BOZZE Guida alla preparazione dell'esame del corso di

GEOMETRIA e ALGEBRA 2021

Corso di Studi in Ingegneria Aerospaziale e Meccanica ,

tenuto dal prof. ULDERICO DARDANO

versione IN BOZZA del 26 nov 2021

Indice

1 Premessa

Questa **guida allo studio** vale anche come **PROGRAMMA** e si affianca ai testi consigliati per lo studio della materia
(FM) Introduzione all'algebra lineare, R. Fioresi - M Morigi, Casa Editrice Ambrosiana (seconda edizione).
(AD) Appunti di Algebra Lineare e Geometria Analitica, A.D'Aniello [1]

Possono risultare utili anche
(LL) Geometria e Algebra, L. Lomonaco, Aracne ed.
(BLR) P. Biondi, P. Lo Re, Appunti di Geometria, EDISU,disp. su TEAMS.

Per approfondimenti si puo' consultare:
(SL) Algebra lineare, S. Lang, Bollati Boringhieri, 2014.

Per gli esercizi (svolti) si rimanda ai libri di testo, ma anche a
(CC) Esercizi di Algebra Lineare, Claretta Carrara, disponibile su TEAMS
(SCH) Algebra lineare di Seymour Lipschutz, SCHAUM, (con esercizi svolti).

Per gli studenti che amano i tutorial video si segnala la raccolta
(EB) E. Bonbardelli, Algebra Lineare e Geometria Analitica Dello Spazio, http://eliabombardelli.com/videolezioni-matematica
vedi ultime due sezioni: Geometria Analitica nello Spazio e Algebra Lineare [2]

Questa guida intende essere un **sussidio schematico nella ripetizione del programma** in vista dell'esame. Questi sono appunti e non sostituiscono i libri. Il linguaggio di queste pagine a seguire non e' del tutto formale e ci sono delle possibili imprecisioni (dovute alla tentativo di essere succinti). Le nozioni sono presentate in ordine non uguale a quello del corso (che ha taglio didattico ed introduttivo e non consuntivo come questi appunti). Alcune definizioni sono date esplicitamente, altre sono solo richiamate; per quelle mancanti si rimanda ai libri di testo.

Si ricorda che, per superare l'esame, e' necessario saper dare correttamente le **Definzioni** degli oggetti che si studiano, fornire *esempi* degli oggetti cui le definizioni si applicano, individuarne le **proprieta' elementari** ed enunciare, discutere, fornire applicazioni ed (eventualmente) dimostrare i **Teoremi** indicati (tranni quelli dove e' scritto no dim, oppure ci sono 3 asterischi ***). Nelle note a piu' di pagina sono talvolta indicati *cenni promemoria per le dimostrazioni*, che pero' si possono reperire in forma completa nei libri di testo. Se non sono richieste le dimostrazioni di tutte le proposizioni studiate e' solo per contenere il carico di studio in 6 CFU. Allora si e' data precedenza alle dimostrazioni che maggiormanete arricchiscono il patrimonio intellettuale dello studente e le sue competenze. Infatti e' necessario possedere le **Competenze** indicate (esercizi).

[1] due fascicoli reperibili al Centro Fotocopie in via Chiatrini 27, presso piazzale Tecchio

[2] vedi pure
https://youtube.com/playlist?list=PLpkXLf6Zhdx1myEYbwHWdAgqKjjkXX1Aj
https://youtube.com/playlist?list=PLpkXLf6Zhdx1m6rJ0Cl6Va_nQdG-af2Px
Questi tutorial non bastano per l'esame, perche' hanno un approccio divulgativo (mancano le dimostrazioni), ma sono dei tutorial simpatici ed utili per approcciare i temi.

Le lettera V indica sempre uno spazio vettoriale su un campo K, in partoc'olare quello dei razionali $\mathbb{Q}$ o quello dei reali $\mathbb{R}$. Le lettere $\underline{v}$ e α indicano rispettivamente vettori (cioe' elementi di V) e scalari (cioe' elementi di K). Generalmente le lettere sottolineate indicano vettori (ma talvolta i vettori sono indicati anche con lettere non sottolineate).

Gli asterischi *** precedono argomenti o dimostrazioni non trattati esaurientemente nel corso e quindi facoltativi all'esame. Ad esempio: Teorema di Laplace*** (tre asterischi) vuol dire che la dimostrazione e' facoltativa, ma bisogna comunque padroneggiare l'enunciato. Teorema di Sylvester ***(quattro asterischi) vuol dire che il Teorema non e' in programma (nemamno l'enunciato). In mancanza di indicazioni (zero asterischi), si intede che la dimostrazione e' senz'altro in programma.

Le sezioni 2 e 3 sono preliminari, ma introducono linguaggio e primi esempi. Nella sezione 4 si trattano i sistemi lineari in un modo che verra' perfezionato in seguito. Averne una certa competenza agevola la conprensione delle tematiche piu' astratte introdotte in seguito. Nella sezione 5 si introducono, in maniera naive, dei concetti geometrici che vengono usati in altre materie. Con la sezione 6 si comincia lo studio dell'algebra lineare e delle sue applicazioni.

2 Preliminari di Insiemistica

Richiamiamo un minimo di LaST (Language of Set Thoery), che sembra essere il linguaggio piu' efficace per l'Algebra e la Geometria. [1]

-Cenni (euristici) di Logica e linguaggio Teoria degli Insiemi:

- connettivi/congiunzioni:

$e = AND$ si scrive $\wedge$
$o = OR$ si scrive $\vee$
la negazione $non = NOT$ si scrive $\neg$
implica si scrive $\Rightarrow$
equivale si scrive $\Leftrightarrow$
- quantificatori:
per ogni si scrive $\forall$

esiste almeno un si scrive $\exists$ laddove risulta $\nexists = \neg\exists = \forall\neg$ e anche $\neg\forall = \exists\neg$

- insiemi, predicato di appartenenza ($\in$), uguaglianza fra insiemi (assioma di estensionalita'),
- insieme vuoto ($=\emptyset$) e sua unicita'.
- sottoinsiemi, inclusione ($\subseteq$), sottoinsiemi definiti da un proprieta'.
- Diagrammi di Eulero-Venn.
- Unione e intersezione di una qualunque collezione di insiemi (con esempi).
- complemento (o differenza) $A - B$ fra insiemi (operazione ne' associativa ne' commutativa).

- Coppie di elementi e prodotto cartesiano di insiemi .
- n-uple e successioni. L'insieme S^n con S insieme e $n \in \mathbb{N}$
- Relazioni (o corrispondenze) cioe' insiemi di coppie
- Relazioni di ordine (cioe' transitive, riflessive, antisimmetriche)

[1] vedi (LL) o appunti su teams

- Relazioni di equivalenza (cioe' transitive, riflessive, simmetriche).
- Applicazioni (cioe' funzioni), iniettive, suriettive, invertibili.
- Funzione inversa

3 Preliminari di Algebra

- Unione e intersezione $A \cup B$, $A \cap B$; sono operazioni associative e commutative:
$A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Proprieta' distributive tra unione e intersezione:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Proprieta' di De Morgan.
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ [1]

- **Strutture Algebriche: assiomi di Gruppi, Anelli, Campi** [2]

- Anello degli interi. Campo dei razionali. Campo dei numeri reali.

- **** Cenni sui campi finiti di ordine primo. (NON in programma 2020)

- **** Anello e campo dei polinomi (in una o piu' variabili). (NON in programma 2020)

- Teorema di Ruffini (senza dim ***): *un polinomio* $\mathrm{f}(x) \in K[x]$ *di grado* n *a coefficienti su un campo* K *ammette* a *come radice se e solo se* $f(x) = (x - a)g(x)$ *con* $g(x) \in K[x]$ *di grado* $n - 1$*. Dunque* $f(x)$ *ha al piu'* n *radici.*

- Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado: discussione su esistenza delle loro soluzioni e formule per determinarle.

[1] per queste tre operazioni e le loro proprieta' qui enunciate vedi anche Wikipedia, ad esempio https://it.wikipedia.org/wiki/Unione_(insiemistica) e voci correlate a pie' di pagina

[2] vedi (LL) oppure (AD) oppure su Teams

4 Sistemi Lineari, introduzione

In questa sezione trattiamo i sistemi lineari in forma ingenua per riservarci di approfondire lo studio una volta in possesso degli strumenti dell'Algebra Lineare. Siccome qui lo facciamo in forma estremamente sintetica accomandiamo vivamente ad un libro di testo. [1]

4.1 Prime nozioni sui sistemi lineari *Definizione di:*

- Sistemi lineari, cioe' insiemi di polinomi di primo grado in piu' variabili.
- Sistemi compatibili ed incompatibili, cioe' con o senza soluzioni.
- Sistemi equivalenti, cioe' con le stesse soluzioni.
- Sistemi indeterminati, cioe' con piu' di una soluzione (anche per una singola variabile).
- Metodo di sostituzione per la soluzione dei sistemi. [2]

Ad ogni sistema associamo una matrice, cioe' una tabella che riporti i coefficienti delle ingognite rivisi per righe e colonne ed i termini noti cone ultima colonna. Ad esempio al sistema $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$ associamo la matrice

2	1	-2	10
3	2	2	1
5	4	3	4

4.2 Sistemi a scalini

Una matrice si dice **matrice a scalini** *se il primo elemento diverso da zero di una riga (tranne la prima) deve essere piu' a destra del primo elemento diverso da zero della riga precedente. Questi elementi non nulli si dicono* pivot*. Le ultime righe possono eventualmente essere nulle. Se i pivots sono tutti* 1 *si dice che la matrice e'* ridotta a scala.

