\,w &= \rho\,(\cos\vartheta + j\,\sin\vartheta)\;r\,(\cos\varphi + j\,\sin\varphi) \\ &= \rho\,r\,\big[\cos\vartheta\,\cos\varphi - \sin\vartheta\,\sin\varphi + j\,(\cos\vartheta\,\sin\varphi + \sin\vartheta\,\cos\varphi)\big] \\ &= \rho\,r\,\big[\cos(\vartheta+\varphi) + j\,\sin(\vartheta+\varphi)\big]\,. \end{aligned}$$

Forma trigonometrica

Dunque, vale la formula

$$[\rho\,,\,\vartheta]\cdot[r\,,\,\varphi]=[\rho\,r\,,\,\vartheta+\varphi]\,, \tag{11}$$

Forma trigonometrica

Dunque, vale la formula

$$[\rho\,,\,\vartheta]\cdot[r\,,\,\varphi]=[\rho\,r\,,\,\vartheta+\varphi]\,, \tag{11}$$

cioè, più esplicitamente, risulta

$$|z\,w|=|z|\,|w|\,,\qquad \arg(z\,w)=\arg z+\arg w\,.$$

Forma trigonometrica

La (11) consente di interpretare geometricamente il prodotto di due numeri complessi.

Forma trigonometrica

La (11) consente di interpretare geometricamente il prodotto di due numeri complessi.

Consideriamo inizialmente il prodotto di z per un numero reale positivo $w = r = [r, 0]$:

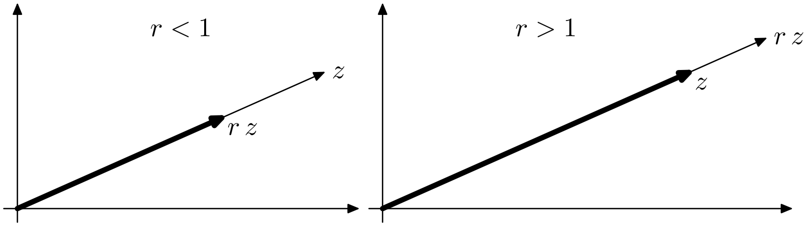
Forma trigonometrica

La (11) consente di interpretare geometricamente il prodotto di due numeri complessi.

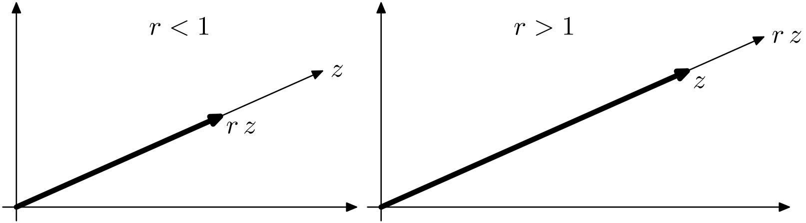
Consideriamo inizialmente il prodotto di z per un numero reale positivo $w = r = [r, 0]$:

$$z\,w = [\rho\,,\ \vartheta] \cdot [r\,,\ 0] = [\rho\, r\,,\ \vartheta]$$

Forma trigonometrica



Forma trigonometrica



Geometricamente, l'effetto su z della moltiplicazione consiste in un accorciamento, se $r < 1$, o in un allungamento, se $r > 1$, dunque in un'omotetia di centro 0 e rapporto r.

Forma trigonometrica

Consideriamo ora il prodotto di z per un numero di modulo unitario $w = [1, \varphi]$.

Forma trigonometrica

Consideriamo ora il prodotto di z per un numero di modulo unitario $w = [1, \varphi]$.

$$z\,w = [\rho\,,\,\vartheta] \cdot [1\,,\,\varphi] = [\rho\,,\,\vartheta + \varphi]$$

Forma trigonometrica

Consideriamo ora il prodotto di z per un numero di modulo unitario $w = [1, \varphi]$.

$$z\,w = [\rho\,,\,\vartheta] \cdot [1\,,\,\varphi] = [\rho\,,\,\vartheta + \varphi]$$

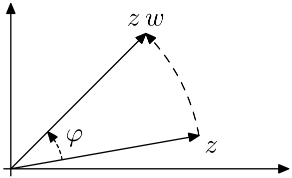
Poiché cambia solo l'argomento, è chiaro che l'effetto geometrico su z è quello di una rotazione di ampiezza (relativa) φ attorno a 0:

Forma trigonometrica

Consideriamo ora il prodotto di z per un numero di modulo unitario $w = [1, \varphi]$.

$$z\,w = [\rho\,,\,\vartheta] \cdot [1\,,\,\varphi] = [\rho\,,\,\vartheta + \varphi]$$

Poiché cambia solo l'argomento, è chiaro che l'effetto geometrico su z è quello di una rotazione di ampiezza (relativa) φ attorno a 0:



Forma trigonometrica

Consideriamo ora il caso generale.

Forma trigonometrica

Consideriamo ora il caso generale.

Essendo

$$z\,w = z\,[r,\varphi] = \big(z\,[r,0]\big)\,[1,\varphi]\,,$$

Forma trigonometrica

Consideriamo ora il caso generale.

Essendo

$$z\,w = z\,[r,\varphi] = \big(z\,[r,0]\big)\,[1,\varphi]\,,$$

evidentemente l'effetto su z della moltiplicazione per w è la composizione di una omotetia e di una rotazione; in figura consideriamo ad esempio il caso $r > 1$:

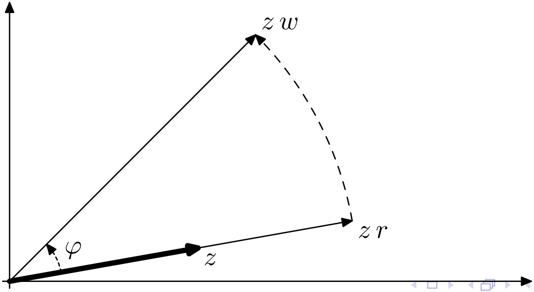
Forma trigonometrica

Consideriamo ora il caso generale.

Essendo

$$z\,w = z\,[r,\varphi] = \big(z\,[r,0]\big)\,[1,\varphi]\,,$$

evidentemente l'effetto su z della moltiplicazione per w è la composizione di una omotetia e di una rotazione; in figura consideriamo ad esempio il caso $r > 1$:



Forma trigonometrica

La formula (11) si generalizza ad un numero arbitrario di fattori:

$$[\rho_1\,,\,\vartheta_1]\cdot[\rho_2\,,\,\vartheta_2]\cdots[\rho_n\,,\,\vartheta_n]=[\rho_1\,\rho_2\cdots\rho_n\,,\,\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n].$$

Forma trigonometrica

La formula (11) si generalizza ad un numero arbitrario di fattori:

$$[\rho_1\,,\,\vartheta_1]\cdot[\rho_2\,,\,\vartheta_2]\cdots[\rho_n\,,\,\vartheta_n]=[\rho_1\,\rho_2\cdots\rho_n\,,\,\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n].$$

In particolare, se i fattori sono uguali tra loro, abbiamo la formula di *De Moivre* per le potenze:

$$[\rho\,,\,\vartheta]^n=[\rho^n\,,\,n\vartheta]\,. \tag{12}$$

Forma trigonometrica

La formula (11) si generalizza ad un numero arbitrario di fattori:

$$[\rho_1\,,\,\vartheta_1]\cdot[\rho_2\,,\,\vartheta_2]\cdots[\rho_n\,,\,\vartheta_n]=[\rho_1\,\rho_2\cdots\rho_n\,,\,\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n].$$

In particolare, se i fattori sono uguali tra loro, abbiamo la formula di *De Moivre* per le potenze:

$$[\rho\,,\,\vartheta]^n=[\rho^n\,,\,n\vartheta]\,. \tag{12}$$

Tale formula, ricavata per $n\in\mathbb{N}$, si estende ad ogni $n\in\mathbb{Z}$ osservando che vale per $n=-1$.

Forma trigonometrica

Osservazione

La formula di De Moivre (12) per $\rho = 1$, unita alla ben nota formula di Newton per le potenze di un binomio, consente di ottenere le *formule di moltiplicazione degli archi*.

Forma trigonometrica

Osservazione

La formula di De Moivre (12) per $\rho = 1$, unita alla ben nota formula di Newton per le potenze di un binomio, consente di ottenere le *formule di moltiplicazione degli archi*. Per $n \in \mathbb{N}$, è $[1, \vartheta]^n = [1, n\vartheta]$, ovvero

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^n \,.$$

Forma trigonometrica

Osservazione

La formula di De Moivre (12) per $\rho = 1$, unita alla ben nota formula di Newton per le potenze di un binomio, consente di ottenere le *formule di moltiplicazione degli archi*. Per $n \in \mathbb{N}$, è $[1, \vartheta]^n = [1, n\vartheta]$, ovvero

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^n \,.$$

Sviluppando il secondo membro mediante la formula di Newton, abbiamo

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos \vartheta)^{n-k} (j \sin \vartheta)^k \,.$$

Forma trigonometrica

Osservazione

La formula di De Moivre (12) per $\rho = 1$, unita alla ben nota formula di Newton per le potenze di un binomio, consente di ottenere le *formule di moltiplicazione degli archi*. Per $n \in \mathbb{N}$, è $[1, \vartheta]^n = [1, n\vartheta]$, ovvero

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^n \,.$$

Sviluppando il secondo membro mediante la formula di Newton, abbiamo

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos \vartheta)^{n-k} (j \sin \vartheta)^k \,.$$

A questo punto, ricaviamo $\cos n\vartheta$ e $\sin n\vartheta$ separando il reale dall'immaginario.

Forma trigonometrica

Ad esempio

$$\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta = \cos^2 \vartheta + 2j \cos \vartheta \sin \vartheta - \sin^2 \vartheta$$

Forma trigonometrica

Ad esempio

$$\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta = \cos^2 \vartheta + 2j \cos \vartheta \sin \vartheta - \sin^2 \vartheta$$

da cui seguono le ben note formule

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta\,, \quad \sin 2\vartheta = 2 \cos \vartheta \sin \vartheta\,.$$

Forma trigonometrica

Ad esempio

$$\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta = \cos^2\vartheta + 2j \cos\vartheta \sin\vartheta - \sin^2\vartheta$$

da cui seguono le ben note formule

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\,, \quad \sin 2\vartheta = 2\cos\vartheta \sin\vartheta\,.$$

Analogamente si trova

$$\cos 3\vartheta = \cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta\sin^2\vartheta\,, \quad \sin 3\vartheta = 3\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \sin^3\vartheta\,.$$

Forma trigonometrica

Illustriamo l'uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica:

Forma trigonometrica

Illustriamo l'uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica:

risulta

$$[\rho\,,\,\vartheta] = [r\,,\,\varphi]$$

se e solo se $\rho = r = 0$, oppure $\rho = r \neq 0$ e ϑ e φ differiscono per un multiplo di $2\,\pi$, cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$: $\varphi = \vartheta + 2\,k\,\pi$.

Radici dei numeri complessi

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, si dice *radice n-sima* di z ogni numero complesso la cui potenza n-sima è z,

Radici dei numeri complessi

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, si dice *radice n-sima* di z ogni numero complesso la cui potenza n-sima è z, cioè ogni soluzione w dell'equazione

$$w^n = z\,. \tag{13}$$

Radici dei numeri complessi

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, si dice *radice n-sima* di z ogni numero complesso la cui potenza n-sima è z, cioè ogni soluzione w dell'equazione

$$w^n = z\,. \tag{13}$$

Essendo il caso $n = 1$ banale, supponiamo $n \geq 2$.

Radici dei numeri complessi

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, si dice *radice n-sima* di z ogni numero complesso la cui potenza n-sima è z, cioè ogni soluzione w dell'equazione

$$w^n = z\,. \tag{13}$$

Essendo il caso $n = 1$ banale, supponiamo $n \geq 2$.

È chiaro che per $z = 0$ troviamo l'unica radice $w = 0$ (per la legge di annullamento del prodotto).

