

Trasformazione di Laplace

Luigi Greco

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli “Federico II”



Anno Accademico 2022/2023

Trasformazione di Laplace

La trasformazione di Laplace presenta diverse analogie con la \mathcal{Z} -trasformazione, sia per quanto riguarda la teoria, sia per i problemi che si risolvono mediante le due trasformazioni.

Trasformazione di Laplace

La trasformazione di Laplace presenta diverse analogie con la \mathcal{Z} -trasformazione, sia per quanto riguarda la teoria, sia per i problemi che si risolvono mediante le due trasformazioni.

- La trasformata di Laplace
- Proprietà fondamentali
- Proprietà formali
- La trasformata della convoluzione
- Trasformata unilatera di segnali periodici
- Antitrasformazione
- Applicazioni

La trasformata di Laplace

Definizione

Sia $x \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[)$. Si dice che x è trasformabile (in senso unilatero) in $s \in \mathbb{C}$ se

$$t \mapsto x(t) e^{-s t}$$

è integrabile in $[0, +\infty[$.

La trasformata di Laplace

Definizione

Sia $x \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[)$. Si dice che x è trasformabile (in senso unilatero) in $s \in \mathbb{C}$ se

$$t \mapsto x(t) e^{-st}$$

è integrabile in $[0, +\infty[$.

La trasformata unilatera di x è la funzione di variabile complessa

$$\mathcal{L}_u[x] = X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x(t) e^{-st} dt. \quad (1)$$

La trasformata di Laplace

Definizione

Sia $x \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[)$. Si dice che x è trasformabile (in senso unilatero) in $s \in \mathbb{C}$ se

$$t \mapsto x(t) e^{-st}$$

è integrabile in $[0, +\infty[$.

La trasformata unilatera di x è la funzione di variabile complessa

$$\mathcal{L}_u[x] = X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x(t) e^{-st} dt. \quad (1)$$

Si dice che x è assolutamente trasformabile in $s \in \mathbb{C}$ se $t \mapsto x(t) e^{-st}$ è sommabile in $[0, +\infty[$.

La trasformata di Laplace

È chiaro che l'assoluta trasformabilità implica la trasformabilità.

La trasformata di Laplace

È chiaro che l'assoluta trasformabilità implica la trasformabilità.

Fondamentale è il seguente

Teorema

Se il segnale x è \mathcal{L}_u -trasformabile in $s_0 \in \mathbb{C}$, esso è trasformabile anche in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > \text{Re } s_0$.

La trasformata di Laplace

È chiaro che l'assoluta trasformabilità implica la trasformabilità.

Fondamentale è il seguente

Teorema

Se il segnale x è \mathcal{L}_u -trasformabile in $s_0 \in \mathbb{C}$, esso è trasformabile anche in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > \text{Re } s_0$.

La trasformabilità significa integrabilità della funzione integranda.

La trasformata di Laplace

È chiaro che l'assoluta trasformabilità implica la trasformabilità.

Fondamentale è il seguente

Teorema

Se il segnale x è \mathcal{L}_u -trasformabile in $s_0 \in \mathbb{C}$, esso è trasformabile anche in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > \text{Re } s_0$.

La trasformabilità significa integrabilità della funzione integranda.

Riguardo al teorema, ci limitiamo ad osservare che un risultato analogo a proposito della assoluta trasformabilità è banale, poiché

$$\text{Re } s > \text{Re } s_0 \quad \Rightarrow \quad |x(t) e^{-s t}| \leq |x(t) e^{-s_0 t}|, \text{ per q.o. } t \geq 0.$$

La trasformata di Laplace

La quantità

$$\sigma_x = \inf \{ \operatorname{Re} s : x \text{ è trasformabile in } s \} \quad (2)$$

si chiama *ascissa di convergenza*.

La trasformata di Laplace

La quantità

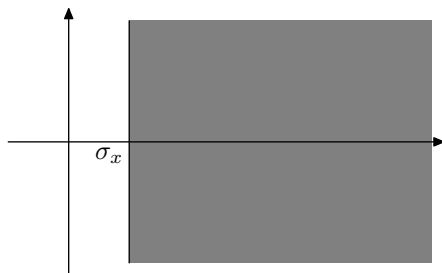
$$\sigma_x = \inf \{ \operatorname{Re} s : x \text{ è trasformabile in } s \} \quad (2)$$

si chiama *ascissa di convergenza*.

La trasformata $X(s)$ è dunque definita nel *semipiano di convergenza* formato dai numeri $s \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Re} s > \sigma_x .$$

La trasformata di Laplace



Notiamo che il semipiano di convergenza coincide con l'intero piano complesso nel caso $\sigma_x = -\infty$.

La trasformata di Laplace

Nelle applicazioni, useremo la trasformata unilatera; è comodo però considerare la trasformata bilatera.

La trasformata di Laplace

Nelle applicazioni, useremo la trasformata unilatera; è comodo però considerare la trasformata bilatera.

Definizione

Sia $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Si dice che x è trasformabile secondo Laplace in $s \in \mathbb{C}$ se

$$t \mapsto x(t) e^{-s t}$$

è integrabile in \mathbb{R} .

La trasformata di Laplace

Nelle applicazioni, useremo la trasformata unilatera; è comodo però considerare la trasformata bilatera.

Definizione

Sia $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Si dice che x è trasformabile secondo Laplace in $s \in \mathbb{C}$ se

$$t \mapsto x(t) e^{-s t}$$

è integrabile in \mathbb{R} .

La trasformata (bilatera) di x è la funzione di variabile complessa

$$\mathcal{L}[x] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-s t} dt. \quad (3)$$

La trasformata di Laplace

Nelle applicazioni, useremo la trasformata unilatera; è comodo però considerare la trasformata bilatera.

Definizione

Sia $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Si dice che x è trasformabile secondo Laplace in $s \in \mathbb{C}$ se

$$t \mapsto x(t) e^{-st}$$

è integrabile in \mathbb{R} .

La trasformata (bilatera) di x è la funzione di variabile complessa

$$\mathcal{L}[x] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (3)$$

Si dice che x è assolutamente trasformabile in s se $t \mapsto x(t) e^{-st}$ è sommabile in \mathbb{R} .

La trasformata di Laplace

L'integrabilità in \mathbb{R} vuol dire integrabilità in $] -\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

dove ciascuno dei due integrali a secondo membro è inteso come limite.

La trasformata di Laplace

L'integrabilità in \mathbb{R} vuol dire integrabilità in $] -\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

dove ciascuno dei due integrali a secondo membro è inteso come limite.

L'ultimo integrale è la trasformata unilatera del segnale x .

La trasformata di Laplace

L'integrabilità in \mathbb{R} vuol dire integrabilità in $] -\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

dove ciascuno dei due integrali a secondo membro è inteso come limite.

L'ultimo integrale è la trasformata unilatera del segnale x .

Il primo integrale a secondo membro mutando t in $-t$ si riscrive

$$\int_0^{+\infty} x(-t) e^{-(-s)t} dt$$

ed è la trasformata unilatera di $t \mapsto x(-t)$, valutata in $-s$.

La trasformata di Laplace

Pertanto

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}_u[x(-t)](-s) + \mathcal{L}_u[x(t)](s). \quad (4)$$

La trasformata di Laplace

Pertanto

$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}_u[x(-t)](-s) + \mathcal{L}_u[x(t)](s). \quad (4)$$

Dette σ_1 l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}_u[x(t)]$ e $-\sigma_2$ l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}_u[x(-t)]$, il secondo termine a secondo membro di (4) è definito per $\operatorname{Re} s > \sigma_1$, mentre il primo per $\operatorname{Re}(-s) > -\sigma_2$, ovvero $\operatorname{Re} s < \sigma_2$.

La trasformata di Laplace

Pertanto

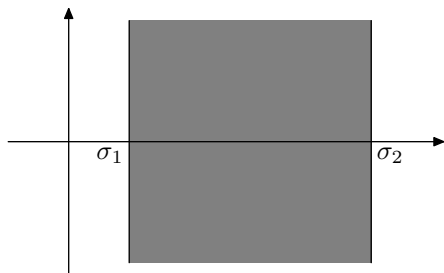
$$\mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}_u[x(-t)](-s) + \mathcal{L}_u[x(t)](s). \quad (4)$$

Dette σ_1 l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}_u[x(t)]$ e $-\sigma_2$ l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}_u[x(-t)]$, il secondo termine a secondo membro di (4) è definito per $\operatorname{Re} s > \sigma_1$, mentre il primo per $\operatorname{Re}(-s) > -\sigma_2$, ovvero $\operatorname{Re} s < \sigma_2$.