Ad esempio, fra le seguenti matrici $A_0, A_1, A_3, A_5, A_7, A_8$ *sono a scalini, non lo solo invece* A_2, A_4, A_6*:*
$A_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&0&2 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0&1&3&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0&0&4 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 5&1&1&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 6&1&1 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} A_7 = \begin{pmatrix} 1&1&1&3 \\ 0&1&1&2 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} A_8 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$

Un sistema si dice a scalini se ha la matrice a scalini. Se l'ultima riga di un seifatto sistema non nulla e' del tipo $(0, 0, ..., 0, a)$ *dove* $a \neq 0$ *allora il sistema e'* **incompatibile**. *Ad esempio la matrice* A_1*,* A_2*,* A_3*,* A_5*,* A_6*, corrispondono a un sistemi impossibili, come pure* A_2 *che pero' non e' a scalini. Invece* A_0 *corrisponde ad un sistema con soluzione* $x = 0$*,* $y = 1$*.*

Altrimenti la una riga finale non nulla si puo' vedere un'equazione con una sola incognita (magari la prima che appare). Si risolve simbolicamente rispetto a quell'incognita e la si sostituisce. Il sistema diventa cosi' con una incognita in meno e una matrice gia' a scalini. Iterando il procedimento (stavolta senza introdurre nuovi paramentri) si giunge a descrivere tutte le soluzioni. Per A_4 si ha $x = 0$, $y = 4$. Per A_7 si ha soluzione con $z = 1$, $y = 1$, $x = 1$ (si ritrovano nell'ordine con il metodo di sostituzione). Talvolta le soluzioni sono non univoche (sistema indetermonato) e ci si serve di parametri scelti oppurtunamente (fra le incognite). Ad es A_8 corrisponde ad un sistema con soluzioni $z = z$ (questa cosa ovvia sottintende che si e' scelto z come paramentro) e poi $y = -z$ e $x = -2z + 1$.

Vediamo come si riduce una matrice ad una forma a scalini.

[1] vedi qualunque testo ad es (FM) che riporta anche esercizi svolti, (AD) e anche dispensa su Teams

[2] noto al lettore fin dalle scuole superiori.

4.3 Algoritmo GJ (di Gauss-Jordan) per la soluzione dei sistemi
Si dicono **operazioni elementari sulle righe delle matrici (o mosse di Gauss)***. le seguenti:*[3]
0) lo scambio di due righe,
I*) la moltiplicazione degli elementi di una riga per uno scalare,*
II*) a sostituzione di una riga la somma di se stessa con un'altra (elemento per elemento).*

Allora, tramite mosse di Gauss, e' possibile **trasformare un sistema in uno equivalente con a matrice a scalini** *e quindi facilente risolvibile.*

Se diciamo equivalenti matrici che si ottengono l'una dall'altra con operazioni elementari abbiamo che *matrici equivalenti danno luogo a sistemi equivalenti.*

Competenze:
- data una matrice saperla ridurre a scala con algoritmo GJ. Per un tutorial sul metodo GJ vedi:
https://www.youtube.com/watch?v=Hv6NYGhCIFk
- dato un sistema lineare con eventuali parametri, dare -attraverso l'algoritmo GJ- condizioni necessarie e sufficienti affinche' il sistema abbia soluzione e se questa e' unica. Sapere inoltre descrivere le soluzioni in funzione dei parametri dati o introdotti.

4.4 Esempio Per studiare il sistema nelle incognite x, y, z e paramento a.

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y + z = -1 \\ 4x - 5y + z = a \end{cases}$$

e matrice completa

1	1	1	a
2	-1	1	- 1
4	-5	1	a

applichiamo l'algoritmo GJ con le traformazioni elementari:
$R_2 := R_2 - 2R_1 = (0, -3, -1, -1 - 2a)$
$R_3 := R_3 - 4R_1 = (0, -9, -3, -3a)$ e giungiamo a
$R_3 := R_3 - 3R_2 = (0, 0, 0, 3a + 3)$

1	1	1	a
0	-3	-1	- 1-2a
0	0	0	3a+3

.

.

La lettura della terza riga ci dice che il sistema e' impossibile se $0 \neq 3a + 3$ cioe' $a \neq -1$. Se invece $a = -1$ allora possiamo dimenticare la terza riga (che e' diventata nulla) e otteniamo

.

1	1	1	-1
0	-3	-1	1

.

Dunque possiamo considerare z come paramentro (si noti che il paramentro a e' scomparso) e dalla seconda riga/equazione si ottiene $y = -\frac{1}{3}(z + 1)$ e sostituendo nella prima $x = -\frac{4}{3}y = -\frac{4}{3}(z + 1)$. Per ricordare che z e' stato scelto come paramentro su scrive talvolta $z = z$. L'insieme delle soluzioni e' pertanto

$$\{(-\frac{4}{3}(z + 1), -\frac{1}{3}(z + 1), z) \ / \ z \in K\}$$

Per esercizio supplementare verificare che questo insieme coincide con il seguente[1]

$$\{(4z, z, -3z - 1) \ / \ z \in K\}$$

[3]vedi dettagli in Teorema 10.3
[1]si proceda per doppia inclusione oppure si ponga $-\frac{4}{3}(z + 1) = 4z'$ e si proceda...

Esercizi: Determinare per quali valori del paramentro a il seguente sistema ha soluzioni e, in tal caso, descriverle (scegliendo opportuni parametri) [1]

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ 2x + 2y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z = -1 \\ 2x + 2y = a \\ 3x + 4y - z = -a^2 \end{cases}$$

$$,\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 7 \\ 3x - 2y + z = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -x + 3y + z = 7 \\ 3x - 2y + z = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{k}{2} \\ (k+1)x + y + z = k \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} ax + y + z + t = 4 \\ x + 2y + z - 4t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 3t = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z + at = a \\ y + z + t = 2 \\ -x + 2y + t = 2 \\ -x + y = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ x - y - kz = -k \end{cases}$$

4.5 Esempio con l'algoritmo GJ discutiamo e risolviamo il sistema letterale $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ con matrice $\left(\begin{array}{c|c||c} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{e} \\ \hline \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \end{array}\right)$ Possiamo assumere $a \neq 0$ (altrimenti scambiamo le righe) e partire con l'algoritmo:

$$R_1 := \frac{1}{a}R_1 \quad \left(\begin{array}{c|c||c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ \hline \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \end{array}\right) \qquad R_2 := R_2 - c \cdot R_1 \quad \left(\begin{array}{c|c||c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ \hline 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{af-ec}{a} \end{array}\right)$$

Se $ad - bc = 0$ e $af - ec \neq 0$ il sistema e' impossibile
Se $ad - bc = 0$ e $af - ec = 0$ il sistema si riduce ad una sola equazione e quindi e' indeterminato. Altrimenti se $ad - bc \neq 0$ continua con

$$R_2 := \frac{a}{ad-bc}R_2 \quad \left(\begin{array}{c|c||c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{e}{a} \\ \hline 0 & 1 & \frac{af-ec}{ad-bc} \end{array}\right) \qquad R_1 := R_1 - \frac{b}{a}R_2 \quad \left(\begin{array}{c|c||c} 1 & 0 & \frac{ed-bf}{ad-bc} \\ \hline 0 & 1 & \frac{af-ec}{ad-bc} \end{array}\right)$$

e si giunge cosi' alla soluzione del sistema $x = \frac{de-bf}{ad-bc}$ e $y = \frac{fa-ce}{ad-bc}$ che si puo' descrivere anche con il linguaggio del "metodo di Cramer" (vedi 11.7) con le formule

$$x = \frac{de-bf}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{af-ec}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

[1] Altri esercizi svolti si trovano su (FM) cap. 1 e su (BLR) pag 12 e seguenti. Oppure su (CC) o su (SCHAUM)

5 Vettori geometrici

In questa sezione introduciamo il concetto di vettore nello spazio eculideo 3D in maniera ingenua riservandoci di approfondire lo studio una volta in possesso degli strumenti dell'Algebra Lineare [1]

- Definizione di Piano Cartesiano: insieme $\mathbb{R}^2$ di coppie (ovvero punti) $P = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ (numeri reali).

- Definizione di Spazio Cartesiano: insieme $\mathbb{R}^3$ di terne (ovvero punti) $P = (x, y, z)$ con $x, y, z \in \mathbb{R}$ (numeri reali). Sara' detto anche spazio 3D. Il piano cartesiano si identica con il sottoinsieme dello spazio fatti dalle terne $(x, y, 0)$.

A seguire si usera' la seguente notazione $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = ...$

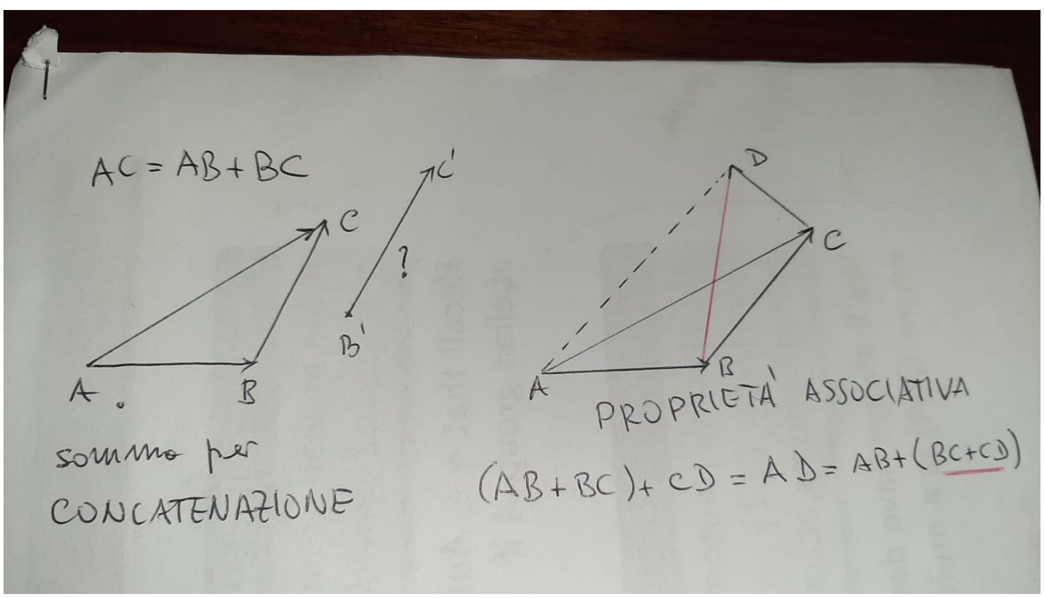
Piu' in generale, con $\mathbb{R}^n$ is indica l'insieme dei vettori numerici di lunghezza n cioe' cosiddette n-uple di numeri reali, ovvero stringhe ordinate $x_1, x_2, ..., x_n$.Si useranno anche notazioni tipo $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$. [2].

5.1 Vettori applicati nel piano/spazio - *Un* **vettore applicato** *(in A) e' un segmento orientato ovvero una coppia $AB := (A, B)$ di punti A, B punti.*

- **Somma di vettori applicati***: la si definisce per concatenazione $AB+BC = AC$, laddove la somma $AB + B'C$ non e' (per ora) definita se $B \neq B'$. Si noti che si sta pensando ai lati del triangolo di vertici A, B, C.*

- La somma di vettori applicati e' ovviamente associativa in quanto (si costruisca la figura)
$(AB + BC) + CD = AC + CD = AD = AB + BD = AB + (BC + CD)$.