Radici dei numeri complessi

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, si dice *radice n-sima* di z ogni numero complesso la cui potenza n-sima è z, cioè ogni soluzione w dell'equazione

$$w^n = z\,. \tag{13}$$

Essendo il caso $n = 1$ banale, supponiamo $n \geq 2$.

È chiaro che per $z = 0$ troviamo l'unica radice $w = 0$ (per la legge di annullamento del prodotto).

Per $z \neq 0$, riscriviamo l'equazione (13) usando la formula di De Moivre, rappresentando z e l'incognita w in forma trigonometrica; posto $z = [\rho\,,\,\vartheta]$ e $w = [r\,,\,\varphi]$, abbiamo

$$[r^n\,,\,n\,\varphi] = [\rho\,,\,\vartheta]\,. \tag{14}$$

Radici dei numeri complessi

Come visto prima, questo significa

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ \\ n\,\varphi = \vartheta + 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

Radici dei numeri complessi

Come visto prima, questo significa

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ \\ n\,\varphi = \vartheta + 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \qquad \text{(radice } n\text{-sima aritmetica);} \\ \\ \varphi = \varphi_k = \dfrac{\vartheta + 2\,k\,\pi}{n}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \tag{15}$$

dove la radice n-sima aritmetica di ρ è l'unico numero positivo la cui potenza n-sima è ρ.

Radici dei numeri complessi

Le infinite scelte di k nella seconda delle (15) non danno tutte origine a radici a due a due distinte. Questo accade per $k = 0\,,\,1\,,\ldots,n-1$.

Radici dei numeri complessi

Le infinite scelte di k nella seconda delle (15) non danno tutte origine a radici a due a due distinte. Questo accade per $k = 0\,,\,1\,,\ldots,\,n-1$.

Per ogni altro valore di k, abbiamo una ripetizione: la formula fornisce una determinazione diversa dell'argomento di una delle radici già trovate. Ad esempio, $\varphi_n = \varphi_0 + 2\pi$ equivale a φ_0.

Radici dei numeri complessi

Dunque troviamo esattamente n radici n-sime; esse hanno tutte modulo $\sqrt[n]{\rho}$, mentre gli argomenti sono

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n}, \qquad \varphi_1 = \frac{\vartheta + 2\,\pi}{n}, \ \ldots, \ \varphi_{n-1} = \frac{\vartheta + 2\,(n-1)\,\pi}{n}.$$

Radici dei numeri complessi

Dunque troviamo esattamente n radici n-sime; esse hanno tutte modulo $\sqrt[n]{\rho}$, mentre gli argomenti sono

$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n}\,, \qquad \varphi_1 = \frac{\vartheta + 2\,\pi}{n}\,,\ \ldots,\ \varphi_{n-1} = \frac{\vartheta + 2\,(n-1)\,\pi}{n}\,.$$

Osserviamo che

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \cdots = \varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} = \frac{2\,\pi}{n}\,.$$

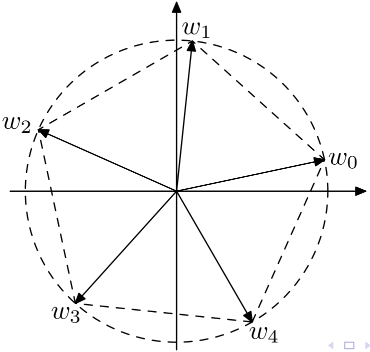
Radici dei numeri complessi

Geometricamente, le n radici w_0, $w_1 \ldots, w_{n-1}$ sono i vertici di un poligono regolare a n lati, inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

Radici dei numeri complessi

Geometricamente, le n radici w_0, $w_1 \ldots, w_{n-1}$ sono i vertici di un poligono regolare a n lati, inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. In figura sono rappresentate le 5 radici quinte di

$$\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right] .$$



Radici dei numeri complessi

L'insieme delle radici *n*-sime del numero complesso z si denota con $\sqrt[n]{z}$; le singole soluzioni si chiamano *determinazioni* della radice. (Con abuso di notazione, tale simbolo indica anche una qualsiasi delle determinazioni.)

Radici dei numeri complessi

L'insieme delle radici *n*-sime del numero complesso z si denota con $\sqrt[n]{z}$; le singole soluzioni si chiamano *determinazioni* della radice. (Con abuso di notazione, tale simbolo indica anche una qualsiasi delle determinazioni.)

Ogni numero complesso non nullo ha due radici quadrate opposte. Se $z = a > 0$, le due radici sono quella aritmetica e la sua opposta. Se $z = a < 0$, le due radici sono $\mp j\,(-a)^{1/2}$; ad esempio, $\sqrt{-1} = \mp j$.

Radici dei numeri complessi

L'insieme delle radici n-sime del numero complesso z si denota con $\sqrt[n]{z}$; le singole soluzioni si chiamano *determinazioni* della radice. (Con abuso di notazione, tale simbolo indica anche una qualsiasi delle determinazioni.)

Ogni numero complesso non nullo ha due radici quadrate opposte. Se $z = a > 0$, le due radici sono quella aritmetica e la sua opposta. Se $z = a < 0$, le due radici sono $\mp j\,(-a)^{1/2}$; ad esempio, $\sqrt{-1} = \mp j$.

È chiaro allora che l'equazione $x^2 = a$ da cui siamo partiti per motivare la costruzione del campo complesso è risolubile in $\mathbb{C}$ per ogni a.

Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[3]{1}$.

Radici dei numeri complessi

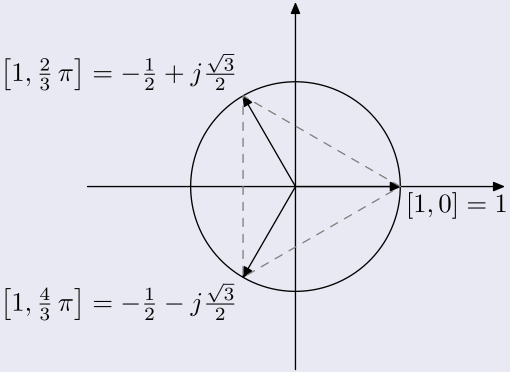
Esempio

Calcoliamo $\sqrt[3]{1}$. Poiché $1 = [1, 0]$, usando la formula vediamo che le tre radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{2k\pi}{3}$, per $k = 0, 1, 2$:

Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[3]{1}$. Poiché $1 = [1, 0]$, usando la formula vediamo che le tre radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{2k\pi}{3}$, per $k = 0, 1, 2$:



Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[3]{-1}$.

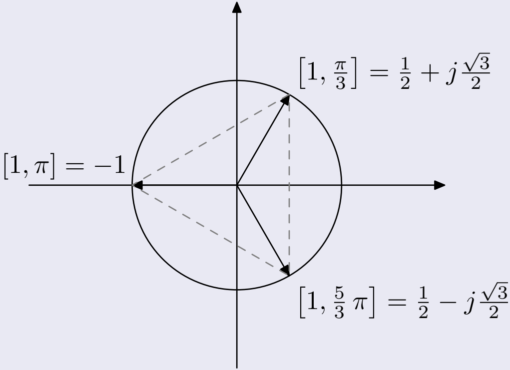
Esempio

Calcoliamo $\sqrt[3]{-1}$. Poiché $-1 = [1, \pi]$, vediamo che le tre radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$, per $k = 0, 1, 2$:

Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[3]{-1}$. Poiché $-1 = [1, \pi]$, vediamo che le tre radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$, per $k = 0, 1, 2$:



Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$.

Radici dei numeri complessi

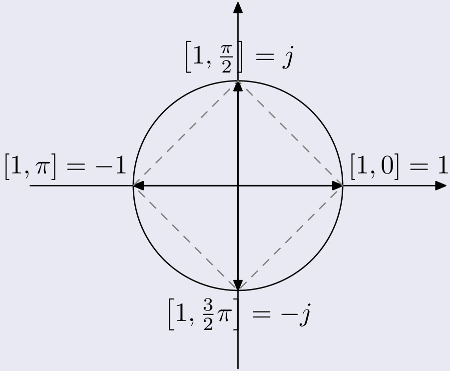
Esempio

Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$. Le quattro radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{2k\pi}{4} = k\frac{\pi}{2}$, per $k = 0, 1, 2, 3$:

Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$. Le quattro radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{2k\pi}{4} = k\frac{\pi}{2}$, per $k = 0, 1, 2, 3$:



Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[4]{-1}$.

Radici dei numeri complessi

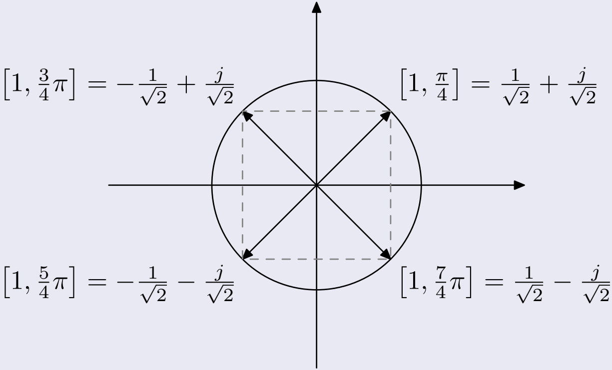
Esempio

Calcoliamo $\sqrt[4]{-1}$. Le quattro radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{\pi+2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, per $k = 0, 1, 2, 3$:

Radici dei numeri complessi

Esempio

Calcoliamo $\sqrt[4]{-1}$. Le quattro radici hanno modulo 1 e argomento $\varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, per $k = 0, 1, 2, 3$:



Osservazione

In tutti e quattro i casi l'insieme delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Radici dei numeri complessi

Osservazione

In tutti e quattro i casi l'insieme delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Questo accade perché in ogni caso stiamo trovando gli zeri di un polinomio a coefficienti reali, quindi hermitiano.

Radici dei numeri complessi

Osservazione

In tutti e quattro i casi l'insieme delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Questo accade perché in ogni caso stiamo trovando gli zeri di un polinomio a coefficienti reali, quindi hermitiano.

Ad esempio, nell'ultimo caso stiamo risolvendo l'equazione

$$z^4 + 1 = 0\,.$$

Radici dei numeri complessi

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$z^6 - 2\,z^3 + 4 = 0\,. \tag{16}$$

Radici dei numeri complessi

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$z^6 - 2\,z^3 + 4 = 0\,. \tag{16}$$

Ponendo $w = z^3$, l'equazione diviene

$$w^2 - 2\,w + 4 = 0\,,$$

Esempio

Risolviamo l'equazione

$$z^6 - 2\,z^3 + 4 = 0\,. \tag{16}$$

Ponendo $w = z^3$, l'equazione diviene

$$w^2 - 2\,w + 4 = 0\,,$$

che ha le soluzioni $w = 1 \mp \sqrt{3}\,j$ e quindi

$$z = \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}\,j} \quad \text{e} \quad z = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}\,j}\,.$$

Radici dei numeri complessi

Esempio (continuazione)

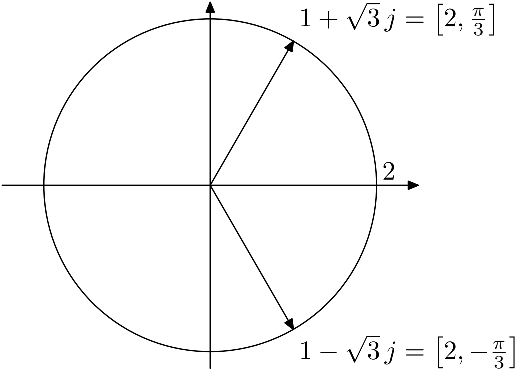
Per calcolare le radici, scriviamo i radicandi in forma trigonometrica:

$$1 \mp \sqrt{3}\,j = 2\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\,j\right) = \left[2, \mp\frac{\pi}{3}\right]$$