Noi supporremo $\sigma_1 < \sigma_2$ e quindi la trasformata bilatera $\mathcal{L}[x(t)]$ è definita nella striscia verticale, detta *striscia di convergenza*, degli $s \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2.$$

La trasformata di Laplace



La striscia di convergenza, che può essere un semipiano destro ($\sigma_2 = +\infty$) o sinistro ($\sigma_1 = -\infty$) o l'intero piano complesso, è detta *dominio della trasformata*.

La trasformata di Laplace

La (4) esprime la trasformata bilatera come somma di trasformate unilateri.

La trasformata di Laplace

La (4) esprime la trasformata bilatera come somma di trasformate unilatera.

D'altra parte chiaramente la trasformata unilatera è un caso particolare della bilatera:

$$\mathcal{L}_u[x(t)] = \mathcal{L}[x(t) u(t)]. \quad (5)$$

La trasformata di Laplace

La (4) esprime la trasformata bilatera come somma di trasformate unilatera.

D'altra parte chiaramente la trasformata unilatera è un caso particolare della bilatera:

$$\mathcal{L}_u[x(t)] = \mathcal{L}[x(t) u(t)]. \quad (5)$$

Prevalentemente ci occuperemo della trasformata bilatera, limitandoci ad indicare le modifiche per la trasformata unilatera.

La trasformata di Laplace

La trasformazione (bilatera o unilatera) è la corrispondenza che associa al segnale trasformabile la sua trasformata:

$$\mathcal{L}: x \mapsto \mathcal{L}[x], \quad \mathcal{L}_u: x \mapsto \mathcal{L}_u[x].$$

La trasformata di Laplace

La trasformazione (bilatera o unilatera) è la corrispondenza che associa al segnale trasformabile la sua trasformata:

$$\mathcal{L}: x \mapsto \mathcal{L}[x], \quad \mathcal{L}_u: x \mapsto \mathcal{L}_u[x].$$

Evidentemente sono operatori lineari: se x e y sono trasformabili in una stessa striscia verticale e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha x + \beta y$ è trasformabile e risulta

$$\mathcal{L}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{L}[x] + \beta \mathcal{L}[y].$$

La trasformata di Laplace

Vediamo qualche esempio di \mathcal{L} -trasformata.

La trasformata di Laplace

Vediamo qualche esempio di \mathcal{L} -trasformata.

In base alla definizione, abbiamo

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}_u[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (6)$$

La trasformata di Laplace

Vediamo qualche esempio di \mathcal{L} -trasformata.

In base alla definizione, abbiamo

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}_u[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (6)$$

Analogamente

$$\mathcal{L}[-u(-t)] = - \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s < 0. \quad (7)$$

La trasformata di Laplace

Vediamo qualche esempio di \mathcal{L} -trasformata.

In base alla definizione, abbiamo

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}_u[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (6)$$

Analogamente

$$\mathcal{L}[-u(-t)] = - \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s < 0. \quad (7)$$

Confrontando (6) e (7) appare chiara la necessità di indicare il dominio della trasformata.

La trasformata di Laplace

Altre semplici trasformate sono

$$\mathcal{L}[u(t - t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-s t} dt = \frac{e^{-s t_0}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (8)$$

La trasformata di Laplace

Altre semplici trasformate sono

$$\mathcal{L}[u(t - t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-s t} dt = \frac{e^{-s t_0}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t) e^{s_0 t}] &= \mathcal{L}_u[e^{s_0 t}] = \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0) t} dt \\ &= \frac{1}{s - s_0}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0, \end{aligned} \quad (9)$$

La trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[\sin t] &= \frac{\mathcal{L}_u[e^{jt}] - \mathcal{L}_u[e^{-jt}]}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} j = 0,\end{aligned}\tag{10}$$

La trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[\sin t] &= \frac{\mathcal{L}_u[e^{jt}] - \mathcal{L}_u[e^{-jt}]}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} j = 0,\end{aligned}\tag{10}$$

e analogamente

$$\mathcal{L}_u[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > 0.\tag{11}$$

La trasformata di Laplace

Introduciamo una classe di funzioni importante nella teoria della \mathcal{L} -trasformazione.

La trasformata di Laplace

Introduciamo una classe di funzioni importante nella teoria della \mathcal{L} -trasformazione.

Definizione

Un segnale $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è detto *di ordine esponenziale* se esistono $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, con $\sigma_1 < \sigma_2$, tali che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) e^{-\sigma_1 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) e^{-\sigma_2 t} = 0. \quad (12)$$

La trasformata di Laplace

Ad esempio, per

$$x(t) = e^{-|t|}$$

possiamo scegliere σ_1 e σ_2 qualsiasi verificanti

$$-1 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1.$$

La trasformata di Laplace

Ad esempio, per

$$x(t) = e^{-|t|}$$

possiamo scegliere σ_1 e σ_2 qualsiasi verificanti

$$-1 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1.$$

Se x è di ordine esponenziale, la funzione $t \mapsto x(t)e^{-st}$ è sommabile in \mathbb{R} , per ogni $s \in \mathbb{C}$ verificante

$$\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2. \quad (13)$$

La trasformata di Laplace

Ad esempio, per

$$x(t) = e^{-|t|}$$

possiamo scegliere σ_1 e σ_2 qualsiasi verificanti

$$-1 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1.$$

Se x è di ordine esponenziale, la funzione $t \mapsto x(t)e^{-st}$ è sommabile in \mathbb{R} , per ogni $s \in \mathbb{C}$ verificante

$$\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2. \quad (13)$$

In effetti, data la locale sommabilità di x , occorre verificare la sommabilità solo intorno a $\mp\infty$.

La trasformata di Laplace

Per la prima delle (12), intorno a $+\infty$ risulta

$$|x(t)| \leq e^{\sigma_1 t},$$

La trasformata di Laplace

Per la prima delle (12), intorno a $+\infty$ risulta

$$|x(t)| \leq e^{\sigma_1 t},$$

da cui segue

$$|x(t) e^{-s t}| \leq e^{(\sigma_1 - \operatorname{Re} s) t}$$

e quindi la sommabilità intorno a $+\infty$.

La trasformata di Laplace

Per la prima delle (12), intorno a $+\infty$ risulta

$$|x(t)| \leq e^{\sigma_1 t},$$

da cui segue

$$|x(t) e^{-s t}| \leq e^{(\sigma_1 - \operatorname{Re} s) t}$$

e quindi la sommabilità intorno a $+\infty$.

Analogamente si stabilisce la sommabilità intorno a $-\infty$.

La trasformata di Laplace

Per la prima delle (12), intorno a $+\infty$ risulta

$$|x(t)| \leq e^{\sigma_1 t},$$

da cui segue

$$|x(t) e^{-s t}| \leq e^{(\sigma_1 - \operatorname{Re} s) t}$$

e quindi la sommabilità intorno a $+\infty$.

Analogamente si stabilisce la sommabilità intorno a $-\infty$.

Pertanto x è trasformabile (l'integrale di Laplace è assolutamente convergente) nella striscia formata dagli s verificanti (13).

Proprietà fondamentali

Cominciamo con l'osservare che la trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel dominio.

Proprietà fondamentali

Cominciamo con l'osservare che la trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel dominio.

Teorema

La trasformata di Laplace è olomorfa nella striscia di convergenza. Le derivate si calcolano derivando sotto il segno di integrale:

$$X^{(k)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)^k x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[(-t)^k x(t)], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Proprietà fondamentali

Cominciamo con l'osservare che la trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel dominio.

Teorema

La trasformata di Laplace è olomorfa nella striscia di convergenza. Le derivate si calcolano derivando sotto il segno di integrale:

$$X^{(k)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)^k x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[(-t)^k x(t)], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

La (14) si dice *la formula fondamentale* per la trasformata di Laplace.

Proprietà fondamentali

Esempio

Dalla I formula fondamentale, ricaviamo

$$\mathcal{L}[t^k u(t)] = \mathcal{L}_u[t^k] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (15)$$

Proprietà fondamentali

Esempio

Dalla I formula fondamentale, ricaviamo

$$\mathcal{L}[t^k u(t)] = \mathcal{L}_u[t^k] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (15)$$

Più in generale, ricordando la (9)

$$\mathcal{L}_u[t^k e^{s_0 t}] = \frac{k!}{(s - s_0)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0. \quad (16)$$

Proprietà fondamentali

Esempio

L'olomorfia permette di calcolare facilmente

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{-t^2}].$$

Proprietà fondamentali

Esempio

L'olomorfia permette di calcolare facilmente

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{-t^2}].$$

Invero, per i criteri di sommabilità vediamo che

$$t \mapsto e^{-t^2} e^{-st}$$

è sommabile in \mathbb{R} , $\forall s \in \mathbb{C}$, quindi X è funzione intera.