- Prodotto di un vettore applicato AB per uno scalare α (cioe' un numero reale) si definisce come il vettore AB' tale che B' sia sulla retta AB dallo stesso lato di B se $\alpha > 0$ (o dall'altro se $\alpha < 0$) e che la lunghezza di AB' sia α volte quella di AB.



[1] vedi (AD) oppure appunti su VETTORI su Teams

[2] si noti che qui l'indice serve per indicare in che ordine sono scritte le coordinate: x_1 e' la prima, x_2 la seconda etc.

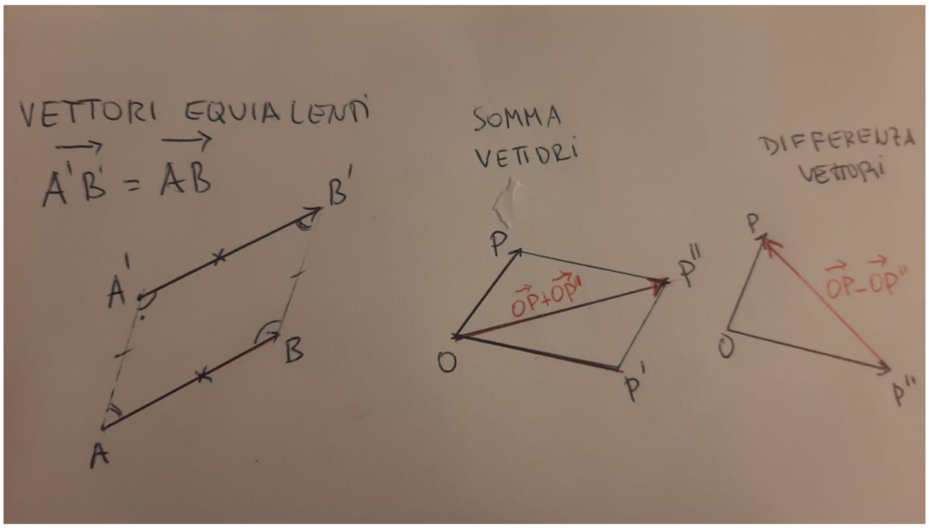
5.2 Vettori liberi nel piano e nello spazio

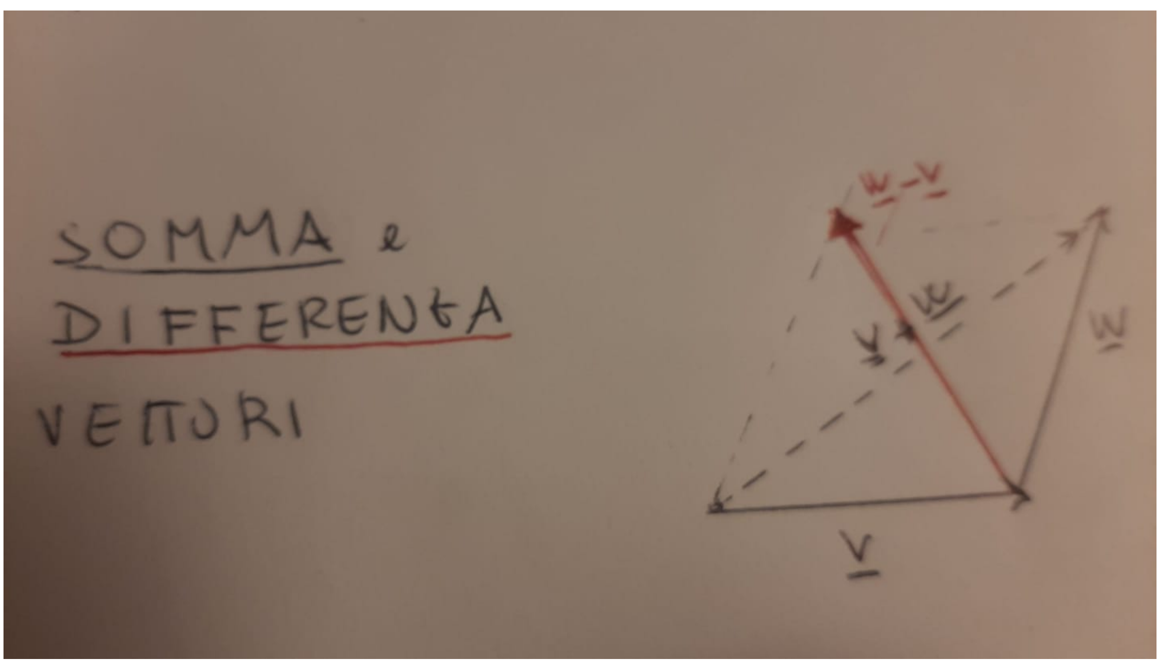
- Due vettori applicati: AB e $A'B'$ sono equivalenti sse $ABB'A$ e' un parallelogramma. L'insieme dei vettori equivalenti ad AB si dice **vettore libero** *e si denota con $\vec{v} = \vec{AB} = \vec{A'B'}$.*

- Dato un punto A, un vettore libero $\vec{v}$ puo' essere rappresentato in uno ed un solo modo da un vettore applicato in A, cioe' $\forall \vec{v}, \exists! B \ : \vec{v} = \vec{AB}$,

- Somma fra vettori liberi $\vec{v} = \vec{OP}$ e $\vec{OP'}$ si defisce necessariamente come la classe di equivalenza di $\vec{OP''}$ dove PP'' e' il vettore equivalente a OP' ma applicato in P. Equivalentemente si osservi che P'' e' tale che $OPP''P'$ sia un parallelogramma (regola del papallelogramma).

- Prodotto di un vettore libero $\vec{OP}$ per uno scalare α si definisce necessariamente come la classe del vettore applicato OP per lo scalare α (vedi sopra).





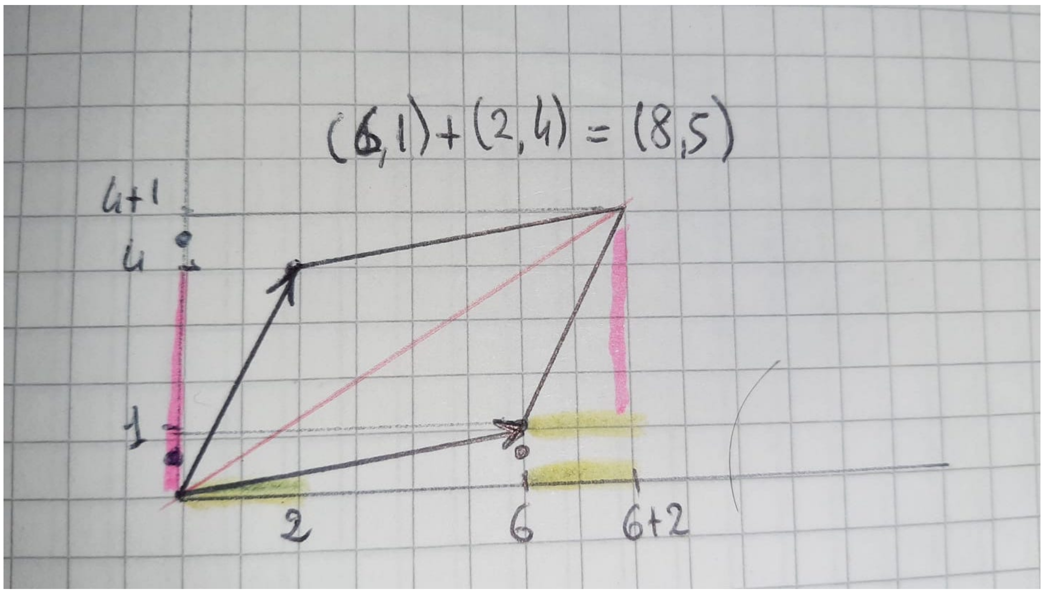
5.3 Vettori numerici*:*
- Si definisce la somma algebrica -componente per componente- fra coppie

$$P_1 + P_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e del prodotto per lo scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ *come* $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.
Analogamente di procede con le terne.
- Si ha che $P_1 \vec{P}_2 = P_3 \vec{P}_4$ *come sopra se e solo se*

$$x_1 - x_2 = x_3 - x_4 \quad \text{e} \quad y_1 - y_2 = y_3 - y_4$$

dunque $P_1 \vec{P}_2 = \vec{O}P$ *con* $P = P_2 - P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
- Scrivendo $\vec{P}$ *in luogo di* $\vec{O}P$ *si ha* $P_1 \vec{P}_2 = (P_2 \vec{-} P_1)$. *Quindi, se si vede* P *come rappresentante di* $O\vec{P}$ *si ha che le operazioni sono le stesse, cioe'* $O\vec{P}_1 + O\vec{P}_2 = \vec{O}(P_1 + P_2)$ *e anche* $\alpha(O\vec{P}) = O(\vec{\alpha} P)$



5.4 Distanza di due punti $P1, P_2$ *nello spazio 3D la si definisce come*

$$|P_1 - P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Per quanto sopra questa funge anche come lunghezza o modulo di in vettore libero o applicato. [1]

5.5 Prodotto scalare geometrico *Si definisce prodotto scalare geometrico dei vettori* $\vec{O}P_1$ *e* $\vec{O}P_2$ *il numero reale che e' il prodotto di* $|OP_1|$ *per* $|OP_2'|$ *dove c e' la proiezione ortogonale di* P_1 *sulla retta* OP_1 *preso con il segno* $+$ *o con segno* $-$ *se* P_2' *risulta stessa semiretta da* O *verso* P_1 *(oppure con il segno meno).*

5.6 Prodotto scalare algebrico *Si definisce il prodotto scalare di due coppie come* $(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$. *Piu' in generale dati due vettori numerici* $A = (a_1, \ldots, a_n)$ *e* $(b_1, \ldots, b_n)$ *si defisce come*

$$A \cdot B = (a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) := a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

[1] questa definizione vale anche nel piano dove la si vede con $z = 0$

Valgono le seguenti proprieta' elementari: [2]
- $A \cdot B = B \cdot A$ *, il prodotto scalare e' commutativo*
- $(A' + A'') \cdot B = A' \cdot B + A'' \cdot B$
- $(\alpha A) \cdot B = \alpha(A \cdot B)$

Si dice che il prodotto scalare e' bilineare.