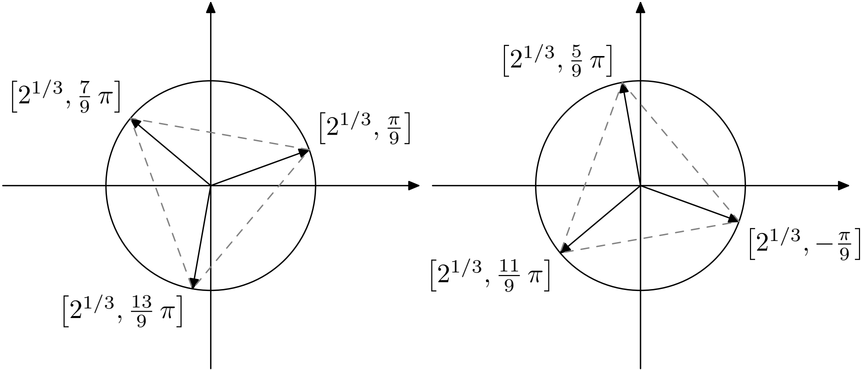
e quindi

$$\sqrt[3]{1 \mp \sqrt{3}\,j} = \left[2^{1/3}, \mp\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\,\pi\,k\right], \quad k = 0\,,\ 1\,,\ 2\,.$$

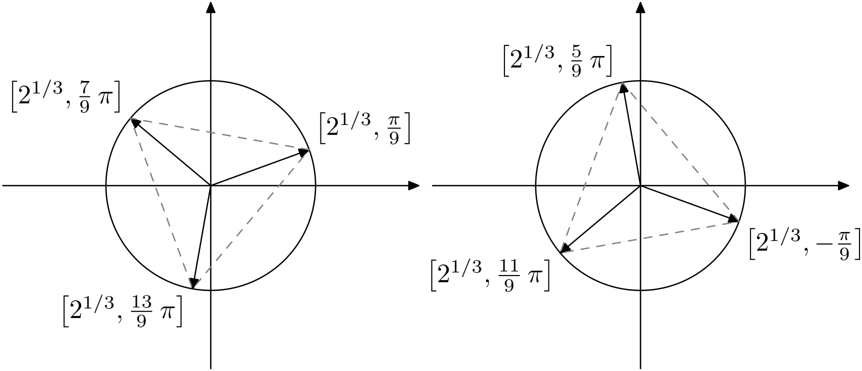
Radici dei numeri complessi



Radici dei numeri complessi



Radici dei numeri complessi



Notiamo che il polinomio $z^6 - 2\,z^3 + 4$ ha coefficienti reali, quindi è hermitiano; se z_0 è uno zero, lo è pure $\overline{z}_0$; l'insieme degli zeri è simmetrico rispetto all'asse reale.

Le funzioni elementari nel campo complesso

Per estendere al campo complesso le funzioni elementari useremo due modi di procedere:

Le funzioni elementari nel campo complesso

Per estendere al campo complesso le funzioni elementari useremo due modi di procedere:

quando possibile effettueremo l'estensione direttamente dalla definizione,

Le funzioni elementari nel campo complesso

Per estendere al campo complesso le funzioni elementari useremo due modi di procedere:

quando possibile effettueremo l'estensione direttamente dalla definizione,

oppure cercheremo di mantenere le proprietà formali valide nel campo reale.

L'esponenziale

L'uguaglianza

$$[1\,,\,\vartheta]\cdot[1\,,\,\varphi]=[1\,,\,\vartheta+\varphi]\,,$$

L'esponenziale

L'uguaglianza

$$[1\,,\,\vartheta]\cdot[1\,,\,\varphi]=[1\,,\,\vartheta+\varphi]\,,$$

caso particolare della formula per il prodotto di due numeri in forma trigonometrica, è formalmente analoga alla ben nota proprietà dell'esponenziale

$$\mathrm{e}^{\,a}\cdot\,\mathrm{e}^{\,b}=\,\mathrm{e}^{\,a+b}\,.$$

L'esponenziale

Questo suggerisce di dare la seguente definizione

$$e^{j\,y} := [1\,,\,y] = \cos y + j\,\sin y\,, \tag{17}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$. Notiamo che per $y = 0$ risulta $e^{j\,0} = 1$.

L'esponenziale

Questo suggerisce di dare la seguente definizione

$$e^{j\,y} := [1\,,\,y] = \cos y + j\,\sin y\,, \tag{17}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$. Notiamo che per $y = 0$ risulta $e^{j\,0} = 1$.

Questa uguaglianza, che qui è usata come definizione, è detta *formula di Eulero*.

Questo suggerisce di dare la seguente definizione

$$\mathrm{e}^{j\,y} := [1\,,\,y] = \cos y + j\,\sin y\,, \tag{17}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$. Notiamo che per $y = 0$ risulta $\mathrm{e}^{j\,0} = 1$.

Questa uguaglianza, che qui è usata come definizione, è detta *formula di Eulero*.

Se $z = [\rho\,,\,\vartheta]$, possiamo scrivere $z = \rho\,\mathrm{e}^{j\,\vartheta}$. Questa scrittura si chiama *forma esponenziale* del numero complesso z ed è chiaramente equivalente alla forma trigonometrica.

L'esponenziale

Con la notazione introdotta nella formula di Eulero (17), ripetiamo, la formula per il prodotto di due numeri complessi (di modulo 1) in forma trigonometrica corrisponde alla menzionata proprietà delle potenze

$$e^{j\,y_1} \cdot e^{j\,y_2} = e^{j\,(y_1+y_2)}\,.$$

L'esponenziale

Con la notazione introdotta nella formula di Eulero (17), ripetiamo, la formula per il prodotto di due numeri complessi (di modulo 1) in forma trigonometrica corrisponde alla menzionata proprietà delle potenze

$$e^{j\,y_1} \cdot e^{j\,y_2} = e^{j\,(y_1+y_2)}\,.$$

Vogliamo definire l'esponenziale e^{z}, per $z \in \mathbb{C}$, cercando di conservare tale proprietà.

L'esponenziale

Con la notazione introdotta nella formula di Eulero (17), ripetiamo, la formula per il prodotto di due numeri complessi (di modulo 1) in forma trigonometrica corrisponde alla menzionata proprietà delle potenze

$$e^{j\,y_1} \cdot e^{j\,y_2} = e^{j\,(y_1+y_2)}\,.$$

Vogliamo definire l'esponenziale e^{z}, per $z \in \mathbb{C}$, cercando di conservare tale proprietà.

Dato $z = x + j\,y$ in forma algebrica, dobbiamo allora *necessariamente* porre

$$e^{z} = e^{x+j\,y} = e^{x} \cdot e^{j\,y} = e^{x}\,(\cos y + j\,\sin y)\,. \tag{18}$$

L'esponenziale

Con tale definizione la proprietà delle potenze resta effettivamente valida.

L'esponenziale

Con tale definizione la proprietà delle potenze resta effettivamente valida.

Un'altra notazione per l'esponenziale di z è

$$\exp(z) = e^z .$$

L'esponenziale

Con tale definizione la proprietà delle potenze resta effettivamente valida.

Un'altra notazione per l'esponenziale di z è

$$\exp(z) = \mathrm{e}^{z}.$$

Dunque

$$|\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}, \qquad \arg(\mathrm{e}^{z}) = \operatorname{Im} z + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

vale a dire $\mathrm{e}^{z} = [\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}, \operatorname{Im} z]$.

L'esponenziale

Con tale definizione la proprietà delle potenze resta effettivamente valida.

Un'altra notazione per l'esponenziale di z è

$$\exp(z) = \mathrm{e}^{z}\,.$$

Dunque

$$|\,\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\,, \qquad \arg(\,\mathrm{e}^{z}) = \operatorname{Im} z + 2\,k\,\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,, \tag{19}$$

vale a dire $\mathrm{e}^{z} = [\,\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}, \operatorname{Im} z]$.

In particolare, dalla prima uguaglianza, ricaviamo $\mathrm{e}^{z} \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, poiché l'esponenziale reale è positivo: $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} > 0$.

L'esponenziale

La corrispondenza

$$z \quad \mapsto \quad e^{z}$$

definisce in $\mathbb{C}$ una *funzione complessa di variabile complessa*, che si dice funzione esponenziale.

L'esponenziale

La corrispondenza

$$z \quad \mapsto \quad e^{z}$$

definisce in $\mathbb{C}$ una *funzione complessa di variabile complessa*, che si dice funzione esponenziale.

Osserviamo che l'esponenziale è periodico di periodo $2\,\pi\,j$:

$$e^{z+2k\pi j} = e^{z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

L'esponenziale

La corrispondenza

$$z \quad \mapsto \quad \mathrm{e}^{z}$$

definisce in $\mathbb{C}$ una *funzione complessa di variabile complessa*, che si dice funzione esponenziale.

Osserviamo che l'esponenziale è periodico di periodo $2\,\pi\,j$:

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi j} = \mathrm{e}^{z}\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

A scopo illustrativo, risolviamo l'equazione

$$\mathrm{e}^{z} = 1\,.$$

L'esponenziale

La corrispondenza

$$z \quad \mapsto \quad e^{\,z}$$

definisce in $\mathbb{C}$ una *funzione complessa di variabile complessa*, che si dice funzione esponenziale.

Osserviamo che l'esponenziale è periodico di periodo $2\,\pi\,j$:

$$e^{\,z+2k\pi j} = e^{\,z}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

A scopo illustrativo, risolviamo l'equazione

$$e^{\,z} = 1.$$

Scriviamo $z = x + j\,y$ in forma algebrica. In base alle (19), essendo $1 = [1\,,\,0]$ troviamo

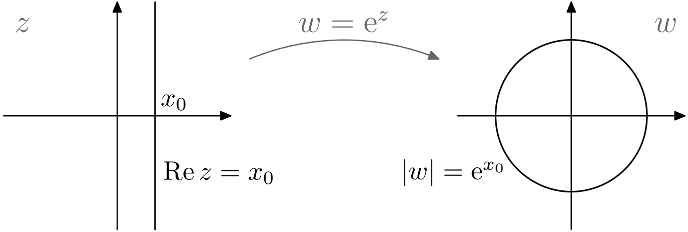
$$e^{\,z} = 1 \iff z = 2\,k\,\pi\,j\,, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

L'esponenziale

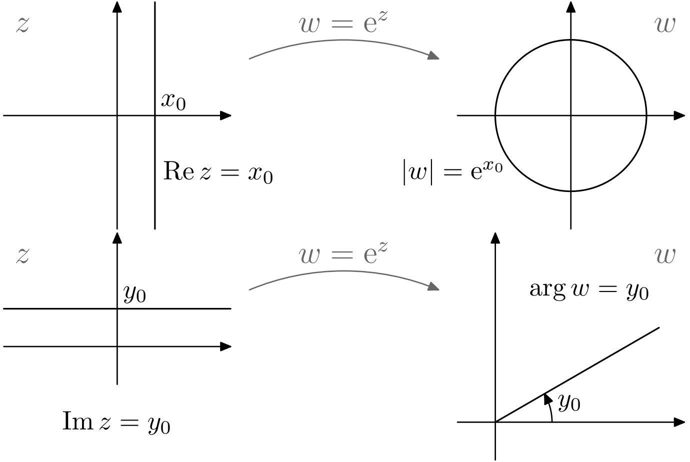
Descriviamo l'immagine tramite la corrispondenza $w = e^z$ delle rette di equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ nel piano della z.

L'esponenziale

Descriviamo l'immagine tramite la corrispondenza $w = e^z$ delle rette di equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ nel piano della z.



Descriviamo l'immagine tramite la corrispondenza $w = e^z$ delle rette di equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ nel piano della z.

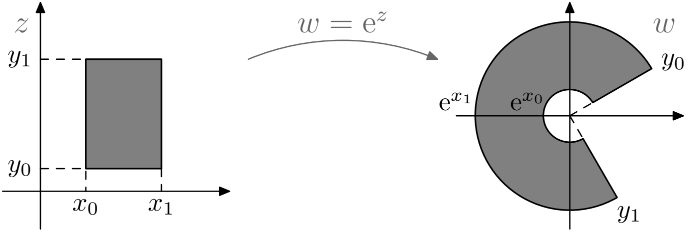


L'esponenziale

Analogamente, dati x_0, x_1, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_1$ e $0 < y_1 - y_0 < 2\,\pi$, l'immagine di $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ è un settore di corona circolare con centro nell'origine.