Proprietà fondamentali

Esempio

L'olomorfia permette di calcolare facilmente

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{-t^2}].$$

Invero, per i criteri di sommabilità vediamo che

$$t \mapsto e^{-t^2} e^{-st}$$

è sommabile in \mathbb{R} , $\forall s \in \mathbb{C}$, quindi X è funzione intera.

Dalla definizione di \mathcal{L} -trasformata, abbiamo

$$e^{-s^2/4} X(s) = e^{-s^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+s/2)^2} dt$$

Proprietà fondamentali

Esempio (continuazione)

L'ultimo integrale non dipende da $\operatorname{Re} s$, come si vede con la sostituzione

$$\tau = t + \operatorname{Re} s/2.$$

Proprietà fondamentali

Esempio (continuazione)

L'ultimo integrale non dipende da $\operatorname{Re} s$, come si vede con la sostituzione

$$\tau = t + \operatorname{Re} s/2.$$

Per la condizione di Cauchy-Riemann, la funzione intera

$$s \mapsto e^{-s^2/4} X(s)$$

è indipendente anche da $\operatorname{Im} s$, quindi è costante.

Proprietà fondamentali

Esempio (continuazione)

L'ultimo integrale non dipende da $\operatorname{Re} s$, come si vede con la sostituzione

$$\tau = t + \operatorname{Re} s/2.$$

Per la condizione di Cauchy-Riemann, la funzione intera

$$s \mapsto e^{-s^2/4} X(s)$$

è indipendente anche da $\operatorname{Im} s$, quindi è costante.

Come è noto, per $s = 0$ vale $\sqrt{\pi}$.

Proprietà fondamentali

Esempio (continuazione)

L'ultimo integrale non dipende da $\operatorname{Re} s$, come si vede con la sostituzione

$$\tau = t + \operatorname{Re} s/2.$$

Per la condizione di Cauchy-Riemann, la funzione intera

$$s \mapsto e^{-s^2/4} X(s)$$

è indipendente anche da $\operatorname{Im} s$, quindi è costante.

Come è noto, per $s = 0$ vale $\sqrt{\pi}$.

Pertanto

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}. \quad (17)$$

Proprietà fondamentali

Vediamo ora la seconda formula fondamentale, per la trasformata della derivata. Ci limitiamo ai segnali di ordine esponenziale.

Proprietà fondamentali

Vediamo ora la seconda formula fondamentale, per la trasformata della derivata. Ci limitiamo ai segnali di ordine esponenziale.

Teorema

(a) Se x è assolutamente continuo (sugli intervalli compatti) e di ordine esponenziale, vale la formula

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s). \quad (18)$$

Proprietà fondamentali

Vediamo ora la seconda formula fondamentale, per la trasformata della derivata. Ci limitiamo ai segnali di ordine esponenziale.

Teorema

(a) Se x è assolutamente continuo (sugli intervalli compatti) e di ordine esponenziale, vale la formula

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s). \quad (18)$$

(b) Se x è assolutamente continuo sugli intervalli compatti contenuti in $[0, +\infty[$ e di ordine esponenziale, vale la formula

$$\mathcal{L}_u[x'(t)] = sX(s) - x(0). \quad (19)$$

Proprietà fondamentali

Le formule si ottengono integrando per parti.

Proprietà fondamentali

Le formule si ottengono integrando per parti.

Ad esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt \\ &= \left[x(t) e^{-st} \right]_{-\infty}^{+\infty} + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = s X(s)\end{aligned}$$

Proprietà fondamentali

Le formule si ottengono integrando per parti.

Ad esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt \\ &= \left[x(t) e^{-st} \right]_{-\infty}^{+\infty} + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = s X(s)\end{aligned}$$

poiché da (12) e (13) segue

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} x(t) e^{-st} = 0.$$

Proprietà fondamentali

Le (18) e (19) si iterano.

Proprietà fondamentali

Le (18) e (19) si iterano.

Se x è di classe C^{k-1} e $x^{(k-1)}$ è assolutamente continua, valgono le formule

$$\mathcal{L}[x^{(k)}(t)] = s^k X(s); \quad (20)$$

Proprietà fondamentali

Le (18) e (19) si iterano.

Se x è di classe C^{k-1} e $x^{(k-1)}$ è assolutamente continua, valgono le formule

$$\mathcal{L}[x^{(k)}(t)] = s^k X(s); \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_u[x^{(k)}(t)] = s^k X(s) - s^{k-1} x(0) - s^{k-2} x'(0) - \dots - x^{(k-1)}(0). \quad (21)$$

Proprietà fondamentali

Mettiamo in luce una proprietà della trasformata unilatera.

Proprietà fondamentali

Mettiamo in luce una proprietà della trasformata unilatera.

Teorema (comportamento asintotico)

Se l'integrale di Laplace di x converge assolutamente (ad esempio, x è di ordine esponenziale), risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x(t)] = 0. \quad (22)$$

Proprietà fondamentali

Mettiamo in luce una proprietà della trasformata unilatera.

Teorema (comportamento asintotico)

Se l'integrale di Laplace di x converge assolutamente (ad esempio, x è di ordine esponenziale), risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x(t)] = 0. \quad (22)$$

Ricordiamo innanzitutto che il dominio di $\mathcal{L}_u[x]$ è un semipiano destro, quindi possiamo far tendere $\operatorname{Re} s$ a $+\infty$.

Proprietà fondamentali

Poiché per q.o. $t \in [0, +\infty[$ risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} x(t) e^{-s t} = 0,$$

Proprietà fondamentali

Poiché per q.o. $t \in [0, +\infty[$ risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} x(t) e^{-s t} = 0,$$

la (22) segue, se possiamo giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'espressione che definisce $\mathcal{L}_u[x]$.

Proprietà fondamentali

Poiché per q.o. $t \in [0, +\infty[$ risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} x(t) e^{-s t} = 0,$$

la (22) segue, se possiamo giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'espressione che definisce $\mathcal{L}_u[x]$.

A tale scopo, usiamo il teorema di Lebesgue della convergenza dominata.

Proprietà fondamentali

Poiché per q.o. $t \in [0, +\infty[$ risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} x(t) e^{-s t} = 0,$$

la (22) segue, se possiamo giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'espressione che definisce $\mathcal{L}_U[x]$.

A tale scopo, usiamo il teorema di Lebesgue della convergenza dominata.

Per trovare una maggiorante sommabile, fissiamo s_0 tale che la funzione $t \mapsto x(t) e^{-s_0 t}$ sia sommabile in $[0, +\infty[$ e osserviamo che, per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, risulta

$$|x(t) e^{-s_0 t}| \geq |x(t) e^{-s t}|, \quad \text{per q.o. } t \in [0, +\infty[.$$

Proprietà fondamentali

Spesso si cerca di ricavare informazioni sul segnale x dalla sua trasformata X . Dalla formula (19) otteniamo due risultati di questo tipo.

Teorema

Sia x assolutamente continuo (sugli intervalli compatti contenuti) in $[0, +\infty[$. Sia $X(s) = \mathcal{L}_u[x(t)]$.

Proprietà fondamentali

Spesso si cerca di ricavare informazioni sul segnale x dalla sua trasformata X . Dalla formula (19) otteniamo due risultati di questo tipo.

Teorema

Sia x assolutamente continuo (sugli intervalli compatti contenuti) in $[0, +\infty[$. Sia $X(s) = \mathcal{L}_u[x(t)]$. (Valore iniziale) Se x e x' sono di ordine esponenziale, vale la formula

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{\text{Re } s \rightarrow +\infty} s X(s). \quad (23)$$

Proprietà fondamentali

Spesso si cerca di ricavare informazioni sul segnale x dalla sua trasformata X . Dalla formula (19) otteniamo due risultati di questo tipo.

Teorema

Sia x assolutamente continuo (sugli intervalli compatti contenuti) in $[0, +\infty[$. Sia $X(s) = \mathcal{L}_u[x(t)]$. (Valore iniziale) Se x e x' sono di ordine esponenziale, vale la formula

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{\text{Re } s \rightarrow +\infty} s X(s). \quad (23)$$

(Valore finale) Se x' è sommabile, risulta x convergente a $+\infty$, assolutamente trasformabile per $\text{Re } s > 0$ e vale l'uguaglianza

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \text{Re } s > 0}} s X(s). \quad (24)$$

Proprietà fondamentali

La (23) segue da (19), poiché per il teorema del comportamento asintotico risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x'(t)] = 0.$$

Proprietà fondamentali

La (23) segue da (19), poiché per il teorema del comportamento asintotico risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x'(t)] = 0.$$

Riguardo al teorema del valore finale, osserviamo innanzitutto che la sommabilità significa assoluta trasformabilità in $s = 0$.