5.7 Teorema: il prodotto scalare geometrico coincide con quello algebrico *(**** [3]*). Ne segue che:*
- *due vettori geometrici sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare algebrico e' nullo.*
- *il prodotto scalare geomerico e' commutativo*

Una terna (A, B, C) di punti di $\mathbb{R}^n$ si definsce **triangolo (orientato)** e si scrive talvola solo ABC.

Ovviamente risulta $AB + BC + CA = AA$ e $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$ ovvero $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

5.8 Prime applicazioni del prodotto scalare

1) il **terzo lato** $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ *di un triangolo di lati vettori* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *vettori e' lungo* [1]

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}.$$

2) **Teorema di Pitagora***: la lunghezza di un lato al quadrato e' uguale alla somma delle lunghezze degli altri due se e solo se questi sono ortogonali (cioe' il loro prodotto scalare e' zero).*

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

3) **Teorema di Carnot***: il coseno di un angolo fra i vettori* $\vec{a}, \vec{b}$ *resta individuato da:* [2]

$$cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})}}.$$

5.9 Area del triangolo orientato OAB *dove* $O = (0, 0)$*,* $A = (a_1, a_2)$*,* $B = (b_1.b_2)$*. Essa risulta* [3]

$$\frac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1) =: \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

dove la seconda eguaglianza e' solo le definizione delle notazione. Questo scalare e' nullo se OAB *sono allineati, ovvero* A *e* B *come vettori sono uno multiplo dell'altro. Questo scalare e' poi positivo se la minima rotazione per portare la retta* OA *e su =* B *e' antioraria (cioe' se* O, A, B *sono in ordine antiorario), negativo altrimenti.*

---

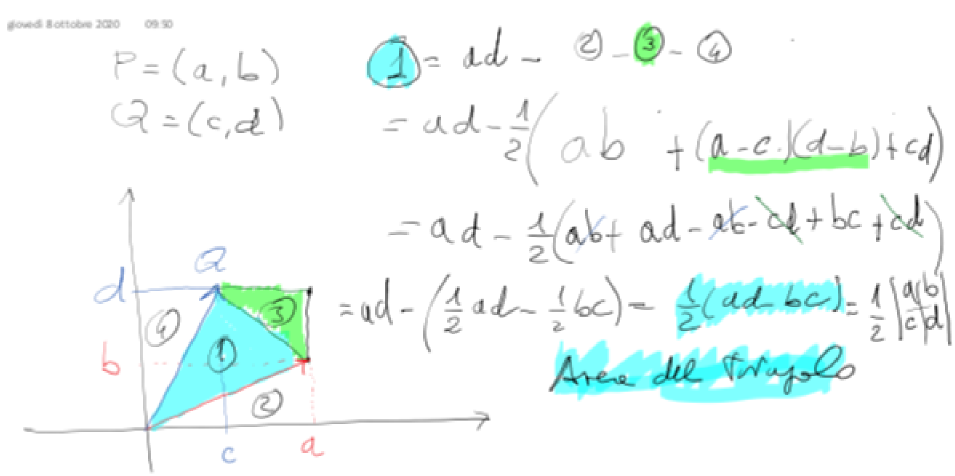
[2] verifica diretta

[3] *** dimostrazione: date le coordinate dei punti $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ calcolare la retta per C perpendicolare a OB e l'intesezione C' di queste due. Calcolare la lunghezza di C' e moltiplicarla per quella di OB. Si ottiene $ac + bd$.
Per dimostrare l'enunciato in un altro modo si puo' osservare che anche il prodotto scalare geometrico e' lineare in entrambe le variabili quindi basta verificare l'equivalenza delle due formule sulla base canonica. E questa e' ovvia.

[1] basta calcolare $|b|^2 = b \cdot b = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b = |a|^2 + |b|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Si noti che qui si usano le proprieta' bilienare e commutativa del prodotto scalare.

[2] vedi 13.13 piu' avanti.

[3] vedi figura



Ne segue che l'area del triangolo $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1.b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ *e'*

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \\ b_1 - c_1 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}$$

Esercizio: verificare che calcolando l'area di OAB con metodo di 5.9 si ottiene la stessa formula che calcolando il valore prodotto fra numeri $|A| \cdot |B| \cdot \sin \hat{AB}$, dove $\sin \hat{AB} = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \hat{AB}}$ (dove il segno va interpretato in funzione dell'orientamento del triangolo)

5.10 *(primo)***Teorema di Euclide***: il quadrato costriuto su un cateto* $\underline{a}$ *di un triangolo rettangolo e' equivalente al prodotto scalare di* $\underline{a}$ *con l'ipotenusa* $\underline{c}$*. (***)* [1]

Competenze:

- date le coordinate dei vertici di un triangolo saperne calcolare area con la formula del determinente e l'ampiezza degli angoli grazie il Teorema di Carnot.

- Dato un punto saper scrivere l'equazione della retta per quel punto e parallela/perpendicolare ad una retta data (in qualsiasi forma).

- saper trasformare le equazioni di una retta (vettoriale, parametrica, cartesiana) l'una nell'altra e deterrminare i numeri direttori

[1]Se indico con $\underline{a}, \underline{b}$ i cateti di un triangolo si ha che $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$ e' l'ipotenusa. Allora $\underline{a} \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c}$

6 Spazi vettoriali, introduzione

Passiamo ora ad un trattemento meno ingenuo della Teoria introducendo un concetto decisivo per l'Algebra Lineare. [1]

6.1 Definizione di Spazio Vettoriale su un campo K [2]

E' un insieme V i cui elementi si dicono vettori dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ come segue
- l'operazione interna $+$ somma due vettori ed associativa, commutativa, con elemento neutro (detto zero, e indicato $\underline{0}$) e ogni v elemento ha opposto $-v$
- un' operazione esterna di prodotto fra elementi di K (detti "scalari") e vettori tale che $\forall k_1, k_2 \in K$ e $\forall v \in V$ risulta $k_1(k_2)v = (k_1k_2)v$ e $1v = v$.
- $\forall k_1, k_2 \in K$ e $\forall v_1, v_2 \in V$ risulta $(k_1 + k_2)v_1 = k_1v_1 + k_2v_1$ e $k_1(v_1 + v_2) = k_1(v_1 + v_2)$.

6.2 Esempi di spazi vettoriali*: Dato un campo K, se dotati di somma (componente per componente) e prodotto con uno scalare (uguale per le componenti) i seguenti insiemi sono tutti spazi vettoriali su K:*

- l'insieme K^n delle n-uple (ordinate),
- l'insieme $K[x]$ dei polinomi in una variabile,
- l'insieme $K[x_1, \ldots, x_m]$ dei polinomi in m variabili,
- l'insieme $M_{n\times m}(K)$ delle matrici $A = (a_{ij})$ con n righe ed m colonne [3]
- l'insieme delle successioni di elementi di K;
- l'insieme delle funzioni a valori K e un fissato dominio D.
- l'insieme delle funzioni a valori reali e continue (con un fissato dominio).
- l'insieme delle funzioni a valori reali e derivabili (con un fissato dominio).

6.3 Proprieta' elementari *(dim): Se V e' un K-spazio vettoriale, allora $\forall \underline{v} \in V, \forall \alpha \in K$ si ha* [4]

- il vettore nullo $\underline{0}$ e' unico, l'opposto $-\underline{v}$ di un vettore $\underline{v}$ e' unico;
- $0\underline{v} = \underline{0} = \alpha\underline{0}$ e anche $(-\alpha)\underline{v} = -(\alpha\underline{v}) = \alpha(-\underline{v})$.

6.4 Definizione di applicazione lineare *Un'applicazionee $f : V \to W$ fra spazi vettoriali si dice lienare se ne rispetta le opreazioni, cioe' se $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, \forall \alpha \in K$ risulta:*

- $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$ e
- $f(\alpha\underline{v}_1) = \alpha f(\underline{v}_1)$

Un'applicazione lineare biettiva (cioe' invertibile e che rispetti le operazioni) $f : V \leftrightarrow W$ si dice isomorfismo di spazi vettoriali. Si scrive $V \simeq W$ e si dice che V e W sono isomorfi. E' chiaro che due spazi isomorfi avranno le stesse proprieta' algebriche.

Esempi
- se k e' un fissato scalare un'applicazione definita da $f(\underline{v}) = k\underline{v}$ $(\forall \underline{v} \in V)$ e'

---

[1] vedi (FM) cap 2 e 3, oppure (LL) cap 2 o anche (AD)
[2] vedi dettagli su libro di testo
[3] Se $A = (a_{ij})$ e' una matrice $m \times n$ e α uno scalare, si definisce il prodotto $\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}$. Se la matrice $B = (b_{ij})$ e' anch'essa $m \times n$, si definisce la somma $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$, ovvero componente per componente.
[4] per la dim vedi un libro di testo

lineare[5]. Questa funzione e' invertibile se e solo se $k \neq 0$. In tale caso l'inversa e' la funzione $f^{-1}(\underline{v}) = \frac{1}{k}\underline{v}$.
- $f(x,y) = x + y$ e' lineare del tipo $K^2 \to K$ ma non e' invertibile perche' non iniettiva sebbene sia suriettiva
- $f(x,y) = (0,0)$ allora $f : K^2 \to K^2$ e' lineare, non iniettiva non suriettiva
- $f(x,y) = (1,1)$ non e' lineare
- $f(x,y) = (1,0)$ non e' lineare
- $f(x,y) = (y,0)$ e' lineare, non iniettiva non suriettiva
- $f(x,y) = (y,x+y)$ e' lineare, non iniettiva non suriettiva

6.5 Definizione di sottospazio*: e' un sottoinsieme non vuoto V_1 di V chiuso rispetto alle operazioni (e quindi e' uno spazio vettoriale in se') si dice sottospazio e si scrive $V_1 \leq V$. In simboli:*
- $\forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in K, (v_1 + v_2) \in W, \alpha v_1 \in W$.

Competenza: saper verificare se un insieme di vettori e' un sottospazio

Esempi: vedi libro di testo in partcolare (FM) o (AD)

6.6 Teorema su nucleo e immagine*(dim) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare*
1) $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ *e' un sottospazio del dominio V.*[1]
Inoltre f e' iniettiva se e solo se $\ker f = \{\underline{0}\}$ [2]
2) $\mathrm{im} f := \{f(v) \mid v \in V\}$ *e' un sottospazione di W ed f e' ovviamente suriettiva se e solo se* $\mathrm{im} f = W$. [3]

6.7 Definizione di Combinazione lineare*: Una combinazione lineare di n vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \in V$ e' una somma*

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots \alpha_n \underline{v}_n$$

dove $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ sono scalari (non necessariente distinti).