L'esponenziale

Analogamente, dati x_0, x_1, y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_1$ e $0 < y_1 - y_0 < 2\,\pi$, l'immagine di $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ è un settore di corona circolare con centro nell'origine.



Il logaritmo

Dato $z \in \mathbb{C}$, chiameremo logaritmo di z e lo indicheremo con

$$\log z$$

ogni numero complesso w, se esiste, tale che

$$e^{w} = z\,.$$

Il logaritmo

Dato $z \in \mathbb{C}$, chiameremo logaritmo di z e lo indicheremo con

$$\log z$$

ogni numero complesso w, se esiste, tale che

$$e^{w} = z\,.$$

È chiaro che non si può definire il logaritmo di 0.

Il logaritmo

Per $z \neq 0$, quindi con $|z| > 0$, l'equazione $\mathrm{e}^{w} = z$ si riscrive

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w} = |\,\mathrm{e}^{w}| = |z|\,, \qquad \operatorname{Im} w = \arg(\,\mathrm{e}^{w}) = \arg z\,.$$

Il logaritmo

Per $z \neq 0$, quindi con $|z| > 0$, l'equazione $\mathrm{e}^{\,w} = z$ si riscrive

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{Re}\, w} = |\,\mathrm{e}^{\,w}| = |z|\,, \qquad \mathrm{Im}\, w = \arg(\,\mathrm{e}^{\,w}) = \arg z\,.$$

Pertanto

$$w = \log z = \log_* |z| + j\,(\tilde{\vartheta} + 2\,k\,\pi)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{20}$$

Il logaritmo

Per $z \neq 0$, quindi con $|z| > 0$, l'equazione $\mathrm{e}^{w} = z$ si riscrive

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re} w} = |\,\mathrm{e}^{w}| = |z|\,, \qquad \operatorname{Im} w = \arg(\,\mathrm{e}^{w}) = \arg z\,.$$

Pertanto

$$w = \log z = \log_{*}|z| + j\,(\tilde{\vartheta} + 2\,k\,\pi)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,, \qquad (20)$$

dove

$$\log_{*} : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$$

indica il logaritmo aritmetico di un numero positivo (cioè l'esponente da dare ad e per ottenere tale numero) e $\tilde{\vartheta}$ è una qualsiasi fissata determinazione dell'argomento di z.

Il logaritmo

Il logaritmo

$$z \to \log z$$

è una funzione polidroma ad infinite determinazioni, corrispondenti alle infinite determinazioni di $\arg z$; due determinazioni di $\log z$ differiscono per un multiplo di $2\,\pi\,j$.

Il logaritmo

Il logaritmo

$$z \to \log z$$

è una funzione polidroma ad infinite determinazioni, corrispondenti alle infinite determinazioni di $\arg z$; due determinazioni di $\log z$ differiscono per un multiplo di $2\,\pi\,j$.

La determinazione che si ottiene scegliendo la determinazione principale dell'argomento di z si chiama *logaritmo principale* di z e si denota con $\operatorname{Log} z$:

$$\operatorname{Log} z = \log_* |z| + j\ \operatorname{Arg} z\,. \tag{21}$$

Il logaritmo

$$z \to \log z$$

è una funzione polidroma ad infinite determinazioni, corrispondenti alle infinite determinazioni di $\arg z$; due determinazioni di $\log z$ differiscono per un multiplo di $2\,\pi\,j$.

La determinazione che si ottiene scegliendo la determinazione principale dell'argomento di z si chiama *logaritmo principale* di z e si denota con $\operatorname{Log} z$:

$$\operatorname{Log} z = \log_* |z| + j\,\operatorname{Arg} z\,. \tag{21}$$

Esempio

Risulta

$$\log 1 = 2\,k\,\pi\,j\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,; \qquad \operatorname{Log} 1 = 0\,.$$

Più in generale di $\operatorname{Log} z$, scelto $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, possiamo fissare una determinazione di $\log z$ considerando la determinazione di $\arg z$ che cade in $]\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi[$. In altri termini, definiti l'insieme

$$A_{\vartheta_0} = \{\ z \in \mathbb{C} - \{0\}\ :\ \vartheta_0 < \arg z < \vartheta_0 + 2\pi\ \}\,,$$

ottenuto da $\mathbb{C}$ *effettuando un taglio* lungo la semiretta uscente da O di anomalia ϑ_0, e la striscia orizzontale

$$S_{\vartheta_0} = \{\ w \in \mathbb{C}\ :\ \vartheta_0 < \operatorname{Im} w < \vartheta_0 + 2\pi\ \}\,,$$

consideriamo la funzione

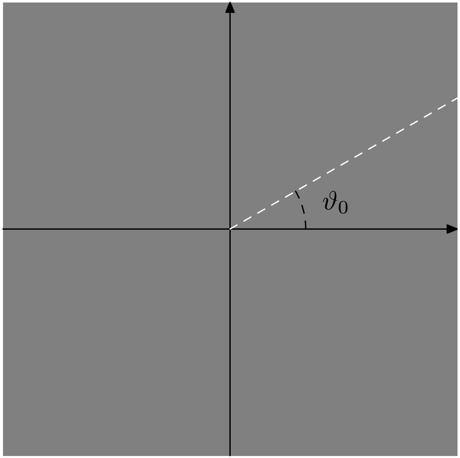
$$\log\colon z \in A_{\vartheta_0} \quad \mapsto \quad \log_* |z| + j\, \arg z \in S_{\vartheta_0}\,,$$

che risulta inversa alla restrizione dell'esponenziale

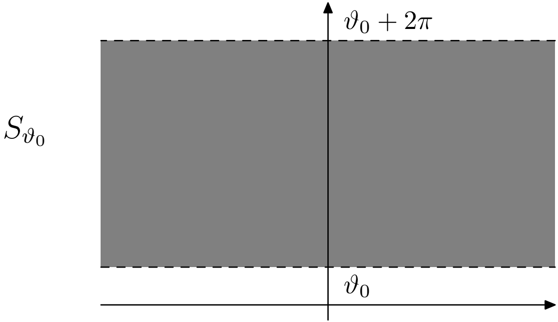
$$w \in S_{\vartheta_0} \quad \mapsto \quad e^{\,w} \in A_{\vartheta_0}\,.$$

Il logaritmo

A_{ϑ_0}



Il logaritmo



Le funzioni circolari e iperboliche

In base alla formula di Eulero (17), per ϑ reale, abbiamo

$$e^{j\,\vartheta} = \cos\vartheta + j\,\sin\vartheta\,.$$

Le funzioni circolari e iperboliche

In base alla formula di Eulero (17), per ϑ reale, abbiamo

$$e^{j\,\vartheta} = \cos\vartheta + j\,\sin\vartheta\,.$$

Mutando ϑ in $-\vartheta$, per le proprietà di simmetria delle funzioni coseno e seno, abbiamo pure

$$e^{\,-j\vartheta} = \cos\vartheta - j\sin\vartheta\,.$$

Le funzioni circolari e iperboliche

In base alla formula di Eulero (17), per ϑ reale, abbiamo

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta\,.$$

Mutando ϑ in $-\vartheta$, per le proprietà di simmetria delle funzioni coseno e seno, abbiamo pure

$$e^{-j\vartheta} = \cos\vartheta - j\sin\vartheta\,.$$

Dunque ricaviamo

$$\cos\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2}\,, \qquad \sin\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}\,, \tag{22}$$

valide $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$.

Le funzioni circolari e iperboliche

Estendiamo le funzioni a $\mathbb{C}$ ponendo

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}\,, \qquad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,, \quad (23)$$

(sostituiamo cioè $\vartheta \in \mathbb{R}$ con $z \in \mathbb{C}$).

Le funzioni circolari e iperboliche

Estendiamo le funzioni a $\mathbb{C}$ ponendo

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (23)$$

(sostituiamo cioè $\vartheta \in \mathbb{R}$ con $z \in \mathbb{C}$).

Analoghe sono le definizioni delle funzioni iperboliche

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$

Si definiscono coseno e seno iperbolici ponendo, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$

Si definiscono coseno e seno iperbolici ponendo, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

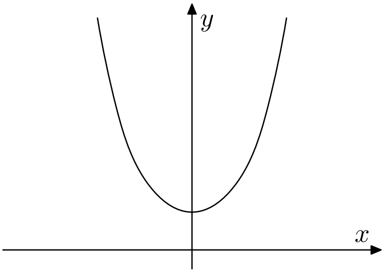
Evidentemente $\cosh x$ è positiva pari e $\sinh x$ è dispari, concorde con x. Le funzioni divergono a $\pm\infty$. Inoltre

$$D \cosh x = \sinh x, \qquad D \sinh x = \cosh x.$$

Pertanto $\sinh x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, mentre $\cosh x$ è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty[$; in particolare

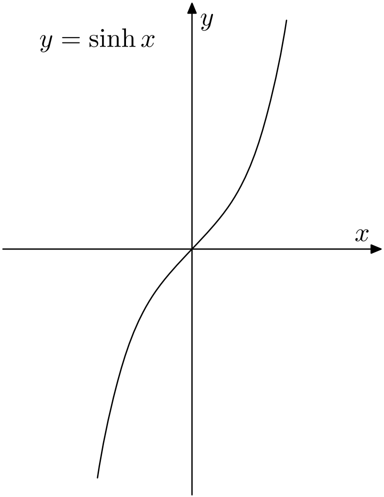
$$\cosh 0 = 1 < \cosh x, \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$



$y = \cosh x$

Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$



Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$

Vale la seguente identità

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$

Vale la seguente identità

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Questo implica che il punto di coordinate

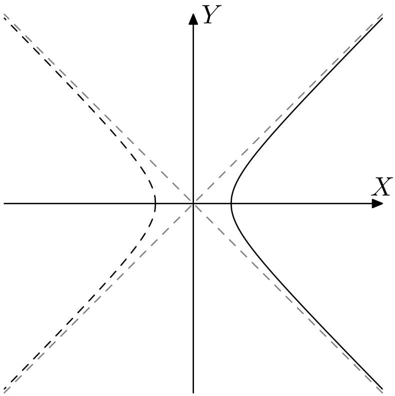
$$X = \cosh x\,, \qquad Y = \sinh x\,,$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$ descrive il ramo dell'iperbole equilatera di equazione

$$X^2 - Y^2 = 1$$

formato dai punti di ascissa positiva.

Richiami sulle funzioni iperboliche in $\mathbb{R}$



$$X^2 - Y^2 = 1$$

Le funzioni circolari e iperboliche

Sono immediate le uguaglianze

$$
\begin{aligned}
\cosh j\,z &= \cos z\,, \qquad & \sinh j\,z &= j\,\sin z\,,\\
\cos j\,z &= \cosh z\,, \qquad & \sin j\,z &= j\,\sinh z\,,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Le funzioni circolari e iperboliche

Sono immediate le uguaglianze

$$\begin{aligned} \cosh jz &= \cos z\,, \qquad & \sinh jz &= j\,\sin z\,,\\ \cos jz &= \cosh z\,, \qquad & \sin jz &= j\,\sinh z\,, \end{aligned} \tag{25}$$

e le ben note *relazioni fondamentali*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,.$$

Le funzioni circolari e iperboliche

Sono immediate le uguaglianze

$$\begin{aligned} \cosh j\,z &= \cos z\,, \qquad & \sinh j\,z &= j\,\sin z\,, \\ \cos j\,z &= \cosh z\,, \qquad & \sin j\,z &= j\,\sinh z\,, \end{aligned} \tag{25}$$

e le ben note *relazioni fondamentali*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,.$$

Le funzioni $\cos z$ e $\sin z$ sono periodiche di periodo $2\,\pi$, mentre $\cosh z$ e $\sinh z$ sono periodiche di periodo $2\,\pi\,j$, come segue subito dalla periodicità dell'esponenziale.

Le funzioni circolari e iperboliche

Studiamo l'equazione $\cos z = 0$, cerchiamo cioè gli *zeri* del coseno.