Proprietà fondamentali

La (23) segue da (19), poiché per il teorema del comportamento asintotico risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x'(t)] = 0.$$

Riguardo al teorema del valore finale, osserviamo innanzitutto che la sommabilità significa assoluta trasformabilità in $s = 0$.

Questo implica che x' sia assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$.

Proprietà fondamentali

La (23) segue da (19), poiché per il teorema del comportamento asintotico risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x'(t)] = 0.$$

Riguardo al teorema del valore finale, osserviamo innanzitutto che la sommabilità significa assoluta trasformabilità in $s = 0$.

Questo implica che x' sia assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$.

Inoltre, per l'assoluta continuità abbiamo

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau) d\tau$$

e quindi $x(t)$ converge per $t \rightarrow +\infty$, essendo x' sommabile:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x(0) + \int_0^{+\infty} x'(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Proprietà fondamentali

Ne segue che $x(t)$ è limitato e dunque anch'esso assolutamente trasformabile, quindi $X(s)$ è definita, per $\operatorname{Re} s > 0$.

Proprietà fondamentali

Ne segue che $x(t)$ è limitato e dunque anch'esso assolutamente trasformabile, quindi $X(s)$ è definita, per $\operatorname{Re} s > 0$.

D'altra parte, poiché per $\operatorname{Re} s > 0$ risulta

$$|x'(t)e^{-st}| \leq |x'(t)|,$$

per q.o. $t \in [0, +\infty[$, mediante il teorema della convergenza dominata, abbiamo

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} s X(s) = x(0) + \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} \int_0^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt = x(0) + \int_0^{+\infty} x'(\tau) d\tau.$$

Proprietà fondamentali

Ne segue che $x(t)$ è limitato e dunque anch'esso assolutamente trasformabile, quindi $X(s)$ è definita, per $\operatorname{Re} s > 0$.

D'altra parte, poiché per $\operatorname{Re} s > 0$ risulta

$$|x'(t)e^{-st}| \leq |x'(t)|,$$

per q.o. $t \in [0, +\infty[$, mediante il teorema della convergenza dominata, abbiamo

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} s X(s) = x(0) + \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} \int_0^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt = x(0) + \int_0^{+\infty} x'(\tau) d\tau.$$

Confrontando questa uguaglianza con la (25), otteniamo la (24).

Proprietà formali

Elenchiamo alcune formule, che seguono subito dalla definizione, mediante le quali si opera con la trasformata.

Proprietà formali

Elenchiamo alcune formule, che seguono subito dalla definizione, mediante le quali si opera con la trasformata.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-s t_0} X(s),$$

$$\mathcal{L}[x(t) u(t - t_0)] = e^{-s t_0} \mathcal{L}[x(t + t_0) u(t)].$$

Proprietà formali

Elenchiamo alcune formule, che seguono subito dalla definizione, mediante le quali si opera con la trasformata.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-s t_0} X(s),$$

$$\mathcal{L}[x(t) u(t - t_0)] = e^{-s t_0} \mathcal{L}[x(t + t_0) u(t)].$$

- Traslazione in s :

$$\mathcal{L}[x(t) e^{s_0 t}] = X(s - s_0).$$

Proprietà formali

- Riscaldamento e riflessione: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

Proprietà formali

- Riscaldamento e riflessione: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

- Coniugazione:

$$\mathcal{L}[\overline{x(t)}] = \overline{X(\bar{s})}.$$

Proprietà formali

- Riscaldamento e riflessione: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

- Coniugazione:

$$\mathcal{L}[\overline{x(t)}] = \overline{X(\bar{s})}.$$

In particolare, x reale $\iff X$ hermitiana.

Proprietà formali

Illustriamo le proprietà precedenti con qualche esempio.

Proprietà formali

Illustriamo le proprietà precedenti con qualche esempio.

La (9) è un caso particolare della formula di traslazione in s .

Proprietà formali

Illustriamo le proprietà precedenti con qualche esempio.

La (9) è un caso particolare della formula di traslazione in s .

Generalizziamo le (10) e (11); per $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$, per $\operatorname{Re} s > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[\cos \omega t] &= \frac{\mathcal{L}_u[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}_u[e^{-j\omega t}]}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Proprietà formali

Illustriamo le proprietà precedenti con qualche esempio.

La (9) è un caso particolare della formula di traslazione in s .

Generalizziamo le (10) e (11); per $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$, per $\operatorname{Re} s > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[\cos \omega t] &= \frac{\mathcal{L}_u[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}_u[e^{-j\omega t}]}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

e analogamente

$$\mathcal{L}_u[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Proprietà formali

Queste seguono da (11) e (10) mediante la formula di cambiamento di scala.

Proprietà formali

Queste seguono da (11) e (10) mediante la formula di cambiamento di scala.

È sufficiente considerare il caso $\omega > 0$ per la simmetria di seno e coseno.

Proprietà formali

Queste seguono da (11) e (10) mediante la formula di cambiamento di scala.

È sufficiente considerare il caso $\omega > 0$ per la simmetria di seno e coseno.

Ad esempio,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[\sin \omega t] &= \mathcal{L}[\sin \omega t u(\omega t)] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[\sin t u(t)] \left(\frac{s}{\omega}\right) \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{(s/\omega)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Proprietà formali

Ancora, le due formule si ricavano l'una dall'altra per derivazione rispetto a t , mediante la II formula fondamentale:

Proprietà formali

Ancora, le due formule si ricavano l'una dall'altra per derivazione rispetto a t , mediante la II formula fondamentale:

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}_u \left[\frac{d}{dt} \sin \omega t \right] = \frac{1}{\omega} \left\{ s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin(\omega \cdot 0) \right\}$$

Proprietà formali

Ancora, le due formule si ricavano l'una dall'altra per derivazione rispetto a t , mediante la II formula fondamentale:

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}_u \left[\frac{d}{dt} \sin \omega t \right] = \frac{1}{\omega} \left\{ s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin(\omega \cdot 0) \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[\sin \omega t] &= -\frac{1}{\omega} \mathcal{L}_u \left[\frac{d}{dt} \cos \omega t \right] = -\frac{1}{\omega} \left\{ s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \cos(\omega \cdot 0) \right\} \\ &= -\frac{1}{\omega} \frac{s^2 - s^2 - \omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin t u(t - \pi/4)] &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}_u[\sin(t + \pi/4)] \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \frac{\mathcal{L}_u[\sin t] + \mathcal{L}_u[\cos t]}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{\sqrt{2}} \frac{1 + s}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{L}[e^{-|t|}]$.

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{L}[e^{-|t|}]$.

Possiamo scrivere per q.o. t

$$e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t).$$

Esempio

Calcoliamo $\mathcal{L}[e^{-|t|}]$.

Possiamo scrivere per q.o. t

$$e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t).$$

Per la formula di traslazione

$$\mathcal{L}[e^{-t}u(t)] = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re } s > -1.$$

Esempio (continuazione)

D'altra parte, per la formula di riflessione

$$\mathcal{L}[e^t u(-t)](s) = \mathcal{L}[e^{-t} u(t)](-s) = \frac{1}{-s + 1}$$

per $\operatorname{Re}(-s) > -1$, ovvero $\operatorname{Re} s < 1$.

Esempio (continuazione)

D'altra parte, per la formula di riflessione

$$\mathcal{L}[e^t u(-t)](s) = \mathcal{L}[e^{-t} u(t)](-s) = \frac{1}{-s+1}$$

per $\operatorname{Re}(-s) > -1$, ovvero $\operatorname{Re} s < 1$.

Dunque per $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ abbiamo

$$\mathcal{L}[e^{-|t|}] = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{-s+1} = \frac{2}{1-s^2}. \quad (26)$$

La trasformata della convoluzione

Teorema

Se x e y sono assolutamente trasformabili (cioè gli integrali di Laplace convergono assolutamente) in una stessa striscia, risulta

$$\mathcal{L}[x * y] = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[y]. \quad (27)$$

Ricaveremo una formula simile per la trasformata di Fourier.

La trasformata della convoluzione

Esempio

Data $x \in L^1(0, +\infty)$, la funzione integrale

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

è limitata in $[0, +\infty[$, quindi assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$.

La trasformata della convoluzione

Esempio

Data $x \in L^1(0, +\infty)$, la funzione integrale

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

è limitata in $[0, +\infty[$, quindi assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$.