6.8 Teorema sul sottospazio generato *(dim[4]): Sia $X = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ un sottoinsieme finito di V, allora:*
- l'insieme di $S = \{\sum_{1=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_i \in K\}$ di tutte le **combinazioni lineari** *dei vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ risulta essere un sottospazio, anzi e' proprio il piu' piccolo sottospazio che contiene X, si dice* **sottospazio generato** *dall'* **insieme di generatori** *X e si scrive $S = \langle X \rangle = \langle \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \rangle$ oppure $S = \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n)$.*
Si dice che X e' un **sistema di generatori** *per S,*

Se X e' infinito, allora analogamente $\langle X \rangle = \{\sum_{1=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \mid \alpha_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$ e' l'insieme delle combinazioni lineari di vettori in X, dove pero' n non e' fissato.

Esempio K^2 e' generato da $\{(1,0), (0,1)\}$ mentre $K[x]$ e' generato dell'insieme (infinito) dei monomi $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$.

---

[5] verifica immediata
[1] dim lasciata al lettore. Per un approfondimento vedi 7.11
[2] si noti che $f(\underline{x}_1) = f(\underline{x}_2)$ se e solo se $f(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \underline{0}$
[3] dim diretta
[4] e' sufficiente una verifica diretta con la definizione di sottospazio oppure notare che il sottospazio generato e' l'immagine della funzione di combinazione lineare

Definizione: uno spazio vettoriale finitamente generato (fg) se $\langle X\rangle = \langle \underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\rangle$ cioe' V ha un insieme finito di generatori. Ad esempio K^n sono finitamente generati, mentre $K[x]$ non lo e'.[5]

6.9 Teorema su intersezione e somma di sottospazi *(dim Se V_1 e V_2 sono sottospazi, allora:*
1) $V_1 \cap V_2$ e' il piu' grande sottospazio contenuto in entrambi V_1 e V_2, [1]
2) $V_1 + V_2 = \langle V_1, V_2\rangle = \{\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \mid \underline{v}_1 \in V_1, \underline{v}_2 \in V_2\}$ e' il piu' piccolo sottospazio che contiene entrambi V_1 e V_2. [2]

6.10 Somma Diretta di Sottospazi *Si dice che V e' somma diretta dei sottospazi V_1,V_2,..., V_t se ogni elemento $\underline{v}$ di V si scrive in uno ed un solo modo come somma $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + ... + \underline{v}_t$ con $\underline{v}_i \in V_i$ per ogni i. In queste condizioni si scrive*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_t$$

Quando $t = 2$, si ha $V = V_1 \oplus V_2$ se e solo se $V_1 + V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ [3]

7 Dipendenza lineare e Basi

[4]

Con abuso di terminologia, una n-upla di vettori si dice **sistema (ordinato)** di vettori.

7.1 Definizione di dipendenza lineare
Un vettore $\underline{v}$ si dice dipendere da un insieme X di vettori se e solo se $\underline{v} \in \langle X\rangle$ cioe' se $\underline{v}$ e' combinazione lineare di vettori di X o equivalentemente $\langle \underline{v}, X\rangle = \langle X\rangle$ (dim).

Un sistema X si dice linearmente dipendente *se e solo se esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non nulli e vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in X$ tali che $\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$*
Simmetricamente, un insieme finito $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ di vettori si dice indipendende se da $\alpha_1\underline{v}_1 + ... + \alpha_n\underline{v}_n = 0$ segue $\alpha_i = 0$ per ogni i.

Se verifica immediatamente che se X e' fatto da due vettori, allora e' dipendente se e solo se questi due vettori sono proporzionali.

7.2 Teorema sui sistemi dipendenti *(dim[5]):*
un sistema e' dipendente se e solo se un suo vettore e' combinazione lineare dei rimanenti.

---

[5]poiche' se n e' il massimo grado di un polinomio in un insieme di gereratori, allora x^{n+1} non si puo' scrivere come le combinazioni lineare di polinomi che hanno grado minore.

[1]E' sufficiente verificare che $V_1 \cap V_2$ e' un sottospazio

[2]E' sufficiente verificare che l'insieme descritto come $V_1 + V_2$ e' un sottospazio

[3]Sia $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{v}'_1 + \underline{v}'_2$ con $\underline{v}_1, \underline{v}'_1 \in V_1$ e $\underline{v}_2, \underline{v}'_2 \in V_2$, dunque $V_1 \ni \underline{v}_1 - \underline{v}'_1 = \underline{v}'_2 - \underline{v}_2 \in V_2$. Allora $\underline{v}_1 - \underline{v}'_1 = \underline{v}'_2 - \underline{v}_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Ne segue $\underline{v}_1 - \underline{v}'_1 = \underline{v}'_2 - \underline{v}_2 = \underline{0}$ e cosi' $\underline{v}_1 = \underline{v}'_1$, $\underline{v}_2 = \underline{v}'_2$. Viceversa se il modo di scrivere e' unico e prendo $\underline{v} \in V_1 \cap V_2$ posso scrivere $\underline{v} = \underline{v} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{v}$ in due modi apparentemente diversi. Ne segue che $\underline{v} = \underline{0}$ e $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ cvd.

[4]vedi (FM) cap 3 e 4, oppure (LL) cap 2 oppure (AD)

[5]elementare, vedi libro di testo

7.3 Teorema sulla combinazione lineare *(dim)* 6

Dato un sottoinseme finito (ordinato) $X = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\} \subseteq V$*, la funzione (di combinazione lineare)* φ_X *data dalla formula:*

$$\varphi_X : (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n \in V.$$

e' una funzione lineare.
Inoltre
1) φ_X *e' iniettiva se e solo se* X *e' linearmente indipendente;* 1
2) φ_X *e' suriettiva se e solo se* X *e' un sistema di generatori per* V*;* 2

7.4 Teorema di caratterizzazione delle basi *(dim):*

Per un sottoinseme finito (e quindi ordinato) $X = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\} \subseteq V$ *sono equivalenti:*
i) X *e' un insieme indipendente di generatori*
ii) X *e' un insieme indipendente massimale*
iii) X *e' un insieme minimale di generatori.*
iv) per ogni $\underline{v} \in V$ *esiste ed e' unica una* n*-upla* $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ *tale che* $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + ... + \alpha_n \underline{v}_n$*, cioe'* φ_X *e' biettiva.* [3]

Un insieme X *siffato si dice* base *per* X *e si ha*

Corollario *Ogni ogni insieme (finito) di generatori contiene una base.* 4

Corollario *Uno spazio vettoriale* V *ha una base finita d'ordine* n *se e solo se e' isomorfo a* K^n*.* 5

Corollario $X = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ *e' una base per* V *se e solo se* $V = \langle \underline{v}_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle \underline{v}_n \rangle$

Per **base ordinata** e' si intende una n-upla di vettori $(\underline{v}_1, ...\underline{v}_n)$ tale che l'insieme $\{\underline{v}_1, ...\underline{v}_n\}$ e' una base [6]. Gli scalari $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ si diranno le componenti di V rispetto alla base X.

Per base (ordinata) canonica di K^n si intende quella fatte dalle righe dalle matrice identica ovvero la matrice con 1 sulla diagonale e 0 altrove[7]. I suoi vettori

---

[6]per un approfondimento vedi il Teorema 8.4

[1]Se X e' linermente dipendente, allora esistono scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$; pertanto $\varphi_X(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \underline{0} = p_X(0, ..., 0)$ e cosi' φ_X non e' iniettiva. Inversamente se φ_X non e' iniettiva, allora esistono $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq (\beta_1, ..., \beta_n)$ tali che $\varphi_X(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \varphi_X(\beta_1, ..., \beta_n)$. Un semplice calcolo porta a verificare che cio' equivale a $(\alpha_1 - \beta_1)\underline{v}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\underline{v}_n = \underline{0}$ e quindi X e' dipendente.

[2]questo e' ovvio per definizione di sistema di generatori, vedi 6.8

[3]Se vale (i) vale (ii) in quanto ogni elemento fuori di X e' generato da X e quindi se lo aggiungiamo ad X ottieniamo un sistema dipendente, sicche' X e' indipendente massimale. Viceversa, se vale (ii) e X e' indipendente massimale allora ogni elemento fuori di X e' generato da X, che e' quindi un sistema di generatori, e vale (i).

Inoltre, se vale (i) allora vale (iii). Infatti se per assurdo e' possibile togleire un elemento a X ed avere uncora un sistema di generatori, allora questo elemento dipenda da X, che non e' indipendne, assurdo. Viceversa se vale (iii) e X, per assurdo, e' dipendente, allora un suo elemento dipende dagli altri. Sicche', togliendolo da X, si ottiene ancora un sistema di generatori, una contraddizione.

Per provare poi che (iv) e' equivalente alle altre, basta mostrare che e' equivalente a (i) grazie a 7.3 in quanto "esiste ed e' unica" vuol dire che la funzione φ_X e' suriettiva ed iniettiva

[4]dipende dal fatto che una base e' un insieme minimale di generatori

[5]resta solo da notare che K^n ha una base finita d'orfine n, quella canonica

[6]si noti che gli stessi vettori ordinati diversamente possono essere nella stessa base, ma dare luogo a due basi ordinate differenti. Si osservi inoltre che in una base ordinata non ci sono due vettori uguali e nemmeno proporzionali ne' il vettore nullo.

[7]Ad es. per K^3 la base canonica e' $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

si indicano con $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots$. Le componenti di $(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto alla base canonica son proprio $(x_1, \ldots, x_n)$.

7.5 Esercizio/Competenza *dato $\underline{v} \in K^n$ e una base $\mathcal{B}$, scrivere le componenti di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$.* [1]

Ad esempio : determinare, se possibile, degli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che per $\underline{v} = (1, 1, -1)$ si abbia $v = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \alpha_3 \underline{w}_3$ con $\underline{w}_1 = (1, 1, 0)$, $\underline{w}_2 = (1, -1, 0)$, $\underline{w}_3 = (1, 5, k)$

7.6 Teorema di Steinitz (Lemma di scambio) **** NO DIM*
Sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ una base finita e $X = \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ un sottoinsieme indipendente di uno spazio vettoriale V, allora $m \leq n$. [2]

7.7 Teorema di equipotenza delle basi *(dim).*
Due basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V hanno lo stesso numero di vettori, detto dimensione $\dim V$. [3]
Corollario*: Se un insieme X e' fatto da esattamente $n = dim\ V < \infty$ vettori, allora sono equivalenti:*
i) X e' una base
ii) X e' insieme di generatori
iii) X e' indipendente.