Studiamo l'equazione $\cos z = 0$, cerchiamo cioè gli *zeri* del coseno.

In base alla definizione,

$$\cos z = 0 \iff \mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz} = 0 \iff \mathrm{e}^{2jz} = -1 \iff 2jz = \pi j + 2k\pi j$$

e quindi

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Studiamo l'equazione $\cos z = 0$, cerchiamo cioè gli *zeri* del coseno.

In base alla definizione,

$$\cos z = 0 \iff e^{jz} + e^{-jz} = 0 \iff e^{2jz} = -1 \iff 2jz = \pi j + 2k\pi j$$

e quindi

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Analogamente

$$\sin z = 0 \iff z = k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Le funzioni circolari e iperboliche

Studiamo l'equazione $\cos z = 0$, cerchiamo cioè gli *zeri* del coseno.

In base alla definizione,

$$\cos z = 0 \iff e^{jz} + e^{-jz} = 0 \iff e^{2jz} = -1 \iff 2jz = \pi j + 2k\pi j$$

e quindi

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Analogamente

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

In altri termini, troviamo solo gli zeri reali.

Le funzioni circolari e iperboliche

$\cos z$ e $\sin z$ *non* sono limitate in $\mathbb{C}$:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \left|\cos z\right| = \sup_{z\in\mathbb{C}} \left|\sin z\right| = +\infty\,,$$

come si vede ad esempio prendendo $z = j\,y$ e passando al limite per $y \to \mp\infty$.

Le funzioni circolari e iperboliche

$\cos z$ e $\sin z$ *non* sono limitate in $\mathbb{C}$:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |\cos z| = \sup_{z\in\mathbb{C}} |\sin z| = +\infty\,,$$

come si vede ad esempio prendendo $z = j\,y$ e passando al limite per $y \to \mp\infty$.

Valgono formule di addizione identiche a quelle note nel campo reale; ad esempio:

$$\cos(z+w) = \cos z\,\cos w - \sin z\,\sin w\,, \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}\,.$$

Si verificano con un calcolo diretto, o, come vedremo, seguono dal *principio di permanenza* delle proprietà analitiche.

Le funzioni circolari e iperboliche

In particolare, usando (25)

$$\begin{aligned}\cos(x + j\, y) &= \cos x\, \cos j\, y - \sin x\, \sin j\, y \\ &= \cos x\, \cosh y - j\, \sin x \sinh y\,.\end{aligned} \tag{26}$$

In particolare, usando (25)

$$\begin{aligned}\cos(x + j\,y) &= \cos x\ \cos j\,y - \sin x\ \sin j\,y \\ &= \cos x\ \cosh y - j\ \sin x \sinh y\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Ad esempio, troviamo per quali $z \in \mathbb{C}$ il valore di $\cos z$ è reale. Da (26) ricaviamo

$$\cos z \in \mathbb{R} \iff \sin x \sinh y = 0 \iff (x = k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z})\,, \quad \text{o } y = 0\,.$$

In particolare, usando (25)

$$\begin{aligned}\cos(x + j\,y) &= \cos x\ \cos j\,y - \sin x\ \sin j\,y \\ &= \cos x\ \cosh y - j\ \sin x \sinh y\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Ad esempio, troviamo per quali $z \in \mathbb{C}$ il valore di $\cos z$ è reale. Da (26) ricaviamo

$$\cos z \in \mathbb{R} \iff \sin x \sinh y = 0 \iff (x = k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z})\,, \quad \text{o } y = 0\,.$$

Osserviamo che $y = 0$ significa $z = x \in \mathbb{R}$ e quindi chiaramente $\cos z = \cos x \in \mathbb{R}$.

Vediamo quando $\cos z$ è, in più, compreso tra -1 e 1, come avviene per $z \in \mathbb{R}$. Questo accade banalmente se $y = 0$.

Le funzioni circolari e iperboliche

Vediamo quando $\cos z$ è, in più, compreso tra -1 e 1, come avviene per $z \in \mathbb{R}$. Questo accade banalmente se $y = 0$.

Supponendo $x = k\pi$, troviamo $\cos x = \pm 1$ e

$$|\cos z| \leq 1 \iff |\cos x \cosh y| = \cosh y \leq 1$$

e quindi comunque $y = 0$.

Le funzioni circolari e iperboliche

Vediamo quando $\cos z$ è, in più, compreso tra -1 e 1, come avviene per $z \in \mathbb{R}$. Questo accade banalmente se $y = 0$.

Supponendo $x = k\,\pi$, troviamo $\cos x = \pm 1$ e

$$|\cos z| \leq 1 \iff |\cos x \, \cosh y| = \cosh y \leq 1$$

e quindi comunque $y = 0$.

Pertanto l'equazione nell'incognita z

$$\cos z = w \in \mathbb{R}\,, \qquad -1 \leq w \leq 1$$

ha in $\mathbb{C}$ esattamente le soluzioni reali.

Analogamente

$$\sin z = w \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leq w \leq 1$$

ha in $\mathbb{C}$ esattamente le soluzioni reali.

Analogamente

$$\sin z = w \in \mathbb{R}\,, \qquad -1 \le w \le 1$$

ha in $\mathbb{C}$ esattamente le soluzioni reali.

Questo è in accordo col fatto che, come abbiamo visto, gli zeri delle due funzioni sono esattamente quelli reali.

Le funzioni circolari e iperboliche

Poniamo inoltre

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \qquad \text{per } z \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}\,, \quad \text{per } z \neq j\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)\,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

La potenza

Per $w \neq 0$ definiamo la potenza

$$w^z = \exp(z \log w)\,. \tag{27}$$

La potenza

Per $w \neq 0$ definiamo la potenza

$$w^z = \exp(z \log w)\,. \tag{27}$$

Osserviamo che in $\mathbb{R}$, se z e w sono numeri positivi, l'uguaglianza vale banalmente; la usiamo in $\mathbb{C}$ come definizione.

La potenza

Per $w \neq 0$ definiamo la potenza

$$w^z = \exp(z \log w)\,. \tag{27}$$

Osserviamo che in $\mathbb{R}$, se z e w sono numeri positivi, l'uguaglianza vale banalmente; la usiamo in $\mathbb{C}$ come definizione.

Essendo $\log w$ polidroma, c'è da aspettarsi che la potenza abbia in generale più determinazioni.

La potenza

Per $w \neq 0$ definiamo la potenza

$$w^z = \exp(z \log w)\,. \tag{27}$$

Osserviamo che in $\mathbb{R}$, se z e w sono numeri positivi, l'uguaglianza vale banalmente; la usiamo in $\mathbb{C}$ come definizione.

Essendo $\log w$ polidroma, c'è da aspettarsi che la potenza abbia in generale più determinazioni.

Scegliendo in (27) per $\log w$ la determinazione principale $\operatorname{Log} w$, si ottiene quella che si chiama *determinazione principale della potenza*.

La potenza

Studiamo in dettaglio le determinazioni della potenza, scrivendo

$$\begin{aligned} w^z &= \exp\left(z\,(\operatorname{Log} w + 2\,k\,\pi\,j)\right) = \exp(z\ \operatorname{Log} w)\ \exp(z\,2\,k\,\pi\,j) \\ &= \exp(z\ \operatorname{Log} w)\,h^k \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, avendo posto $h = \exp(z\,2\,\pi\,j)$.

La potenza

Studiamo in dettaglio le determinazioni della potenza, scrivendo

$$\begin{aligned} w^z &= \exp\left(z\,(\operatorname{Log} w + 2\,k\,\pi\,j)\right) = \exp(z\ \operatorname{Log} w)\,\exp(z\,2\,k\,\pi\,j) \\ &= \exp(z\ \operatorname{Log} w)\,h^k \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, avendo posto $h = \exp(z\,2\,\pi\,j)$.

Dunque tra le determinazioni della potenza ci sono ripetizioni se e solo se esistono due interi $k_1 \neq k_2$ tali che $h^{k_1} = h^{k_2}$, cioè se e solo se $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $h^n = 1$, ovvero ancora risulta

$$z\,2\,n\,\pi\,j = 2\,m\,\pi\,j\,, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}.$$

La potenza

Studiamo in dettaglio le determinazioni della potenza, scrivendo

$$\begin{aligned} w^z &= \exp\big(z\,(\operatorname{Log} w + 2\,k\,\pi\,j)\big) = \exp(z\ \operatorname{Log} w)\ \exp(z\,2\,k\,\pi\,j) \\ &= \exp(z\ \operatorname{Log} w)\ h^k \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, avendo posto $h = \exp(z\,2\,\pi\,j)$.

Dunque tra le determinazioni della potenza ci sono ripetizioni se e solo se esistono due interi $k_1 \neq k_2$ tali che $h^{k_1} = h^{k_2}$, cioè se e solo se $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $h^n = 1$, ovvero ancora risulta

$$z\,2\,n\,\pi\,j = 2\,m\,\pi\,j\,, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto le determinazioni della potenza non sono a due a due distinte (vale a dire, ci sono ripetizioni) se e solo se

$$z = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,.$$

La potenza

Se la frazione
$$z = \frac{m}{n}$$
è ridotta a minimi termini, la potenza ha n determinazioni a due a due distinte.

La potenza

Se la frazione
$$z = \frac{m}{n}$$
è ridotta a minimi termini, la potenza ha n determinazioni a due a due distinte.

Per
$$z = \frac{1}{n}$$
otteniamo le n radici n-sime di w.

La potenza

Se la frazione
$$z = \frac{m}{n}$$
è ridotta a minimi termini, la potenza ha n determinazioni a due a due distinte.

Per
$$z = \frac{1}{n}$$
otteniamo le n radici n-sime di w.

Per
$$z = m \in \mathbb{Z}\,,$$
otteniamo come unica determinazione la definizione già nota di potenza m-sima; ad esempio, se $m > 0$,
$$w^m = \underbrace{w \cdot w \cdots w}_{m \text{ fattori}}\,.$$

La potenza

Per $z \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni sono a due a due distinte.

La potenza

Per $z \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni sono a due a due distinte.

Ad esempio, $1^j = \exp(j \cdot 2k\pi j) = \exp(-2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. La determinazione principale è 1, che si ha per $k = 0$.

La potenza

Per $z \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni sono a due a due distinte.

Ad esempio, $1^j = \exp(j \cdot 2k\pi j) = \exp(-2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. La determinazione principale è 1, che si ha per $k = 0$.

Se w è reale positivo, in genere w^z denota la determinazione principale.

La potenza

Per $z \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni sono a due a due distinte.

Ad esempio, $1^j = \exp(j \cdot 2k\pi j) = \exp(-2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. La determinazione principale è 1, che si ha per $k = 0$.

Se w è reale positivo, in genere w^z denota la determinazione principale.

Ad esempio, e^z è una notazione imprecisa (la potenza avendo infinite determinazioni, in generale); più precisa è $\exp(z)$, che coincide con la determinazione principale.

La potenza

Per $z \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni sono a due a due distinte.

Ad esempio, $1^j = \exp(j \cdot 2k\pi j) = \exp(-2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. La determinazione principale è 1, che si ha per $k = 0$.

Se w è reale positivo, in genere w^z denota la determinazione principale.

Ad esempio, e^z è una notazione imprecisa (la potenza avendo infinite determinazioni, in generale); più precisa è $\exp(z)$, che coincide con la determinazione principale.

Con la convenzione introdotta, e^z indica $\exp(z)$.

Ampliamento del campo complesso

In $\mathbb{C}$ non si introduce un ordinamento.

Ampliamento del campo complesso

In $\mathbb{C}$ non si introduce un ordinamento.

Il campo complesso si amplia con l'aggiunta di un unico punto all'infinito, che indicheremo con ∞.

Ampliamento del campo complesso

In $\mathbb{C}$ non si introduce un ordinamento.

Il campo complesso si amplia con l'aggiunta di un unico punto all'infinito, che indicheremo con ∞.

Il campo complesso ampliato si denota con $\hat{\mathbb{C}}$.