È facile mostrare che

$$\mathcal{L}_u \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}_u[x(t)] \quad (28)$$

in applicazione della II formula fondamentale, poiché $y' = x$ e $y(0) = 0$.

La trasformata della convoluzione

Esempio (continuazione)

La (28) segue pure dalla formula per la trasformata della convoluzione, in quanto (prolungando x a \mathbb{R} ponendo $x(t) = 0$ per $t < 0$) risulta come è noto, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) \int_0^t x(\tau) d\tau = (x(t) u(t)) * u(t)$$

La trasformata della convoluzione

Esempio (continuazione)

La (28) segue pure dalla formula per la trasformata della convoluzione, in quanto (prolungando x a \mathbb{R} ponendo $x(t) = 0$ per $t < 0$) risulta come è noto, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) \int_0^t x(\tau) d\tau = (x(t) u(t)) * u(t)$$

e basta applicare la trasformazione \mathcal{L} ad ambo i membri.

Trasformata unilatera di segnali periodici

Teorema

*Sia x un segnale periodico di periodo $\tau > 0$, sommabile in $(0, \tau)$.
In queste ipotesi, la funzione*

$$t \mapsto x(t) e^{-s t}$$

è sommabile su $(0, +\infty)$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > 0$, quindi x è assolutamente \mathcal{L}_u -trasformabile.

Trasformata unilatera di segnali periodici

Teorema

*Sia x un segnale periodico di periodo $\tau > 0$, sommabile in $(0, \tau)$.
In queste ipotesi, la funzione*

$$t \mapsto x(t) e^{-st}$$

è sommabile su $(0, +\infty)$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > 0$, quindi x è assolutamente \mathcal{L}_u -trasformabile.

Inoltre, posto

$$x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)],$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Teorema

*Sia x un segnale periodico di periodo $\tau > 0$, sommabile in $(0, \tau)$.
In queste ipotesi, la funzione*

$$t \mapsto x(t) e^{-st}$$

è sommabile su $(0, +\infty)$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > 0$, quindi x è assolutamente \mathcal{L}_u -trasformabile.

Inoltre, posto

$$x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)],$$

risulta

$$\mathcal{L}_u[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)]}{1 - e^{-s\tau}}. \quad (29)$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Diamo per buona la assoluta trasformabilità e mostriamo la formula.

Trasformata unilatera di segnali periodici

Diamo per buona la assoluta trasformabilità e mostriamo la formula.

Per la periodicità, abbiamo

$$x_0(t) = x(t) u(t) - x(t) u(t - \tau) = x(t) u(t) - x(t - \tau) u(t - \tau)$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Diamo per buona la assoluta trasformabilità e mostriamo la formula.

Per la periodicità, abbiamo

$$x_0(t) = x(t) u(t) - x(t) u(t - \tau) = x(t) u(t) - x(t - \tau) u(t - \tau)$$

e quindi, per la formula di traslazione in t , ricaviamo

$$\mathcal{L}[x_0(t)] = \mathcal{L}_u[x(t)] - e^{-s\tau} \mathcal{L}_u[x(t)]$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Diamo per buona la assoluta trasformabilità e mostriamo la formula.

Per la periodicità, abbiamo

$$x_0(t) = x(t) u(t) - x(t) u(t - \tau) = x(t) u(t) - x(t - \tau) u(t - \tau)$$

e quindi, per la formula di traslazione in t , ricaviamo

$$\mathcal{L}[x_0(t)] = \mathcal{L}_u[x(t)] - e^{-s\tau} \mathcal{L}_u[x(t)]$$

da cui segue subito la (29).

Trasformata unilatera di segnali periodici

Esempio

Calcoliamo la trasformata di

$$x_0(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)].$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Esempio

Calcoliamo la trasformata di

$$x_0(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)].$$

Per la formula di traslazione in t ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_0(t)] &= \mathcal{L}[\sin t u(t)] + \mathcal{L}[\sin(t - \pi) u(t - \pi)] \\ &= \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Esempio

Calcoliamo la trasformata di

$$x_0(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)].$$

Per la formula di traslazione in t ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_0(t)] &= \mathcal{L}[\sin t u(t)] + \mathcal{L}[\sin(t - \pi) u(t - \pi)] \\ &= \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Notiamo che $\mathcal{L}[x_0]$ è funzione intera.

Trasformata unilatera di segnali periodici

Esempio (continuazione)

Dalla (30) possiamo ricavare ad esempio

$$\mathcal{L}_u[|\sin t|]$$

Esempio (continuazione)

Dalla (30) possiamo ricavare ad esempio

$$\mathcal{L}_u[|\sin t|]$$

mediante la (29), poiché $|\sin t|$ si ottiene come replica periodica di periodo π di $x_0(t)$:

$$\mathcal{L}_u[|\sin t|] = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Trasformata unilatera di segnali periodici

Esempio (continuazione)

Facendo la replica periodica di periodo 2π di x_0 , otteniamo $\sin_+ t$.

Trasformata unilatera di segnali periodici

Esempio (continuazione)

Facendo la replica periodica di periodo 2π di x_0 , otteniamo $\sin_+ t$.

Quindi, analogamente a prima, troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[\sin_+ t] &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Antitrasformazione

La trasformazione di Laplace è iniettiva, cioè segnali con la stessa trasformata in una stessa striscia sono uguali q.o.

Antitrasformazione

La trasformazione di Laplace è iniettiva, cioè segnali con la stessa trasformata in una stessa striscia sono uguali q.o.

Vale inoltre la seguente formula di antitrasformazione di Riemann-Fourier: se il segnale $x(t)$ è regolarizzato in ogni punto, risulta

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \text{v.p.} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad (31)$$

Antitrasformazione

La trasformazione di Laplace è iniettiva, cioè segnali con la stessa trasformata in una stessa striscia sono uguali q.o.

Vale inoltre la seguente formula di antitrasformazione di Riemann-Fourier: se il segnale $x(t)$ è regolarizzato in ogni punto, risulta

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \text{v.p.} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds, \quad (31)$$

essendo la retta di equazione $\text{Re } s = \sigma$ interna al dominio della trasformata.

Antitrasformazione

Il problema di antitrasformare una funzione razionale fratta può essere risolto in maniera completamente elementare.

Antitrasformazione

Il problema di antitrasformare una funzione razionale fratta può essere risolto in maniera completamente elementare.

Se la funzione razionale

$$X(s) = \mathcal{R}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

è una \mathcal{L}_u -trasformata, deve essere infinitesima all'infinito, quindi è una funzione razionale propria.

Antitrasformazione

Il problema di antitrasformare una funzione razionale fratta può essere risolto in maniera completamente elementare.

Se la funzione razionale

$$X(s) = \mathcal{R}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

è una \mathcal{L}_u -trasformata, deve essere infinitesima all'infinito, quindi è una funzione razionale propria.

Basta allora decomporla in fratti semplici e ricordare la (16):

$$\frac{c}{(s - s_0)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}_u^{-1}} c \frac{e^{s_0 t}}{(n - 1)!} t^{n-1}.$$

Antitrasformazione

Ad esempio, se gli zeri di Q sono semplici s_1, \dots, s_n , la decomposizione è

$$\mathcal{R}(s) = \frac{R[s_1]}{s - s_1} + \dots + \frac{R[s_n]}{s - s_n}$$

Antitrasformazione

Ad esempio, se gli zeri di Q sono semplici s_1, \dots, s_n , la decomposizione è

$$\mathcal{R}(s) = \frac{R[s_1]}{s - s_1} + \dots + \frac{R[s_n]}{s - s_n}$$

e quindi, antitrasformando otteniamo la *formula dello sviluppo di Heaviside*:

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \dots + \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Antitrasformazione

Ad esempio, se gli zeri di Q sono semplici s_1, \dots, s_n , la decomposizione è

$$\mathcal{R}(s) = \frac{R[s_1]}{s - s_1} + \dots + \frac{R[s_n]}{s - s_n}$$

e quindi, antitrasformando otteniamo la *formula dello sviluppo di Heaviside*:

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \dots + \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Se \mathcal{R} ha coefficienti reali, conviene decomporre in fratti nel campo reale.

Antitrasformazione

Ad esempio, se gli zeri di Q sono semplici s_1, \dots, s_n , la decomposizione è

$$\mathcal{R}(s) = \frac{R[s_1]}{s - s_1} + \dots + \frac{R[s_n]}{s - s_n}$$

e quindi, antitrasformando otteniamo la *formula dello sviluppo di Heaviside*:

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \dots + \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Se \mathcal{R} ha coefficienti reali, conviene decomporre in fratti nel campo reale.