Esercizio: saper individuare se un insieme di vettori di K^n costituisce una base.

7.8 Teorema di completamento/estrazione di una base *(dim): sia V uno spazio vettoriale f.g. Allora*
- ogni sottoinsieme indipendente X di V e' contenuto in una base di V
per di piu', si puo' completare X ad una base di V prendendo opportuni vettori da una prefissata base di V (ad esempio quella canonica) . [4]
Corollario *Se V_1 e' un sottospazio di V, allora* $\dim V_1 \leq \dim V$ *e vale = se e solo se $V_1 = V$.* [5]

7.9 Teorema di descrizione di uno spazio vettoriale di dimensione finita*: Se V e' uno spazio vettoriale sul campo K ed e' finitamente generato, allora la sua dimensione e' quell'unico n tale che $V \simeq K^n$* [6]

---

[1] scrivere $\underline{v} = \sum_{1=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$, esplicitare i calcoli, mettere a sistema le uguaglianze componente per componente e risolvere il sistema (con GJ), che avra' una ed una soluzione data dalle α_i richieste.

[2] sia per assurdo $n < m$. Si dimostra che e' possibile sostituire ("scambio") $\underline{w}_1$ al posto un vettore in X (ad esempio il primo $\underline{v}_1$, a meno di cambiare l'ordine degli elementi in X) ed ottenere ancora una base $\underline{w}_1, \underline{v}_2 \ldots, \underline{v}_n$. Iterando il ragionamento (ancora $m-1$ volte) per $\underline{w}_2$, $\underline{w}_3 \ldots$ si mostra che $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ e' una base, dalla quale dipenderebbe $\underline{w}_{m+1}$ assordo perche' $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ sono indipendenti.

[3] si applica due volte il Lemma di Scambio con le due basi nei ruoli di $\mathcal{B}$ ed X. Il Teroema vale anche per spazi non finitamente generati, ma la dimostrazione richiede considerazioni di teoria degli insiemi che qui evitiamo

[4] se X non e' una base, cioe' $\langle X \rangle \neq V$ allora c'e' in vettore $\underline{v}_1$ della prescelta base che non sta in $\langle X \rangle$ (se tutti i vettori della base stessero in $\langle X \rangle$ allora $\langle X \rangle = V$, assurdo) Si aggiunge $\underline{v}_1$ ad X. Si ottiene $X_1 = X \cup \{\underline{v}_1\}$ e si ripete il ragionamento con un eventuale $\underline{v}_2$ e $X_2 = X \cup \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Dopo al piu' n passi si arriva ad una base

[5] si completa una base di V_1 ad una di V

[6] per 7.4 lo spazio V ha una base finita e quindi l'isomorfismo. Che n sia unico dipende dal fatto che $n = \dim R^n$..

Competenza: Dato sottospazio V_1 generato da un insieme finito di vettori fra questi e' possibile individuare un sottoinseme indipendente massimale (cioe', equivalentemente tale che quelli cancellati dipendano da quelli rimasti e non se ne possoano cancellare altri). Il numero s dei vettori rimasti $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_s$ costituisce la dimensione di V_1 o ogni vettore di V_1 si scrive (in unico modo) come combinazione lineare di questi, tramite s parametri.

In particolare, dato un insieme (finito) X di vettori di K^n
- verificare se e' indipendente [1].
- individuare sue parti libere massimali. [2]
- eventualmente completarle ad una base dello spazio vettoriale.[3]
- riconoscere se un vettore $\underline{v}$ dipende da X. [4]

Competenza: Dato un sottospazio, saperne individuare una base.[5]
Ad esempio (al variare di k)determinare una base di $W_1 = \ker f$ con
$f(x, y, z, t) = (kx, x - y + z, y - z)$

Competenza Dati insiemi di generatori per due sottospazi V_1 e V_2, scrivere una base per $V_1 + V_2$.[6] Ad esempio, con
$V_1 = \langle\ (0, 1, 1), (0, 0, k)\ \rangle\ ,\ \ V_2 = \langle\ (0, 1, 2),\ (0, 1, 0)\ \rangle$ (al variare del parametro k)

7.10 Teorema del complemento.*dim*
1) Per ogni sottospazio $V_1 \leq V$ esiste (ma non e' unico) un $V_2 \leq V$ tale che [7]

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

2) Siano X_1 una base di V_1 e X_2 una di V_2. Se $V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$, allora $X_1 \cup X_2$ e' una base per $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ e risulta dunque [8]

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

[1] con l'algoritmo GJ, si scrivono i vettori di X come righe di una matrice e si riduce la matrice a scalini. Il sistema e' dipendente se e solo se risultano righe nulle

[2] (Si controlli se il numero dei vettori sia $\leq n$, altrimenti e' certo che sono dipendenti). Si dispongano i vettori come righe di una matrice e si usi l'algoritmo di GJ per portare la matrice in forma a scalini/ridotta. Le righe non nulle corrispondevano a vettori indipendenti

[3] Si faccia come sopra e si riduca la matrice: i vettori che occorre aggiungere a quelli della base canonica sono quelli che hanno 1 nella posizione dove manca lo scalino.

[4] Si faccia come sopra e si aggiunga alla matrice ridotta una riga fatta dal vettore $\underline{v}$. Si continui il procedimento di riduzione e si veda se la riga $\underline{v}$ si annulla o meno.

[5] indiduare come sopra un sistema indipendente massimale di generatori.

[6] si procede come sopra con X fatto sia dai generatori di V_1 che quelli di V_2.

[7] grazie a 7.4 si completi una base X_1 di V_1 ad un base X di V e si osservi che $X \setminus X_1$ e' una base per $V_2 := \langle X \setminus X_1 \rangle$. Si puo' ora applicare 6.10. Se la dimensione e' infinita il ragionamento e' analogo ma piu' delicato (no dim***)

[8] Se $X_1 = \{\underline{w}'_1, ...\underline{w}'_n\}$ e $X_2 = \{\underline{w}''_1, ...\underline{w}''_m\}$. Per 6.9 ogni $\underline{v} \in V$ si scrive in unico modo come $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ con $\underline{v}_1 \in V_1$ e $\underline{v}_2 \in V_2$. Allora e' chiaro che $X_1 \cup X_2$ e' sistema di generatori. Per provare che e' anche indipendente poniamo
$\alpha'_i \underline{w}'_1 + ... + \alpha'_n \underline{w}'_n + \alpha''_1 \underline{w}''_1 + ... + \alpha''_m \underline{w}''_n = \underline{0}$ dove gli α sono scalari.
Se si scrive $\underline{v}_1 = \alpha'_i \underline{w}'_1 + ... + \alpha'_n \underline{w}'_n$ e $\underline{v}_2 = \alpha'''_1 \underline{w}''_1 + ... + \alpha''_m \underline{w}''_n$ si osserva che $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{0}$.
Per 6.9 si ha $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = \underline{0}$.
Quindi $\alpha'_i \underline{w}'_1 + ... + \alpha'_n \underline{w}'_n = \underline{0}$ e $\alpha''_1 \underline{w}''_1 + ... + \alpha''_m \underline{w}''_n = \underline{0}$.
Poiche' X_1, X_2 sono insiemi indipendenti, tutti gli scalari α sono nulli, cvd.

7.11 Teorema *(****)*
Ogni sottospazioV_1 di uno spazio vettoriale (di dimensione finita) e' il nucleo di una opportuna applicazione lineare. [9]

7.12 Teorema: Formula di Grassmann **** NODIM*
Qualunque siano V_1 e V_2 sottospazi dello spazio V con dimensione finita si ha [10]

$$dim\ (V_1 + V_2) = dim\ V_1 + dim\ V_2 - dim\ (V_1 \cap V_2).$$

In particolare, se X_0 e' una base di $V_1 \cap V_2$ e la si completa da una parte ad una base $X_0 \cup X_1$ di V_1 e dall'altra ad una base $X_0 \cup X_2$ di V_2 si ha che $X = X_1 \cup X_o \cup X_2$ e' una base di $V_1 + V_2$ [1]

Competenza Dati insiemi di generatori per due sottospazi V_1 e V_2 di $\mathbb{R}^n$, scrivere una base per $V_1 \cap V_2$. [2]

Ad esempio, per trattare il caso particolare $V_1 = \langle(1,2,3),(1,0,1)\rangle$ e $V_2 = \langle(1,0,0),(0,2,2)\rangle$, con l'algoritmo GJ (vedi avanti), si verifica che la matrice che ha righe i quattro vettori ha rango 3 (cioe' massimo) e quindi che $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ e' tutto lo spazio. Dunque, per la formula di Grassman, $V_1 \cap V_2$ ha dimenensio $2+2-3 = 1$. Pertanto $V_1 \cap V_2 = \langle v\rangle$ dove v e' un vettore/terna opportuno. Dunque si puo' scegliere $V_2 \ni (1,2,3) - (1,0,1) = v = (2,0,2) \in V_1$. Senza quest'osservazione, si procede scrivendo $v = a(1,2,3) + b(1,0,1) = c(1,0,0) + d(0,2,2)$ come combinazione lineare dei diversi sistemi di generatori e si determinano a, b, c, d.

---

[9] Grazie a 7.10.1 risulta $V = V_1 \oplus V_2$. Ogni $\underline{v} \in V$ si scrive in unico modo come $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$. Se si pone $f(\underline{v}) = \underline{v}_1$ si ottiene un'applicazione lineare di nucleo V_1

[10] si confronti con il cosiddetto "principio di inclusione-esclusione" che afferma che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap A|$, se A, B sono insiemi.

[1] si consideri una base X_0 di $V_1 \cap V_2$ e la si completi da una parte ad una base $X_0 \cup X_1$ di V_1 e dall'altra ad una base $X_0 \cup X_2$ di V_2. Si mostra poi che $X = X_1 \cup X_o \cup X_2$ e' una base di $V_1 + V_2$, laddove e' ovvio che e' sistema di generatori. Per provare che e' indipendente si ponga $0 = \underline{v}$ una combinazione lineare dei sui vettori. Con la proprieta' associativa si scriva $0 = \underline{v}_1 + \underline{v}_0 + \underline{v}_2$ con $\underline{v}_i \in X_i$ $(i = 0,1,2)$. Allora $V_2 \ni \underline{v}_2 = -\underline{v}_0 + \underline{v}_1 \in V_1$,sicche' $\underline{v}_2 \in V_1 \cap V_2 = \langle X_0\rangle$ e necessariamente $\underline{v}_2 = 0$; poiche' ogni elemento di V_2 si scrive in un solo modo come combinazione di vettori di $X_0 \cap X_1$ deve essere $\underline{v}_2 = 0$. Analogamente $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 0$

[2] in genere conviene scrivere i vettori come righe di una matrice, con l'algoritmo GJ , ridurre la matrice ed ottenere una base per lo spazio $V_1 + V_2$ Con la formula di Grassman si conosce dunque anche la dimensione d di $V_1 \cap V_2$. Poi conviene scrivere un vettore di $V_1 \cap V_2$ in due modi come combinazioni lineari di vettori delle basi individuate nel passo precedente per V_1 e V_2, uguagliare e trovare gli scalari, che dipenderanno certamente da paramenti (a meno che dim $V_1 \cap V_2 = 0$) e quindi trovare d elementi indipendenti in $V_1 \cap V_2$.