Elementi di topologia

In $\mathbb{C}$ si adopera la struttura topologica di $\mathbb{R}^2$, che è indotta dalla *metrica euclidea*; se $z = x + j\,y$, $z_0 = x_0 + j\,y_0 \in \mathbb{C}$, $|z - z_0|$ rappresenta la loro distanza (la distanza tra le immagini nel piano):

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,.$$

Elementi di topologia

In $\mathbb{C}$ si adopera la struttura topologica di $\mathbb{R}^2$, che è indotta dalla *metrica euclidea*; se $z = x + j\,y$, $z_0 = x_0 + j\,y_0 \in \mathbb{C}$, $|z - z_0|$ rappresenta la loro distanza (la distanza tra le immagini nel piano):

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,.$$

Chiameremo *intorno* di $z_0 \in \mathbb{C}$ ogni cerchio aperto (privato della circonferenza che lo delimita) con centro nel punto, cioè

$$D(z_0\,;\,r) = \left\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - z_0| < r\right\},$$

dove r è un numero positivo.

Elementi di topologia

Un *intorno del punto all'infinito* ∞ è un insieme del tipo

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > r\},$$

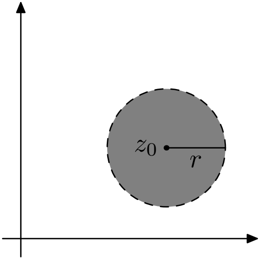
vale a dire, geometricamente, l'insieme dei punti esterni ad un cerchio con centro nell'origine.

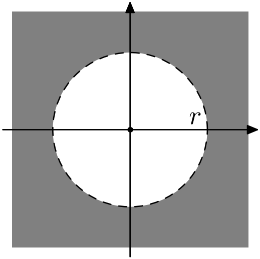
Elementi di topologia

Un *intorno del punto all'infinito* ∞ è un insieme del tipo

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z| > r \right\},$$

vale a dire, geometricamente, l'insieme dei punti esterni ad un cerchio con centro nell'origine.





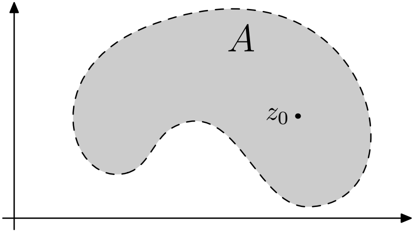
Un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *aperto* se ogni suo punto ha un intorno contenuto in A:

$$\forall z_0 \in A\,,\ \exists r > 0\ :\ D(z_0\,;\,r) \subseteq A\,.$$

Elementi di topologia

Un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *aperto* se ogni suo punto ha un intorno contenuto in A:

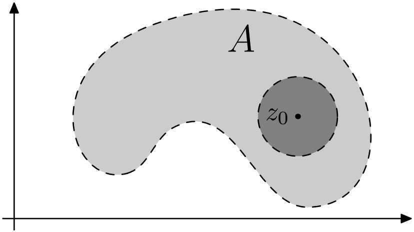
$$\forall z_0 \in A\,,\ \exists r > 0\ :\ D(z_0\,;\,r) \subseteq A\,.$$



Elementi di topologia

Un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *aperto* se ogni suo punto ha un intorno contenuto in A:

$$\forall z_0 \in A\,,\ \exists r > 0\ :\ D(z_0\,;\,r) \subseteq A\,.$$



Elementi di topologia

Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{C}$ si dice *chiuso* se il suo complementare $A = \mathbb{C} - C$ è aperto.

Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{C}$ si dice *chiuso* se il suo complementare $A = \mathbb{C} - C$ è aperto.

L'insieme vuoto $\emptyset$ e $\mathbb{C}$ sono sia aperti che chiusi.

Esempio

Un cerchio aperto secondo la terminologia introdotta precedentemente, cioè privato della circonferenza che lo delimita, è un insieme aperto secondo la definizione appena data.

Elementi di topologia

Esempio

Un cerchio aperto secondo la terminologia introdotta precedentemente, cioè privato della circonferenza che lo delimita, è un insieme aperto secondo la definizione appena data.

Assegnato il cerchio $D = D(z_0\,;\,r)$, dobbiamo mostrare che ogni suo punto ha un intorno contenuto in D. Se $z_1 \in D$, risulta $|z_1 - z_0| < r$, quindi $\rho = r - |z_1 - z_0| > 0$. Mostriamo che il cerchio $D(z_1\,;\,\rho)$ di centro z_1 e raggio ρ è contenuto in D, cioè

$$|z - z_1| < \rho \Rightarrow |z - z_0| < r\,.$$

Elementi di topologia

Esempio

Un cerchio aperto secondo la terminologia introdotta precedentemente, cioè privato della circonferenza che lo delimita, è un insieme aperto secondo la definizione appena data.

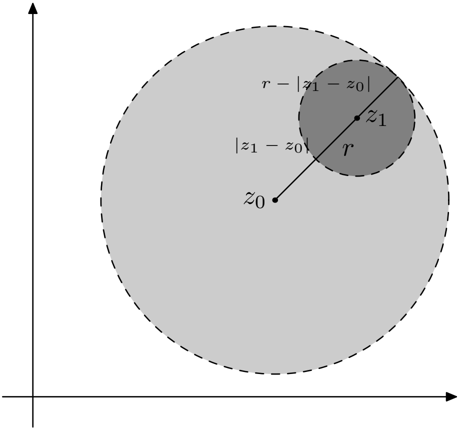
Assegnato il cerchio $D = D(z_0\,;\,r)$, dobbiamo mostrare che ogni suo punto ha un intorno contenuto in D. Se $z_1 \in D$, risulta $|z_1 - z_0| < r$, quindi $\rho = r - |z_1 - z_0| > 0$. Mostriamo che il cerchio $D(z_1\,;\,\rho)$ di centro z_1 e raggio ρ è contenuto in D, cioè

$$|z - z_1| < \rho \Rightarrow |z - z_0| < r\,.$$

Questo è immediata conseguenza della disuguaglianza triangolare:

$$|z - z_0| \le |z - z_1| + |z_1 - z_0| < \rho + |z_1 - z_0| = r\,.$$

Elementi di topologia



Elementi di topologia

Diremo *cerchio chiuso* ogni cerchio comprendente la circonferenza che lo delimita, cioè un insieme del tipo

$$\bar{D}(z_0\,;\,r) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq r \right\}.$$

Elementi di topologia

Diremo *cerchio chiuso* ogni cerchio comprendente la circonferenza che lo delimita, cioè un insieme del tipo

$$\bar{D}(z_0\,;\,r) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq r \right\}.$$

Con un ragionamento analogo al precedente, è facile vedere che esso è un insieme chiuso, nel senso che il complementare è aperto.

Elementi di topologia

Diremo *cerchio chiuso* ogni cerchio comprendente la circonferenza che lo delimita, cioè un insieme del tipo

$$\bar{D}(z_0\,;\,r) = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - z_0| \leq r\}\,.$$

Con un ragionamento analogo al precedente, è facile vedere che esso è un insieme chiuso, nel senso che il complementare è aperto.

L'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è aperta, come pure l'intersezione di una famiglia finita; simmetricamente, l'intersezione di una famiglia qualsiasi e l'unione di una famiglia finita di chiusi sono chiuse.

Elementi di topologia

Un aperto A si dice *connesso* se non può essere espresso come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, vale a dire

$$(A = A_1 \cup A_2\,,\ \text{con } A_1\,,\, A_2 \text{ aperti, } A_1 \cap A_2 = \emptyset\,) \Rightarrow (A_1 = \emptyset \text{ o } A_2 = \emptyset)$$

Elementi di topologia

Un aperto A si dice *connesso* se non può essere espresso come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, vale a dire

$$(A = A_1 \cup A_2\,,\ \text{con } A_1\,,\ A_2 \text{ aperti, } A_1 \cap A_2 = \emptyset\,) \Rightarrow (A_1 = \emptyset \text{ o } A_2 = \emptyset)$$

La nozione di connesso traduce l'idea intuitiva di insieme formato da un unico pezzo. $\mathbb{C}$ è connesso, quindi non esiste alcun sottoinsieme proprio e non vuoto che sia simultaneamente aperto e chiuso.

Elementi di topologia

Un aperto A si dice *connesso* se non può essere espresso come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, vale a dire

$$(A = A_1 \cup A_2\,,\ \text{con } A_1\,,\ A_2 \text{ aperti, } A_1 \cap A_2 = \emptyset\,) \Rightarrow (A_1 = \emptyset \text{ o } A_2 = \emptyset)$$

La nozione di connesso traduce l'idea intuitiva di insieme formato da un unico pezzo. $\mathbb{C}$ è connesso, quindi non esiste alcun sottoinsieme proprio e non vuoto che sia simultaneamente aperto e chiuso.

Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$ si dice *limitato* se esiste $K > 0$ tale che $|z| \leq K$, per ogni $z \in E$. Geometricamente, E è limitato se e solo se esiste un cerchio di centro l'origine che lo contiene. Un insieme chiuso e limitato si dice *compatto*.

Elementi di topologia

Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in E$ si dice *interno* ad E se esiste un suo intorno contenuto in E, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0\,;\,r) \subseteq E$.

Elementi di topologia

Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in E$ si dice *interno* ad E se esiste un suo intorno contenuto in E, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0\,;\,r) \subseteq E$.

Ad esempio, in un insieme aperto ogni punto è interno. L'insieme dei punti interni ad E si indica con $\mathring{E}$.

Elementi di topologia

Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in E$ si dice *interno* ad E se esiste un suo intorno contenuto in E, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0\,;\,r) \subseteq E$.

Ad esempio, in un insieme aperto ogni punto è interno. L'insieme dei punti interni ad E si indica con $\mathring{E}$.

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *esterno* ad E se è interno al complementare, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0\,;\,r) \cap E = \emptyset$.

Elementi di topologia

Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in E$ si dice *interno* ad E se esiste un suo intorno contenuto in E, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0\,;\,r) \subseteq E$.

Ad esempio, in un insieme aperto ogni punto è interno. L'insieme dei punti interni ad E si indica con $\mathring{E}$.

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *esterno* ad E se è interno al complementare, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0\,;\,r) \cap E = \emptyset$.

Un punto $z_0 \in E$ si dice *isolato* se possiede un intorno nel quale non cadono altri punti di E.

Elementi di topologia

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *di accumulazione* per $E \subseteq \mathbb{C}$ se in ogni suo intorno cadono punti di E distinti da esso.

Elementi di topologia

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *di accumulazione* per $E \subseteq \mathbb{C}$ se in ogni suo intorno cadono punti di E distinti da esso.

Intuitivamente, z_0 di accumulazione per E significa che, muovendosi nell'insieme E, ci si può avvicinare arbitrariamente a z_0, ma rimanendo a distanza positiva da esso.

Elementi di topologia

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *di accumulazione* per $E \subseteq \mathbb{C}$ se in ogni suo intorno cadono punti di E distinti da esso.

Intuitivamente, z_0 di accumulazione per E significa che, muovendosi nell'insieme E, ci si può avvicinare arbitrariamente a z_0, ma rimanendo a distanza positiva da esso.

Osserviamo che le due proprietà: $z_0 \in E$; z_0 di accumulazione per E; sono indipendenti tra loro. Un punto di E che non sia di accumulazione per l'insieme è punto isolato dell'insieme.

Elementi di topologia

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *di accumulazione* per $E \subseteq \mathbb{C}$ se in ogni suo intorno cadono punti di E distinti da esso.

Intuitivamente, z_0 di accumulazione per E significa che, muovendosi nell'insieme E, ci si può avvicinare arbitrariamente a z_0, ma rimanendo a distanza positiva da esso.

Osserviamo che le due proprietà: $z_0 \in E$; z_0 di accumulazione per E; sono indipendenti tra loro. Un punto di E che non sia di accumulazione per l'insieme è punto isolato dell'insieme.