Se Q ha zeri multipli, si può usare la formula di Hermite.

Esempio

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right] = u(t) - u(t) \cos t.$$

Esempio

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right] = u(t) - u(t) \cos t .$$

Alternativamente, usiamo la (28):

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \int_0^t \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] (\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau .$$

Antitrasformazione

Il calcolo della \mathcal{L}_u^{-1} di una funzione razionale propria si effettua facilmente anche mediante la formula (31) di Riemann-Fourier.

Antitrasformazione

Il calcolo della \mathcal{L}_u^{-1} di una funzione razionale propria si effettua facilmente anche mediante la formula (31) di Riemann-Fourier.

Si perviene ad un integrale del tipo

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st} ds,$$

con $t \geq 0$.

Antitrasformazione

Il calcolo della \mathcal{L}_u^{-1} di una funzione razionale propria si effettua facilmente anche mediante la formula (31) di Riemann-Fourier.

Si perviene ad un integrale del tipo

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st} ds,$$

con $t \geq 0$.

La funzione P/Q è olomorfa in un semipiano destro e l'integrale è esteso ad una retta verticale contenuta in tale semipiano, cioè con σ sufficientemente grande; Q è privo di zeri sulla retta.

Antitrasformazione

Il calcolo della \mathcal{L}_u^{-1} di una funzione razionale propria si effettua facilmente anche mediante la formula (31) di Riemann-Fourier.

Si perviene ad un integrale del tipo

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st} ds,$$

con $t \geq 0$.

La funzione P/Q è olomorfa in un semipiano destro e l'integrale è esteso ad una retta verticale contenuta in tale semipiano, cioè con σ sufficientemente grande; Q è privo di zeri sulla retta.

Se $\text{grado } Q \geq \text{grado } P + 2$, l'integrale è assolutamente convergente. Se $\text{grado } Q = \text{grado } P + 1$ esso è semplicemente convergente per $t > 0$ e va inteso nel senso del valor principale per $t = 0$.

Antitrasformazione

Per $t > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1}[P/Q] = \sum R[s_k; e^{s t} P(s)/Q(s)],$$

Antitrasformazione

Per $t > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1}[P/Q] = \sum R[s_k; e^{s_k t} P(s)/Q(s)],$$

dove i punti $s_k \in \mathbb{C}$ sono i poli di P/Q .

Antitrasformazione

Per $t > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1}[P/Q] = \sum R[s_k; e^{st}P(s)/Q(s)],$$

dove i punti $s_k \in \mathbb{C}$ sono i poli di P/Q .

Così abbiamo, ad esempio

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = R[0] + R[j] + R[-j]$$

dove i residui sono relativi alla funzione $\frac{e^{st}}{s(s^2 + 1)}$.

Antitrasformazione

Per $t > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1}[P/Q] = \sum R[s_k; e^{st}P(s)/Q(s)],$$

dove i punti $s_k \in \mathbb{C}$ sono i poli di P/Q .

Così abbiamo, ad esempio

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = R[0] + R[j] + R[-j]$$

dove i residui sono relativi alla funzione $\frac{e^{st}}{s(s^2 + 1)}$.

Dunque ritroviamo ($t > 0$)

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = 1 + \frac{e^{st}}{2s^2} \Big|_{s=j} + \frac{e^{st}}{2s^2} \Big|_{s=-j} = 1 - \cos t.$$

Antitrasformazione

È possibile ottenere delle formule di antitrasformazione dalle proprietà formali che abbiamo ricavato precedentemente:

Antitrasformazione

È possibile ottenere delle formule di antitrasformazione dalle proprietà formali che abbiamo ricavato precedentemente:

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u(t)$$

Antitrasformazione

È possibile ottenere delle formule di antitrasformazione dalle proprietà formali che abbiamo ricavato precedentemente:

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u(t)$$

$$\mathcal{L}[u(t) e^{s_0 t}] = \frac{1}{s - s_0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s - s_0} \right] = u(t) e^{s_0 t}$$

Antitrasformazione

È possibile ottenere delle formule di antitrasformazione dalle proprietà formali che abbiamo ricavato precedentemente:

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u(t)$$

$$\mathcal{L}[u(t) e^{s_0 t}] = \frac{1}{s - s_0} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s - s_0} \right] = u(t) e^{s_0 t}$$

$$\mathcal{L}_u[t^k e^{s_0 t}] = \frac{k!}{(s - s_0)^{k+1}} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s - s_0)^k} \right] = u(t) e^{s_0 t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = u(t) \cos \omega t$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = u(t) \cos \omega t$$

$$\mathcal{L}_u[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{\omega} u(t) \sin \omega t$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = u(t) \cos \omega t$$

$$\mathcal{L}_u[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{\omega} u(t) \sin \omega t$$

$$\mathcal{L}[x(t) e^{s_0 t}] = X(s - s_0) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[X(s - s_0)] = e^{s_0 t} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (32)$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = u(t) \cos \omega t$$

$$\mathcal{L}_u[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{\omega} u(t) \sin \omega t$$

$$\mathcal{L}[x(t) e^{s_0 t}] = X(s - s_0) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[X(s - s_0)] = e^{s_0 t} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (32)$$

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-s t_0} X(s) \Rightarrow \begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1}[e^{-s t_0} X(s)](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)](t - t_0) \end{aligned} \quad (33)$$

Antitrasformazione

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[-tx(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} X(s) \right] = -t \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Antitrasformazione

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[-t x(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d}{ds} X(s) \right] = -t \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

più in generale

$$\frac{d^k}{ds^k} \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[(-t)^k x(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d^k}{ds^k} X(s) \right] = (-t)^k \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[sX(s)] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}[x'(t)] = s X(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[s X(s)] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

più in generale

$$\mathcal{L}[x^{(k)}(t)] = s^k X(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[s^k X(s)] = \frac{d^k}{dt^k} \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Antitrasformazione

$$\mathcal{L}[x'(t)] = s X(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[s X(s)] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

più in generale

$$\mathcal{L}[x^{(k)}(t)] = s^k X(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[s^k X(s)] = \frac{d^k}{dt^k} \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

$$\mathcal{L}[x * y] = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[y] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[X \cdot Y] = \mathcal{L}^{-1}[X] * \mathcal{L}^{-1}[Y]$$

Esempio

Calcoliamo ($\omega > 0$)

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] .$$

Esempio

Calcoliamo ($\omega > 0$)

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right].$$

Ricordando la formula di Hermite, scriviamo

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Esempio

Calcoliamo ($\omega > 0$)

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right].$$

Ricordando la formula di Hermite, scriviamo

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

quindi

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega^2} \left(\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] + \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] \right)$$

Esempio (continuazione)

Ricordando la trasformata unilatera di $\sin \omega t$, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{\omega} \sin \omega t u(t).$$

Esempio (continuazione)

Ricordando la trasformata unilatera di $\sin \omega t$, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{1}{\omega} \sin \omega t u(t).$$

Ricordando la [formula di antitrasformazione](#) che segue dalla I formula fondamentale, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = -t \cdot \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

Esempio (continuazione)

Inoltre, ricordando la trasformata unilatera di $\cos \omega t$,

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \cos \omega t u(t)$$

Esempio (continuazione)

Inoltre, ricordando la trasformata unilatera di $\cos \omega t$,

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \cos \omega t u(t)$$

e quindi

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = -t \cos \omega t u(t)$$

Esempio (continuazione)

Inoltre, ricordando la trasformata unilatera di $\cos \omega t$,

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \cos \omega t u(t)$$

e quindi

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = -t \cos \omega t u(t)$$

Pertanto

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) u(t). \quad (34)$$

Esempio (continuazione)

Alternativamente, osserviamo che

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{s} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + \omega^2} .$$

Esempio (continuazione)

Alternativamente, osserviamo che

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{s} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + \omega^2}.$$

Inoltre

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right] = -\frac{1}{2} (-t) \frac{1}{\omega} \sin \omega t u(t).$$

Esempio (continuazione)

Ricordando la trasformata (28) della funzione integrale, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega} u(t) \int_0^t \tau \sin \omega \tau \, d\tau .$$

Esempio (continuazione)

Ricordando la trasformata (28) della funzione integrale, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega} u(t) \int_0^t \tau \sin \omega \tau d\tau .$$

Essendo

$$\int_0^t \tau \sin \omega \tau d\tau = -\frac{1}{\omega} t \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t ,$$

Esempio (continuazione)

Ricordando la trasformata (28) della funzione integrale, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{1}{2\omega} u(t) \int_0^t \tau \sin \omega \tau d\tau .$$

Essendo

$$\int_0^t \tau \sin \omega \tau d\tau = -\frac{1}{\omega} t \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t ,$$

ritroviamo il risultato precedente.