8 Applicazioni lineari e Riferimenti

[1]

Per la **Definizione di applicazione lineare** si veda 6.4,

8.1 Teorema sulla composizione applicazioni lineari *dim* [2]
1) la funzione composta di due applicazioni lineari e' anch'essa lineare
2) l'inversa di isomorfismo e' ancora un isomorfismo;
3) la funzione composta di due isomorfismi e' ancora un isomorfismo.

8.2 Teorema sull'anello degli endomorfismi.*(*** facoltativo)* [3]
1)) L'insieme $Hom(V,W)$ delle funzioni lineari fra due spazi vettoriali $f : V \to W$ e' un K-spazio vettoriale rispetto alla somma puntuale e al prodotto per uno scalare.
2) L'insieme $End(V)$ delle funzioni lineari $f : V \to V$ rispetto alla somma puntuale e al prodotto di composizione e' un anello (ed un K-spazio vettoriale).

8.3 Teorema fondamentale per le applicazioni lineari *(dim)*
Siamo V e W due spezi vettoriali. Data una qualunque base ordinata $X = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ di V ed una n-upla di vettori $\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n$ di W esiste ed e' unica una funzione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\underline{v}_1) := \underline{w}_1, ..., f(\underline{v}_n) := \underline{w}_n$, ovvero $\underline{v}_1 \mapsto \underline{w}_1 \dots$. $\underline{v}_n \mapsto \underline{w}_n$ ed e' indivisuata dalla formula

$$f(\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n) = \alpha_1\underline{w}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{w}_n$$

Pertanto: se due funzioni lineari coincidono su una base, allora sono la stessa funzione. [4]
Inoltre la funzione lineare $f : V \to W$ e':
- iniettiva se e solo se i vettori $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$ sono vettori indipendenti in W, [5]
- suriettiva se e solo se $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$ sono un sistema di generatori di tutto W[6]
- biettiva se e solo se $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$ costituiscono una base di W.

Osserviamo che la funzione combinazione lineare φ_X del Teorema 7.3 risulta lineare e quindo quel teorema si puo' fare seguire da 8.3 .

In 7.9 abbiamo visto un isomorfismo $K^n \to V$. Vediamo ora nei dettagli come se ne realizzano altri in forma piu' generale.

---

[1]vedi pure (FM) cap 5, (LL) cap 2.6, 2.7

[2]diretta, lasciata al lettore

[3]le parti (1) e (2) sono di verifica diretta.

[4]per 7.4 ogni $v \in V$ si scrive univocamente come $\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n$. . L'unicita' di f e' ovvia perche' necessariamente $f(\underline{v}) = f(\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n) = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\underline{v}_n)$. Per l'esistenza, dato $\underline{v}$, sono univocamente individuato gli α_i e quindi si puo' porre $f(\underline{v}) = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\underline{v}_n)$- E' faceile ora provare che f e' lineare. Vedi dettagli in Teorema 5.1.7 di (FM)

[5]Sia f iniettiva ovvero sia $\ker f = \{\underline{0}\}$. Proviamo che $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$ sono indipendenti. A tal fine sia $\underline{0} = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = f(\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n)$. Dunque si ha che $\alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n \in \ker f$ e cosi' questo vettore e' $\underline{0}$. Siccome i $\underline{v}_i$ sono indipendenti si ha che ogni $\alpha_i = 0$ come volevamo.
Viceversa siano $f(\underline{v}_1), ..., f(\underline{v}_n)$ indipendenti e sia $\underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n$ tale che $f(\underline{v}) = \underline{0}$. Allora come sopra $\underline{0} = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\underline{v}_n)$. Siccome gli $f(\underline{v}_i)$ sono indipendenti si ha che $\alpha_i = 0$ per ogni i. Ne segue che $\underline{v} = \underline{0}$ e f e' iniettiva.

[6]per quanto sopra, gli $f(\underline{v}_i)$ generano $\mathrm{im} f$

8.4 Teorema sui riferimenti *(dim[7]): Data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\} \subseteq V$ la funzione di combinazione lineare $\varphi_{\mathcal{B}}$ data dalla formula:*

$$\varphi_{\mathcal{B}} : (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \in V.$$

e' un isomorfismo di K-spazi vettoriali detto **riferimento** *indotto da $\mathcal{B}$. Gli scalari α_i si dicono* **componenti** *di $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n$ nella base fissata $\mathcal{B}$.*

Inversamente, se esiste un isomorfismo $\varphi : K^n \leftrightarrow V$, si ottiene una base ordinata $\mathcal{B}$, data dai vettori corrispondenti la quelli della base canonica di K^n. Questa base $\mathcal{B}$ induce proprio il riferimento di partenza, cioe' $\varphi = \varphi_{\mathcal{B}}$.

Corollario Due spazi vettoriali (finitamente generati) sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. [1]

Competenza: dato $\underline{v} \in K^n$ e una base $\mathcal{B}$, scrivere le componenti di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$.

Competenza: Data una funzione (eventualmente dipendente da uno o piu' parametri) sapere riconoscere se e' lineare e individuare basi[2] per il nucleo e il sottospazio delle immagini.

8.5 Teorema della dimensione (equazione dimensionale *(dim): Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora esiste V_2 tale che $V = (\ker f) \oplus V_2$ con $V_2 \simeq imf$. Sicche' (se $\dim V$ e' finita)* [3]

$$dim \ \mathrm{dom} f = dim \ \ker f + dim \ \mathrm{im} \ f.$$

In particolare, quando $V = \mathbb{R}^n$ risulta $dim \ \ker f + dim \ \mathrm{im} \ f = n$ [4]
Corollario. *Se $\dim \ V$ e' finita, un endomorfismo $f : V \to V$ e' suriettivo se e solo se e' iniettivo.*

8.6 Teorema di descrizione forme lineari *Una funzione $f : K^n \to K$ e' lineare (e si dice si dice "forma lineare") se e solo se esistono scalari $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ tali che*

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_i \alpha_i x_i := \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$$

e' il prodotto scalare $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \cdot (x_1, ..., x_n)$ con $\alpha_i = f(e_i)$ dove e_i e' lo i-esimo versore della base canonica. [5]

---

[7] So veda 7.3. E' chiaro che la funzione e' lineare. Essa e' suriettiva se e solo se X e' sistema di generatori e iniettiva se e solo se X e' indipedente. Si noti pure che un isomorfismo porta basi in basi.

[1] se la dimensione e' n allora sono entrambi isomorfi a K^n e l'isomorfismo e' una relazione transitiva poiche' la composizione e l'inversa di isomorfismi e' ancora un isomorfismo. Viceversa, un isomorfismo fra due spazi isomorfi porta basi in basi e quindi queste hanno lo stesso numero di elementi

[2] vedi piu' per il concetto di base

[3] si scriva una base del nucleo e si applichi il Teorema 7.10 di completamento. Poi si osservi che la restrizione di $f : V_1 \to W$ e' un isomorfismo, in quanto lineare e biettiva, come si verifica facilmente calcolando nucleo e immagine.

[4] ma non e' sempre vero che $\mathbb{R}^n = \ker f \oplus dim \ \mathrm{im} \ f$. Infatti se $f(x, y) = (x - y, x - y)$ si ha $\ker f = \mathrm{im} f = \langle (1, 1) \rangle$.

[5] dim diretta, lasciata al lettore

9 Matrici e applicazioni lineari

Una tabella di elementi di K disposto in m righe ed n colonne si dice matrice $m \times n$. Ad esempio

9.1 Definizione di Prodotto righe-per-colonne *Se $A = (a_{ij})$ e' una matrice $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ una matrice $m \times r$, si definisce il prodotto righe per colonne delle matrice A e B la matrice $AB = X = (x_{ij})$ di tipo $m \times r$ dove l'elemento x_{ij} e' il prodotto scalare della riga i di A per la colonna j di B.* [1]

Questo prodotto puo' sembrare innaturale ma e' pienamente giustificato dai Teoremi 9.8 e 9.9.

9.2 Associativita' del Prodotto righe-per-colonne *(no dim) Il prodotto righe per colonne e' associativo (ogni qualvolta e' definito* [2]*) cioe' se A, B, C sono matrici (moltiplicabili), allora $(AB)C = A(BC)$.* [3]

9.3 Teorema: Spazio vettoriale e Anello delle matrici. *Considerato l'insieme $M_{m\times n}(K)$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in un campo K:*
1) la somma componente per componente e il prodotto di una matrice per uno scalare (su tutte le componenti) dotano $M_{m\times n}(K)$ di struttura di K-spazio vettoriale di dimensione mn. [4]

2) La somma componente per componente e il prodotto righe-per-colonne dotano l'insieme $M_{n\times n}(K)$ delle matrici quadrate di struttura di anello (non commutativo). [5]

9.4 Proposizione sul Prodotto di Matrici. *Se A e' una matrice ed $\underline{e}_i$ e' lo iesimo versore della base canonica* [6] *allora*
1) (dim) il vettore $\underline{e}_i A$ e' la riga i-esima di A mentre $A\underline{e}_i^T$ e' la colonna i-esima di A.
2)(facoltativo) risulta $A = BC$ se e solo se le righe di A si scrivono come combinazione lineare di quelle di C tramite i coefficienti di quelle di $B = (b_{ij})$. Lo stesso vale per le colonne di A e quelle di B [7]

9.5 Definizione tipi Matrici particolari[8]
- matrice scalare, es. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

---

[1] quindi risulta $x_{ij} := \sum_{l=i}^{n} a_{il} b_{lj}$.