L'unione di E con l'insieme dei suoi punti di accumulazione si dice *chiusura* di E:

$$\overline{E} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z \in E \text{ o } z \text{ di accumulazione per } E\} .$$

Si dice frontiera di $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme

$$FE = \partial E = \overline{E} \cap \overline{(\mathbb{C} - E)}\,.$$

Elementi di topologia

Si dice frontiera di $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme

$$FE = \partial E = \overline{E} \cap \overline{(\mathbb{C} - E)}\,.$$

La nozione di punto di accumulazione si applica anche al punto all'infinito ∞, essendo stati definiti gli intorni di tale punto. È immediato verificare che

$$\infty \text{ di accumulazione per } E \iff E \text{ non limitato.}$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Una funzione complessa è una funzione a valori in $\mathbb{C}$; una funzione di variabile complessa è una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Pertanto, una funzione complessa di variabile complessa è una funzione del tipo

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,.$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Una funzione complessa è una funzione a valori in $\mathbb{C}$; una funzione di variabile complessa è una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Pertanto, una funzione complessa di variabile complessa è una funzione del tipo

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,.$$

Scriveremo $w = f(z)$, $z \in \Omega$. Dal punto di vista insiemistico, assegnare una funzione complessa di variabile complessa equivale ad assegnare una funzione complessa di due variabili reali, o una coppia di funzioni reali di due variabili reali.

Funzioni complesse di variabile complessa

Una funzione complessa è una funzione a valori in $\mathbb{C}$; una funzione di variabile complessa è una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Pertanto, una funzione complessa di variabile complessa è una funzione del tipo

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} .$$

Scriveremo $w = f(z)$, $z \in \Omega$. Dal punto di vista insiemistico, assegnare una funzione complessa di variabile complessa equivale ad assegnare una funzione complessa di due variabili reali, o una coppia di funzioni reali di due variabili reali.

In effetti, scrivendo $z = x + j\,y$ e $w = u + j\,v$ in forma algebrica, abbiamo

$$w = f(z) = f(x, y) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) . \qquad (28)$$

Siano assegnati $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ punto di accumulazione per Ω e $\ell \in \mathbb{C}$.

Funzioni complesse di variabile complessa

Siano assegnati $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ punto di accumulazione per Ω e $\ell \in \mathbb{C}$.

Diremo che ℓ è *il limite* di f in z_0, o anche che $f(z)$ *converge* a ℓ per z tendente a z_0, e scriveremo

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z)\,, \qquad \text{o anche} \qquad f(z) \to \ell \text{ per } z \to z_0\,,$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Siano assegnati $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ punto di accumulazione per Ω e $\ell \in \mathbb{C}$.

Diremo che ℓ è *il limite* di f in z_0, o anche che $f(z)$ *converge* a ℓ per z tendente a z_0, e scriveremo

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z)\,, \qquad \text{o anche} \qquad f(z) \to \ell \text{ per } z \to z_0\,,$$

se vale la ben nota condizione:

$\mathscr{L}$) *comunque si fissi un intorno I di ℓ, è possibile trovare un intorno J di z_0, tale che i valori assunti da f nei punti (di Ω) che cadono in J e sono distinti da z_0 appartengano a I.*

Funzioni complesse di variabile complessa

Tenendo presente che gli intorni di un punto al finito sono i cerchi con centro in tale punto, possiamo riscrivere la definizione di limite come segue:

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\delta > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Tenendo presente che gli intorni di un punto al finito sono i cerchi con centro in tale punto, possiamo riscrivere la definizione di limite come segue:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Ricordiamo che, per parlare di limite di f in z_0, non occorre che la funzione sia definita nel punto e che, anche se $z_0 \in \Omega$, l'esistenza del limite e l'eventuale valore di questo sono indipendenti da $f(z_0)$.

Tenendo presente che gli intorni di un punto al finito sono i cerchi con centro in tale punto, possiamo riscrivere la definizione di limite come segue:

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\delta > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Ricordiamo che, per parlare di limite di f in z_0, non occorre che la funzione sia definita nel punto e che, anche se $z_0 \in \Omega$, l'esistenza del limite e l'eventuale valore di questo sono indipendenti da $f(z_0)$.

Si estendono facilmente tutte le proprietà del limite note nel caso delle funzioni reali di variabile reale, nelle quali non intervenga l'ordinamento di $\mathbb{R}$: così, ad esempio, valgono l'unicità del limite, i teoremi sul limite di somma, prodotto, rapporto.

Nel caso della convergenza, possiamo riformulare la definizione di limite in termini di parte reale e coefficiente dell'immaginario.

Funzioni complesse di variabile complessa

Nel caso della convergenza, possiamo riformulare la definizione di limite in termini di parte reale e coefficiente dell'immaginario.

Scritti $z_0 = x_0 + j\,y_0$, $\ell = \mu + j\,\nu$ e $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ in forma algebrica, risulta

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z) \iff \begin{cases} \mu = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \\ \nu = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \end{cases}$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Nel caso della convergenza, possiamo riformulare la definizione di limite in termini di parte reale e coefficiente dell'immaginario.

Scritti $z_0 = x_0 + j\,y_0$, $\ell = \mu + j\,\nu$ e $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ in forma algebrica, risulta

$$\ell = \lim_{z \to z_0} f(z) \iff \begin{cases} \mu = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \\ \nu = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \end{cases}$$

L'equivalenza è facile conseguenza delle disuguaglianze

$$\left.\begin{array}{l} |\mu - u| \\ |\nu - v| \end{array}\right\} \le |\ell - f| \le |\mu - u| + |\nu - v|\,.$$

Funzioni complesse di variabile complessa

La definizione di limite data in termini di intorni si estende al caso del limite infinito.

Funzioni complesse di variabile complessa

La definizione di limite data in termini di intorni si estende al caso del limite infinito.

In questo caso diremo che ∞ è il limite di f in z_0, o anche che $f(z)$ *diverge* per $z \to z_0$, e scriveremo

$$\infty = \lim_{z \to z_0} f(z) \, .$$

La definizione di limite data in termini di intorni si estende al caso del limite infinito.

In questo caso diremo che ∞ è il limite di f in z_0, o anche che $f(z)$ *diverge* per $z \to z_0$, e scriveremo

$$\infty = \lim_{z \to z_0} f(z) \, .$$

Ricordando come sono fatti gli intorni del punto all'infinito, vediamo che divergenza significa che vale la condizione

$$\forall K > 0 \, , \; \exists \delta > 0 \; : \; (z \in \Omega \, , \; 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z)| > K \, ,$$

ovvero ancora che $|f|$ diverge positivamente.

Se ∞ è di accumulazione per Ω, cioè l'insieme non è limitato, si dà la definizione di limite nel punto all'infinito. È chiaro che $f(z)$ converge a $\ell \in \mathbb{C}$ per $z \to \infty$,

$$\ell = \lim_{z \to \infty} f(z)\,,$$

significa che vale la condizione

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists M > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z| > M) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Se ∞ è di accumulazione per Ω, cioè l'insieme non è limitato, si dà la definizione di limite nel punto all'infinito. È chiaro che $f(z)$ converge a $\ell \in \mathbb{C}$ per $z \to \infty$,

$$\ell = \lim_{z \to \infty} f(z)\,,$$

significa che vale la condizione

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists M > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z| > M) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Analogamente, $\infty = \lim_{z \to \infty} f(z)$ significa che

$$\forall K > 0\,,\ \exists M > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z| > M) \Rightarrow |f(z)| > K\,.$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Se ∞ è di accumulazione per Ω, cioè l'insieme non è limitato, si dà la definizione di limite nel punto all'infinito. È chiaro che $f(z)$ converge a $\ell \in \mathbb{C}$ per $z \to \infty$,

$$\ell = \lim_{z\to\infty} f(z)\,,$$

significa che vale la condizione

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists M > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z| > M) \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Analogamente, $\infty = \lim_{z\to\infty} f(z)$ significa che

$$\forall K > 0\,,\ \exists M > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z| > M) \Rightarrow |f(z)| > K\,.$$

Se f ammette limite, finito o infinito, in z_0, si dice che f è *regolare* nel punto.

Funzioni complesse di variabile complessa

Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.

Funzioni complesse di variabile complessa

Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.

La funzione f si dice *continua* in z_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$$

Funzioni complesse di variabile complessa

Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.

La funzione f si dice *continua* in z_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$$

Tale condizione vale banalmente se z_0 è punto isolato di Ω.

Funzioni complesse di variabile complessa

Siano $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.

La funzione f si dice *continua* in z_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\ :\ (z \in \Omega\,,\ |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,.$$

Tale condizione vale banalmente se z_0 è punto isolato di Ω.

Se z_0 è di accumulazione, essa chiaramente significa

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)\,.$$

Successioni complesse

Una successione a termini complessi è una funzione

$$n \in \mathbb{N} \quad \mapsto \quad z_n \in \mathbb{C}\,.$$

Successioni complesse

Una successione a termini complessi è una funzione

$$n \in \mathbb{N} \quad \mapsto \quad z_n \in \mathbb{C}\,.$$

Usualmente la indicheremo con

$$z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\,,\, z_n\,, \ldots \qquad \text{o anche con} \qquad (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Successioni complesse

Una successione a termini complessi è una funzione

$$n \in \mathbb{N} \quad \mapsto \quad z_n \in \mathbb{C}\,.$$

Usualmente la indicheremo con

$$z_1\,,\ z_2\,,\ \ldots\,,\ z_n\,,\ldots \qquad \text{o anche con} \qquad (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

La definizione di limite si particolarizza facilmente nel caso delle successioni. Ad esempio, nel caso della convergenza,

$$\ell = \lim_n z_n$$

significa che

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\nu \in \mathbb{N}:\ n > \nu \Rightarrow |\ell - z_n| < \varepsilon\,.$$

Successioni complesse

Verificare la convergenza in base alla definizione richiede la conoscenza del limite.

Successioni complesse

Verificare la convergenza in base alla definizione richiede la conoscenza del limite.

Il seguente *criterio di convergenza di Cauchy* fornisce una caratterizzazione della convergenza, che non fa intervenire il limite.

Successioni complesse

Verificare la convergenza in base alla definizione richiede la conoscenza del limite.

Il seguente *criterio di convergenza di Cauchy* fornisce una caratterizzazione della convergenza, che non fa intervenire il limite.

Teorema

La successione $(z_n)_n$ *converge se e solo se* $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\nu \in \mathbb{N}$*:* $m, n > \nu \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$.

Successioni complesse

Verificare la convergenza in base alla definizione richiede la conoscenza del limite.

Il seguente *criterio di convergenza di Cauchy* fornisce una caratterizzazione della convergenza, che non fa intervenire il limite.

Teorema

La successione $(z_n)_n$ *converge se e solo se* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$: $m, n > \nu \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$.

Ogni successione convergente verifica banalmente la condizione del criterio di Cauchy. L'implicazione inversa costituisce la *proprietà di completezza* di $\mathbb{C}$.

Successioni complesse

Esempio

Consideriamo la successione $(z^n)_n$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato.

Successioni complesse

Esempio

Consideriamo la successione $(z^n)_n$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato.

Per $|z| < 1$ la successione è *infinitesima*:

Successioni complesse

Esempio

Consideriamo la successione $(z^n)_n$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato.

Per $|z| < 1$ la successione è *infinitesima*:

risulta $|z^n| = |z|^n$ ed è noto che la successione reale $n \mapsto \rho^n$ è infinitesima per $0 \leq \rho < 1$.

Successioni complesse

Esempio

Consideriamo la successione $(z^n)_n$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato.

Per $|z| < 1$ la successione è *infinitesima*:

risulta $|z^n| = |z|^n$ ed è noto che la successione reale $n \mapsto \rho^n$ è infinitesima per $0 \leq \rho < 1$.

Analogamente, la successione è divergente per $|z| > 1$.

Successioni complesse

Esempio

Consideriamo la successione $(z^n)_n$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato.

Per $|z| < 1$ la successione è *infinitesima*:

risulta $|z^n| = |z|^n$ ed è noto che la successione reale $n \mapsto \rho^n$ è infinitesima per $0 \leq \rho < 1$.

Analogamente, la successione è divergente per $|z| > 1$.