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right].$$

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right].$$

Essendo

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} = -\frac{1}{4} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right].$$

Essendo

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} = -\frac{1}{4} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \frac{t}{4} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right]$$

Antitrasformazione

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right].$$

Essendo

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} = -\frac{1}{4} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2},$$

abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \frac{t}{4} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right]$$

e l'ultima antitrasformata è stata calcolata nell'esempio precedente.

Esempio

Essendo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[s \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right],$$

Esempio

Essendo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[s \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right],$$

ricordando la [formula di antitrasformazione](#) che segue dalla II formula fondamentale, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right]$$

Esempio

Essendo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[s \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right],$$

ricordando la [formula di antitrasformazione](#) che segue dalla II formula fondamentale, abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^3} \right] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^3} \right]$$

e l'ultima antitrasformata è stata calcolata nell'esempio precedente.

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2 + 1)^2} \right].$$

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2 + 1)^2} \right].$$

Ricordando la formula di antitrasformazione (33) che segue dalla formula di traslazione in t , abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2 + 1)^2} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right] \left(t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Esempio (continuazione)

Quindi, ricordando un'antitrasformata (34) calcolata precedentemente (per $\omega = 1$), abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2 + 1)^2} \right] &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) u(t) \Big|_{t=t-\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) - \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] u \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos t + \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \sin t \right] u \left(t - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Esempio (continuazione)

Quindi, ricordando un'antitrasformata (34) calcolata precedentemente (per $\omega = 1$), abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2 + 1)^2} \right] &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) u(t) \Big|_{t=t-\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right) - \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] u \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos t + \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \sin t \right] u \left(t - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Osserviamo che è necessario il gradino finale.

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} \right].$$

Antitrasformazione

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} \right].$$

Essendo

$$\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} = \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^2},$$

Esempio

Calcoliamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} \right].$$

Essendo

$$\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} = \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^2},$$

ricordando la formula di antitrasformazione (32) che segue dalla formula di traslazione in s , abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} \right] = e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{\left[s^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]^2} \right]$$

Esempio (continuazione)

Infine, ricordando la formula (34), abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + s + 1)^2} \right] = e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{2\frac{3}{4}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - t \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) u(t).$$

Applicazioni

Con la \mathcal{L}_u -trasformazione risolviamo i problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti in $[0, +\infty[$.

Applicazioni

Con la \mathcal{L}_v -trasformazione risolviamo i problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti in $[0, +\infty[$.

Il modo di procedere è analogo a quello usato per risolvere i problemi ai valori iniziali per le equazioni ricorrenti mediante la \mathcal{Z} -trasformazione.

Applicazioni

Con la \mathcal{L}_v -trasformazione risolviamo i problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti in $[0, +\infty[$.

Il modo di procedere è analogo a quello usato per risolvere i problemi ai valori iniziali per le equazioni ricorrenti mediante la \mathcal{Z} -trasformazione.

Consideriamo ad esempio il problema del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = x(t) \\ y(0) \text{ e } y'(0) \text{ assegnati} \end{cases} \quad (35)$$

Applicazioni

È noto il teorema di esistenza e unicità, nel caso che il termine noto sia continuo.

È noto il teorema di esistenza e unicità, nel caso che il termine noto sia continuo.

Se x è localmente sommabile in $[0, +\infty[$, esiste un'unica $y \in C^1([0, +\infty[)$, soddisfacente le condizioni iniziali, con y' localmente assolutamente continua in $[0, +\infty[$ e tale che l'equazione sia verificata per q.o. $t \in (0, +\infty)$.

È noto il teorema di esistenza e unicità, nel caso che il termine noto sia continuo.

Se x è localmente sommabile in $[0, +\infty[$, esiste un'unica $y \in C^1([0, +\infty[)$, soddisfacente le condizioni iniziali, con y' localmente assolutamente continua in $[0, +\infty[$ e tale che l'equazione sia verificata per q.o. $t \in (0, +\infty)$.

Illustriamo ora il metodo risolutivo basato sulla \mathcal{L}_U -trasformazione.

Applicazioni

(a) Supponiamo che il termine noto x e la soluzione y siano \mathcal{L}_U -trasformabili e applichiamo la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione.

Applicazioni

(a) Supponiamo che il termine noto x e la soluzione y siano \mathcal{L}_U -trasformabili e applichiamo la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione.

Per trasformare il primo membro, usiamo la linearità e la seconda formula fondamentale (21): è necessario conoscere i valori iniziali.

Applicazioni

(a) Supponiamo che il termine noto x e la soluzione y siano \mathcal{L}_u -trasformabili e applichiamo la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione.

Per trasformare il primo membro, usiamo la linearità e la seconda formula fondamentale (21): è necessario conoscere i valori iniziali.

Posto $Y = \mathcal{L}_u[y]$, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u[y'' + a y' + b y] &= s^2 Y - y(0)s - y'(0) + a s Y - a y(0) + b Y \\ &= (s^2 + a s + b) Y - y(0)s - y'(0) - a y(0) = X,\end{aligned}$$

dove $X = \mathcal{L}_u[x]$ è la trasformata del *forzamento*.

Applicazioni

(b) Ricaviamo Y da questa uguaglianza:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b} X(s) + \frac{y(0) s + y'(0) + a y(0)}{s^2 + a s + b}. \quad (36)$$

Applicazioni

(b) Ricaviamo Y da questa uguaglianza:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b} X(s) + \frac{y(0) s + y'(0) + a y(0)}{s^2 + a s + b}. \quad (36)$$

(c) A questo punto antitrasformiamo:

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[Y(s)].$$

Applicazioni

(b) Ricaviamo Y da questa uguaglianza:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b} X(s) + \frac{y(0) s + y'(0) + a y(0)}{s^2 + a s + b}. \quad (36)$$

(c) A questo punto antitrasformiamo:

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[Y(s)].$$

Notiamo che

$$s^2 + a s + b$$

è il polinomio caratteristico dell'operatore differenziale.

Applicazioni

(b) Ricaviamo Y da questa uguaglianza:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b} X(s) + \frac{y(0) s + y'(0) + a y(0)}{s^2 + a s + b}. \quad (36)$$

(c) A questo punto antitrasformiamo:

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[Y(s)].$$

Notiamo che

$$s^2 + a s + b$$

è il polinomio caratteristico dell'operatore differenziale.

Il secondo termine a secondo membro della (36) è una funzione razionale propria, i cui coefficienti dipendono dai valori iniziali e l'antitrasformazione non presenta problemi.

Applicazioni

La funzione

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b}, \quad (37)$$

cioè il reciproco del polinomio caratteristico, si dice *funzione di trasferimento*.

Applicazioni

La funzione

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b}, \quad (37)$$

cioè il reciproco del polinomio caratteristico, si dice *funzione di trasferimento*.

Il primo termine a secondo membro di (36) si scrive

$$H(s) X(s)$$

Applicazioni

La funzione

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b}, \quad (37)$$

cioè il reciproco del polinomio caratteristico, si dice *funzione di trasferimento*.

Il primo termine a secondo membro di (36) si scrive

$$H(s) X(s)$$

e anche per questo l'antitrasformazione si riduce a quella di una funzione razionale: ricordando la formula per la trasformata della convoluzione, otteniamo

$$\mathcal{L}_u^{-1}[H(s) X(s)] = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] * x(t).$$

Per la linearità del problema, la soluzione di (35) si può decomporre nella somma $y = y_1 + y_2$ delle soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_1'' + a y_1' + b y_1 = x(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Applicazioni

Per la linearità del problema, la soluzione di (35) si può decomporre nella somma $y = y_1 + y_2$ delle soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_1'' + a y_1' + b y_1 = x(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0 \\ y_2(0) = y(0), y_2'(0) = y'(0) \end{cases} \quad (39)$$

Applicazioni

Per la linearità del problema, la soluzione di (35) si può decomporre nella somma $y = y_1 + y_2$ delle soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_1'' + a y_1' + b y_1 = x(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0 \\ y_2(0) = y(0), y_2'(0) = y'(0) \end{cases} \quad (39)$$

Il problema (38) ha valori iniziali nulli e il forzamento coincidente con quello del problema originale (35).

Applicazioni

Per la linearità del problema, la soluzione di (35) si può decomporre nella somma $y = y_1 + y_2$ delle soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} y_1'' + a y_1' + b y_1 = x(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0 \\ y_2(0) = y(0), y_2'(0) = y'(0) \end{cases} \quad (39)$$

Il problema (38) ha valori iniziali nulli e il forzamento coincidente con quello del problema originale (35).

Il problema (39) è relativo all'equazione omogenea associata e ha gli stessi valori iniziali del problema (35).

Applicazioni

Chiaramente

$$y_1(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] * x(t), \quad (40)$$

Applicazioni

Chiaramente

$$y_1(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] * x(t), \quad (40)$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{y(0)s + y'(0) + ay(0)}{s^2 + as + b} \right].$$

Applicazioni

Chiaramente

$$y_1(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] * x(t), \quad (40)$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{y(0)s + y'(0) + ay(0)}{s^2 + as + b} \right].$$

Il procedimento esposto si estende subito alle equazioni a coefficienti costanti di ordine qualsiasi

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = x(t).$$

Applicazioni

Chiaramente

$$y_1(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] * x(t), \quad (40)$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{y(0)s + y'(0) + ay(0)}{s^2 + as + b} \right].$$

Il procedimento esposto si estende subito alle equazioni a coefficienti costanti di ordine qualsiasi

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = x(t).$$

Ad esempio, se i valori iniziali sono tutti nulli, trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo $Y(s) = H(s)X(s)$, essendo

$$H(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

la funzione di trasferimento, reciproco del polinomio caratteristico, e perveniamo alla soluzione data da (40) con y in luogo di y_1 .

Esempio

Risolvi il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Trasformando ambo i membri, ricaviamo

$$Y = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

e quindi, ricordando l'antitrasformata dell' esempio

$$y(t) = 1 - \cos t,$$

per $t \geq 0$.

Esempio (continuazione)

Alternativamente, essendo i valori iniziali nulli, è $y = y_1$ (con le notazioni precedenti), quindi

$$\begin{aligned}y(t) &= (\sin t u(t)) * u(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau \\ &= -[\cos \tau]_0^t = 1 - \cos t.\end{aligned}$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Con calcoli analoghi ai precedenti, abbiamo

$$Y = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Con calcoli analoghi ai precedenti, abbiamo

$$Y = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

e quindi, ricordando l'antitrasformata (34) (per $\omega = 1$), troviamo la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t), \quad t \geq 0.$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = t e^{4t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = t e^{4t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

\mathcal{L}_u -trasformiamo ambo i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[y'' - 5y' + 6y] &= s^2 Y - s - 1 - 5(sY - 1) + 6Y \\ &= (s^2 - 5s + 6)Y - s + 4; \end{aligned}$$

Esempio

Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = t e^{4t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

\mathcal{L}_u -trasformiamo ambo i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[y'' - 5y' + 6y] &= s^2 Y - s - 1 - 5(sY - 1) + 6Y \\ &= (s^2 - 5s + 6)Y - s + 4; \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_u[t e^{4t}] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}_u[e^{4t}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-4} = \frac{1}{(s-4)^2}.$$

Esempio (continuazione)

Ricaviamo Y .

Esempio (continuazione)

Ricaviamo Y .

Osservato che $s^2 - 5s + 6 = (s - 2)(s - 3)$, possiamo scrivere

$$Y = \frac{s - 4}{(s - 2)(s - 3)} + \frac{1}{(s - 2)(s - 3)(s - 4)^2}.$$

Esempio (continuazione)

Ricaviamo Y .

Osservato che $s^2 - 5s + 6 = (s - 2)(s - 3)$, possiamo scrivere

$$Y = \frac{s - 4}{(s - 2)(s - 3)} + \frac{1}{(s - 2)(s - 3)(s - 4)^2}.$$

Per antitrasformare, decomponiamo in fratti semplici.

Esempio (continuazione)

Ricaviamo Y .

Osservato che $s^2 - 5s + 6 = (s - 2)(s - 3)$, possiamo scrivere

$$Y = \frac{s - 4}{(s - 2)(s - 3)} + \frac{1}{(s - 2)(s - 3)(s - 4)^2}.$$

Per antitrasformare, decomponiamo in fratti semplici.

Risulta

$$\frac{s - 4}{(s - 2)(s - 3)} = \frac{R[2]}{s - 2} + \frac{R[3]}{s - 3} = \frac{2}{s - 2} - \frac{1}{s - 3}.$$

Esempio (continuazione)

Analogamente

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)(s-4)^2} = \frac{R[2]}{s-2} + \frac{R[3]}{s-3} + \frac{R[4]}{s-4} + \frac{c_{-2}[4]}{(s-4)^2},$$

essendo $c_{-2}[4]$ un coefficiente dello sviluppo di Laurent intorno a 4.

Esempio (continuazione)

Analogamente

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)(s-4)^2} = \frac{R[2]}{s-2} + \frac{R[3]}{s-3} + \frac{R[4]}{s-4} + \frac{c_{-2}[4]}{(s-4)^2},$$

essendo $c_{-2}[4]$ un coefficiente dello sviluppo di Laurent intorno a 4.

Inoltre

$$R[2] = \frac{1}{(2-3)(2-4)^2} = -\frac{1}{4}, \quad R[3] = \frac{1}{(3-2)(3-4)^2} = 1,$$
$$R[4] = D \left. \frac{1}{s^2 - 5s + 6} \right|_{s=4} = -\frac{3}{4}, \quad c_{-2}[4] = \frac{1}{(4-2)(4-3)} = \frac{1}{2}.$$

Esempio (continuazione)

(Potevamo ricavare $R[4]$ mediante il secondo teorema dei residui: essendo chiaramente $R[\infty] = 0$, risulta $R[4] = -R[2] - R[3]$.)

Esempio (continuazione)

(Potevamo ricavare $R[4]$ mediante il secondo teorema dei residui: essendo chiaramente $R[\infty] = 0$, risulta $R[4] = -R[2] - R[3]$.)

Pertanto

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3} - \frac{1/4}{s-2} + \frac{1}{s-3} - \frac{3/4}{s-4} + \frac{1/2}{(s-4)^2} \\ &= \frac{7/4}{s-2} - \frac{3/4}{s-4} + \frac{1/2}{(s-4)^2} \end{aligned}$$

e quindi (per $t \geq 0$)

$$y(t) = \frac{7}{4} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{4t} + \frac{t}{2} e^{4t}.$$

Esempio (continuazione)

Alternativamente scriviamo

$$y = y_1 + y_2$$

(con le notazioni usate precedentemente).

Esempio (continuazione)

Alternativamente scriviamo

$$y = y_1 + y_2$$

(con le notazioni usate precedentemente).

Per quanto visto, risulta

$$y_2(t) = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s - 4}{(s - 2)(s - 3)} \right] = 2 e^{2t} - e^{3t}.$$

Esempio (continuazione)

D'altra parte, osservato che la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

Esempio (continuazione)

D'altra parte, osservato che la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

e quindi

$$h(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] = e^{3t} - e^{2t},$$

Esempio (continuazione)

D'altra parte, osservato che la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

e quindi

$$h(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] = e^{3t} - e^{2t},$$

abbiamo

$$y_1(t) = ((e^{3t} - e^{2t}) u(t)) * (t e^{4t} u(t)).$$

Esempio (continuazione)

Inoltre (per $t \geq 0$)

$$\begin{aligned}(e^{2t} u(t)) * (t e^{4t} u(t)) &= \int_0^t \tau e^{4\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau \\ &= \frac{t}{2} e^{4t} - \frac{e^{4t}}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\end{aligned}$$

Esempio (continuazione)

Inoltre (per $t \geq 0$)

$$\begin{aligned}(e^{2t} u(t)) * (t e^{4t} u(t)) &= \int_0^t \tau e^{4\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau \\ &= \frac{t}{2} e^{4t} - \frac{e^{4t}}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\end{aligned}$$

e similmente

$$(e^{3t} u(t)) * (t e^{4t} u(t)) = t e^{4t} - e^{4t} + e^{3t}.$$

Esempio (continuazione)

Inoltre (per $t \geq 0$)

$$\begin{aligned}(e^{2t} u(t)) * (t e^{4t} u(t)) &= \int_0^t \tau e^{4\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau \\ &= \frac{t}{2} e^{4t} - \frac{e^{4t}}{4} + \frac{e^{2t}}{4}\end{aligned}$$

e similmente

$$(e^{3t} u(t)) * (t e^{4t} u(t)) = t e^{4t} - e^{4t} + e^{3t}.$$

Dunque

$$y_1(t) = \frac{t}{2} e^{4t} - \frac{3}{4} e^{4t} - \frac{e^{2t}}{4} + e^{3t}$$

e arriviamo nuovamente alla soluzione $y(t)$ trovata prima.