Per $z = 1$ la successione vale costantemente 1.

Successioni complesse

Esempio (continuazione)

Per $|z| = 1$, ma $z \neq 1$, la successione non è regolare.

Successioni complesse

Esempio (continuazione)

Per $|z| = 1$, ma $z \neq 1$, la successione non è regolare.

Infatti la successione è limitata, quindi non diverge.

Successioni complesse

Esempio (continuazione)

Per $|z| = 1$, ma $z \neq 1$, la successione non è regolare.

Infatti la successione è limitata, quindi non diverge.

Inoltre,

$$|z_{n+1} - z_n| = |z^{n+1} - z^n| = |z^n(z-1)| = |z-1| > 0$$

quindi non vale la condizione di Cauchy e la successione non converge.

Serie a termini complessi

Ricordiamo che il concetto di serie si introduce per estendere l'operazione di addizione agli infiniti termini di una successione.

Serie a termini complessi

Ricordiamo che il concetto di serie si introduce per estendere l'operazione di addizione agli infiniti termini di una successione.

Assegnata una successione complessa $(z_n)_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \tag{29}$$

indica formalmente la corrispondenza che associa alla $(z_n)_n$ la sua *successione delle somme parziali* $(s_n)_n$, definita ponendo

$$s_1 = z_1 \,, \quad s_2 = z_1 + z_2 \,, \ldots \,, \quad s_n = z_1 + \cdots + z_n \,, \ldots$$

Serie a termini complessi

Ricordiamo che il concetto di serie si introduce per estendere l'operazione di addizione agli infiniti termini di una successione.

Assegnata una successione complessa $(z_n)_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \tag{29}$$

indica formalmente la corrispondenza che associa alla $(z_n)_n$ la sua *successione delle somme parziali* $(s_n)_n$, definita ponendo

$$s_1 = z_1\,, \quad s_2 = z_1 + z_2\,, \ldots, \quad s_n = z_1 + \cdots + z_n\,, \ldots$$

La serie si dice *convergente o divergente*, a seconda che tale sia $(s_n)_n$. Nel caso di convergenza, il limite della successione delle somme parziali si dice *somma* della serie; per indicare che $s = \lim s_n$, si scrive $s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.

Serie a termini complessi

La serie si dice *indeterminata* (o *oscillante*) se $(s_n)_n$ non è regolare.

Serie a termini complessi

La serie si dice *indeterminata* (o *oscillante*) se $(s_n)_n$ non è regolare.

Si dice *carattere* della serie la proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

Serie a termini complessi

La serie si dice *indeterminata* (o *oscillante*) se $(s_n)_n$ non è regolare.

Si dice *carattere* della serie la proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

È ben noto che condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \text{ è convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim z_n = 0\,.$$

Serie a termini complessi

La serie si dice *indeterminata* (o *oscillante*) se $(s_n)_n$ non è regolare.

Si dice *carattere* della serie la proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

È ben noto che condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \text{ è convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim z_n = 0\,.$$

La condizione non è sufficiente, come mostra ad esempio la *serie armonica*:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Serie a termini complessi

Data la serie complessa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \, ,$$

Serie a termini complessi

Data la serie complessa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \,,$$

scrivendo $z_n = x_n + j\, y_n$ in forma algebrica, possiamo considerare le due serie reali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \,.$$

Serie a termini complessi

Data la serie complessa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \,,$$

scrivendo $z_n = x_n + j\,y_n$ in forma algebrica, possiamo considerare le due serie reali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \,.$$

È chiaro che la serie complessa è convergente se e solo se tali risultano queste ultime, e in tal caso vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\right) + j\left(\sum_{n=1}^{+\infty} y_n\right) .$$

Serie a termini complessi

Il criterio di convergenza di Cauchy può essere riformulato per le serie.

Serie a termini complessi

Il criterio di convergenza di Cauchy può essere riformulato per le serie.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$, si dice *resto parziale* della serie (29) di indici n e k l'espressione

$$r_{n,k} = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k} = s_{n+k} - s_n \,.$$

Serie a termini complessi

Il criterio di convergenza di Cauchy può essere riformulato per le serie.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$, si dice *resto parziale* della serie (29) di indici n e k l'espressione

$$r_{n,k} = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k} = s_{n+k} - s_n \,.$$

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \,,$$

converga è che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$: $\forall n > \nu$ *e* $\forall k \in \mathbb{N}$, *risulti* $|r_{n,k}| < \varepsilon$.

Serie a termini complessi

Definizione

Si dice che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \, ,$$

converge assolutamente se risulta convergente la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$.

La serie dei moduli è a termini non-negativi e quindi o converge o diverge, non è indeterminata.

Serie a termini complessi

Definizione

Si dice che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \, ,$$
converge assolutamente se risulta convergente la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$.

La serie dei moduli è a termini non-negativi e quindi o converge o diverge, non è indeterminata.

Proposizione

Una serie assolutamente convergente è convergente.

Serie a termini complessi

La serie *armonica a segni alterni*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

è convergente, ma non assolutamente convergente; dunque il risultato precedente non si inverte.

Serie a termini complessi

La serie *armonica a segni alterni*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

è convergente, ma non assolutamente convergente; dunque il risultato precedente non si inverte.

Una serie che converge, ma non assolutamente, è detta *semplicemente convergente*.

Serie a termini complessi

Esempio

Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \tag{30}$$

(per $z = 0$, poniamo qui $0^0 = 1$) si dice *serie geometrica di ragione* z. La successione del termine generale è $(z^n)_n$, considerata precedentemente.

Serie a termini complessi

Esempio

Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \tag{30}$$

(per $z = 0$, poniamo qui $0^0 = 1$) si dice *serie geometrica di ragione* z. La successione del termine generale è $(z^n)_n$, considerata precedentemente.

Il carattere della serie geometrica dipende dalla ragione z. Evidentemente, per $z = 1$ la serie diverge.

Serie a termini complessi

Esempio (continuazione)

Per $z \neq 1$, consideriamo le somme parziali

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \, .$$

Serie a termini complessi

Esempio (continuazione)

Per $z \neq 1$, consideriamo le somme parziali

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,.$$

Dobbiamo esaminare il comportamento di (s_n) per $n \to +\infty$.

Esempio (continuazione)

Per $z \neq 1$, consideriamo le somme parziali

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,.$$

Dobbiamo esaminare il comportamento di (s_n) per $n \to +\infty$.

Risultando $\lim z^{n+1} = 0$ per $|z| < 1$, per tali z la serie converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ \text{con } |z| < 1\,.$$

Serie a termini complessi

Esempio (continuazione)

Per $z \neq 1$, consideriamo le somme parziali

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,.$$

Dobbiamo esaminare il comportamento di (s_n) per $n \to +\infty$.

Risultando $\lim z^{n+1} = 0$ per $|z| < 1$, per tali z la serie converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ \text{con } |z| < 1\,.$$

In effetti, la convergenza è assoluta, in quanto la serie dei moduli è la serie geometrica di ragione $|z| < 1$, che converge.

Serie a termini complessi

Esempio (continuazione)

Analogamente, risultando $\lim z^n = \infty$ per $|z| > 1$, per tali valori di z la serie diverge (nel campo complesso).

Serie a termini complessi

Esempio (continuazione)

Analogamente, risultando $\lim z^n = \infty$ per $|z| > 1$, per tali valori di z la serie diverge (nel campo complesso).

Resta da considerare il caso $|z| = 1$, ma $z \neq 1$. In tal caso la serie non può convergere, poiché il termine generale non è infinitesimo. D'altra parte, la serie non diverge, essendo la successione delle somme parziali limitata:

$$|s_n| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|} \, .$$

Pertanto la serie è indeterminata.

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Richiamiamo alcuni criteri di convergenza per le serie a termini non-negativi, che forniranno altrettanti criteri di convergenza assoluta per le serie complesse.

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Richiamiamo alcuni criteri di convergenza per le serie a termini non-negativi, che forniranno altrettanti criteri di convergenza assoluta per le serie complesse.

I criteri seguenti sono stabiliti per confronto. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non-negativi. Se vale la relazione $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (o anche solo per n abbastanza grande), la prima serie si dice maggiorata dalla seconda, o la seconda minorata dalla prima (definitivamente).

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Richiamiamo alcuni criteri di convergenza per le serie a termini non-negativi, che forniranno altrettanti criteri di convergenza assoluta per le serie complesse.

I criteri seguenti sono stabiliti per confronto. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non-negativi. Se vale la relazione $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (o anche solo per n abbastanza grande), la prima serie si dice maggiorata dalla seconda, o la seconda minorata dalla prima (definitivamente).

Evidentemente, in questo caso valgono le implicazioni:

$$\sum b_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ converge};$$
$$\sum a_n \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum b_n \text{ diverge}.$$

Proposizione (Criterio del rapporto)

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, tale che il limite

$$\ell = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$$

esista. Se risulta $\ell < 1$, la serie converge. Se risulta $\ell > 1$, la serie diverge.

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Proposizione (Criterio della radice)

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non-negativi, tale che il limite

$$\ell = \lim_n \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty]$$

esista. Se risulta $\ell < 1$, la serie converge. Se risulta $\ell > 1$, la serie diverge.

Proposizione (Criterio della radice)

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non-negativi, tale che il limite

$$\ell = \lim_n \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty]$$

esista. Se risulta $\ell < 1$, la serie converge. Se risulta $\ell > 1$, la serie diverge.

Nel caso $\ell = 1$ entrambi i criteri non sono applicabili.

Proposizione (Criterio dell'integrale)

Sia

$$\varphi\colon [1,+\infty[\, \to [0,+\infty[$$

una funzione decrescente. La convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$$

equivale alla sommabilità della funzione φ *su* $[1,+\infty[$.

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Proposizione (Criterio dell'integrale)

Sia

$$\varphi\colon [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$

una funzione decrescente. La convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$$

equivale alla sommabilità della funzione φ su $[1, +\infty[$.

Sulla nozione di sommabilità torneremo in seguito.

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Scegliendo $\varphi(t) = t^{-p}$, con $p > 0$, vediamo che la *serie armonica generalizzata* di esponente p

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{31}$$

converge se e solo se $p > 1$. A tale serie non è applicabile il criterio del rapporto, né quello della radice, il limite da studiare essendo 1.

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Scegliendo $\varphi(t) = t^{-p}$, con $p > 0$, vediamo che la *serie armonica generalizzata* di esponente p

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{31}$$

converge se e solo se $p > 1$. A tale serie non è applicabile il criterio del rapporto, né quello della radice, il limite da studiare essendo 1.

Osservazione

Il caso della divergenza è chiaro per confronto, poiché per $p < 1$ la serie è minorata dalla serie armonica ($p = 1$).

Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Per confronto con la serie armonica generalizzata, si ottiene il seguente *criterio dell'ordine di infinitesimo*.

Proposizione

Sia data $\sum a_n$ *una serie a termini non-negativi. (a) Se esistono due costanti* $K > 0$ *e* $p > 1$ *tali che risulti* $a_n \leq K\, n^{-p}$ *per* n *abbastanza grande, la serie converge. (b) Se esiste una costante* $K > 0$ *tale che per* n *abbastanza grande risulti* $a_n \geq K\, n^{-1}$*, la serie diverge.*

Per confronto con la serie armonica generalizzata, si ottiene il seguente *criterio dell'ordine di infinitesimo*.

Proposizione

Sia data $\sum a_n$ *una serie a termini non-negativi. (a) Se esistono due costanti* $K > 0$ *e* $p > 1$ *tali che risulti* $a_n \leq K\, n^{-p}$ *per* n *abbastanza grande, la serie converge. (b) Se esiste una costante* $K > 0$ *tale che per* n *abbastanza grande risulti* $a_n \geq K\, n^{-1}$*, la serie diverge.*

Nel caso (a) si dice che a_n è infinitesimo di ordine non inferiore a p (rispetto all'infinitesimo campione n^{-1}), per $n \to +\infty$, e si scrive $a_n = O(n^{-p})$ (che si legge "a_n è o grande di n^{-p}").