[2] cioe' se C ha r righe

[3] dim: si faccia verifica diretta, magari prima nel caso in cui A,B, C siano tutte 2×2, piu' facile. Nel caso generale, si prova che $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ allora entrambe le matrici $(AB)C$ $A(BC)$ hanno elemento ij dato da $\sum_{h,k} a_{ih} b_{hk} b_{kj}$. Come dimostrazione alternativa si applichi un Corollario del Teorema 9.8

[4] lo si dimostra verificando direttamente la definizione di spazio vettoriale e osservando che una base e' data dall'insieme delle matrici che hanno 1 in una componente e 0 nelle altre componenti.

[5] lo si dimostra verificando direttamente la definizione di anello, laddove si calcoli sono un po' laboriosi e quindi ci consiglia di limitarsi al caso 2×2. L'associativita' del prodotto e' stata enunciata in 9.2. La non commutativita' segue ad esempio dal fatto che con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ risulta $AB \neq BA$

[6] cioe' $\underline{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$ etc..

[7] Infatti se $A^i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ denota il vettore i-esima riga di A, si ha $A^i = \sum_j b_{ij} B^j$ dove A^j e' il vettore j-esima riga di C

[8] vedi dettagli su libro

- *triangolare alta/bassa,* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

- *matrice a scala, matrice ridotta,* *vedi 4.2.*
- *matrice trasposta* A^T *cioe' A dove le righe sono disposte per colonne, ad esempio si ha* $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 2 & c \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ a & 2 & 6 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ *dove risulta* $(AB)^T = B^T A^T$ [9] ,;
- *la matrice A si dice simmetrica se* $A = A^T$

9.6 Proprieta' elementari della matrice inversa*:*
- Si dice che le matrici A e B sono inverse e si scrive $A^{-1} = B$ *o anche* $B^{-1} = A$ *se valgono entrambe le relazioni* $AB = I$ *e* $BA = I$*.*
- Se A_1*,*A_2*,B sono matrici tali che* $A_1B = I = BA_2$ *allora* $A_1 = A_2$ *(unicita' dell'inversa) .* [1].
- Se A e C sono matrici dotate di inversa tale e' anche AC e risulta $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$*.* [2]
- Le matrici invertibili costrituiscono un gruppo non commutativo (rispetto alla moltiplicazione)

9.7 Teorema sulle matrici triangolari *(***, dim facoltativa) Le matrici triangolari alte formano un sottoanello dell'anello delle matrici quadrate, cioe' sommando/sottreando o moltiplicando due matrici triangolari alte se ne ottiene una dello stesso tipo. (e analogo enunciato vale per le matrici triangolari basse, per quelle diagonali, per quelle scalari). (dim)* [3]

9.8 Teorema: caratterizzazione applicazioni lineari tramite matrici *(dim). Si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le applicazioni lineari* $K^n \to K^m$ *e le matrici* $m \times n$ *come segue:*

1) Sia $A \in M_{m\times n}(K)$ *una matrice. Allora la seguente funzione e' lineare* [4]

$$f_A : \underline{x} \in K^n \mapsto A\underline{x}^T \in K^m.$$

2) Sia $f : K^n \to K^m$ *e' una funzione lineare. Se* $A_f \in M_{m\times n}(K)$ *e' la matrice le cui colonne sono le immagini dei vettori della base canonica di* K^n*, allora per ogni* $\underline{x} \in K^n$ *risulta* [5]

$$f(\underline{x}) = A\underline{x}.$$

3) le assegnazioni $A \mapsto f_A$ *e* $f \mapsto A_f$ *di cui sopra sono tra loro inverse, cioe' la matrice associata ad* f_A *e' proprio A e la funzione lineare associata ad* A_f *e' proprio f.* [6]

---

[9] la trasposizione T trasforma con la simmetria rispetto alla diagonale, che resta invariata

[1] risulta $A_1 = A_1I = A_2(BA_2) = (A_2B)A_2 = IA_2 = A_2$

[2] basta moltiplicare (AC) per $(C^{-1}A^{-1})$ evedere che viene la matrice identica I.

[3] basta verificare almeno per le matrici 2×2 (e' semplicissimo).

[4] Si noti che $A\underline{x}$ indica il prodotto righe per colonna, dove $\underline{x}^T$ e' come vettore colonna e dunque la verifica diretta basata sulla bilinearita' del prodotto scalare. Il caso piu' semplice si ha per $m = 1$ dove A e' semplicemente una n-upla, e cosi' $A\underline{x}$ e' il solito prodotto scalare e si applica 5.6. Il caso generale si ottiene ragionando componente per componenete

[5] verifica diretta, o si usi -componente per componente-il Teorema 8.6 sulle forme lineari

[6] Ad esempio si noti che la matrice dell'applicazione $f(x, y) = (ax+by, cx+dz)$ e' $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mentre la matrice di f in 8.6 e' proprio il vettore riga $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Che le assegnazioni sono inverse si verifica direttamente, magari nel caso 2×3

4) la matrice della funzione somma e' la somma delle matrici, cioe' $A_{f_1}+A_{f_2} = A_{f_1+f_2}$ *e la matrice della funzione composta e' il prodotto (righe×colonne) delle matrici, cioe' se* $K^n \xrightarrow{f_1} K^m \xrightarrow{f_2} K^r$ *risulta* $A_{f_2 \circ f_1} = A_{f_2} A_{f_1}$. [7] [8]
Pertanto la cosa vale anche nel senso inverso e valgono relazioni del tipo

$$f_{A_1+A_2} = f_{A_1} + f_{A_2} \qquad f_{A_1 A_2} = f_{A_2} \circ f_{A_1}$$

5) $\mathrm{im} f$ *e' generato dalle colonne di* A *e quidi* $\dim \mathrm{im} f = r$ *numero delle colonne indipendenti di* A_f *e quindi* $\dim \ker f = m - r$. [1]

6) (quando $n = m$*)* f *e' invertibile se e solo se* $A = A_f$ *e' matrice quadrata invertibile se e solo se le colonne di* A *sono indipendenti (e cio' vale l se e solo se e righe di* A *sono indipendenti).*
Inoltre in tale caso si ha $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. [2]

Corollario Il prodotto (righe×colonne) fra matrici e' associativo perche' la composizione di funzioni e' associativa. Per lo stesso motivo l'inversa di una matrice invertibile e' unica (perche' tale e' l'inversa di una funzione invertibile).

9.9 Teorema sull'anello delle funzioni/matrici *(dim[3]).*

1) L'insieme delle funzioni lineari $f : K^m \to K^n$ *rispetto alla somma puntuale e al prodotto per uno scalare e' un* K*-spazio vettoriale isomorfo a quello delle matrici* $A \in M_{n\times m}(K)$*;*
2) (quando $n = m$*) L'insieme delle funzioni lineari* $f : K^n \to K^n$ *rispetto alla somma puntuale e alla composizione di funzioni e' un anello[4] isomorfo a quello delle matrici* $A \in M_{n\times n}(K)$*.*

9.10 Applicazione: Matrici di rotazione e formula addizione di sen e cos.

Se f_α *e' la rotazione del piano cartesiano di angolo* α *intorno all'origine, allora* f_α *e' descritta dalla formula*

$$f_\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove la matrice ha determinante $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Dal fatto che la rotazione di angolo $\alpha+\beta$ *e' proprio la composizione di* f_α *e* f_β *si ottengono le formule di addizione di seno e coseno tramite il prodotto di matrici:*

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos\ (\alpha+\beta) \end{pmatrix} = f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \dots \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \dots \end{pmatrix}$$

---

[7] la verifica e' diretta: $(f_2 \circ f_1)(\underline{x}) = f_2(f_1(\underline{x})) = f_2(A_1\underline{x})) = A_2(A_1\underline{x})(A_2A_1)\underline{x}$ dove l'ultima uguaglianza dipende dalla proprieta' associativa del prodotto righe per colonne.

[8] questa uguaglianza dimostra anche che il prodotto righe per colonne e' associativo perche' rappresenta fedelmente la composizione di funzioni, dunque dimostrarlo esplicitamente nel Teorema 9.8 e' inutile (ma un buon esercizio). Vale la pena osservare anche che questa uguaglianza fa notare pure che se si vogliono usare le matrici per rappresentare le funzioni lineari, allora il prodotto fra matrici DEVE essere quello righe-per-colonne

[1] Si osservi che $\mathrm{im} f$ e' ovviamente generato dalle immagine dei versori (cfr8.3) e queste sono appunto le colonne, come si verifica immediatamente. Il resto segue dall'equazione dimensionale 8.5. Il numero r si chiama rango della matrice.

[2] osserviamo che I e' la matrice dell'applicazione identica. Se f e' invertibile e B e' la matrice di f^{-1} allora deve essere $AB = I = BA$ e quindi A e' invertibile. Se poi A e' invertibile, allora $f^{-1} = f_{A^{-1}}$, come si verifica componendo con f. Se poi queste condizioni valgono allora f e' suriettiva e quindi $\mathrm{im} f$ ha dimensione n, dunque le colonne di A (che sono n) sono tutte indipedenti. Per quanto sulle righe vedi 10.6 piu' avanti

[3] verificare l'enunciato tenendo presente le definizioni degli oggetti coinvolti e del Teorema 9.8

[4] detto anello degli endomorfismi di K^n

9.11 Teorema sul riferimento coordinato *Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ una qualunque base ordinata di K^n. Allora le componenti del punto/vettore $P = \underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ nella nuova base $\mathcal{B}$ sono date dal vettore*

$$\underline{x}' = (x'_1, ..., x'_n) = C \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = C\underline{x}^T$$

dove $C = B^{-1}$ e' la matrice inversa di B che ha per colonne i vettori di $\mathcal{B}$ (rispettando l'ordine). [1]

Esempio: per trovare le componenti (x', y') del vettore/punto (x, y) nella base $\{(1, 2), (1, 3)\}$, considero che matrice $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ ha inversa $C = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e quindi $(x', y') = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = (3x - y, -2x + y)$.

Si verifica infatti che $(3x - y)(1, 2) + (-2x + y)(1, 3) = (x, y)$.

Esaminiamo ora il cambio di base nelle forma piu' generale.

9.12 Teorema su matrice del cambio di base/riferimento *(dim***).*
Sia $\underline{v} \in V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n e $f \in \mathrm{End}(V)$.

1) Se $\underline{x}' = (x'_1, ..., x'_n)$ e $\underline{x}'' = (x''_1, ..., x''_n)$ sono i vettori in K^n delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ rispettivamente, allora

$$\underline{x}'' = (x''_1, ..., x''_n) = C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = C\underline{x}'$$

dove Ce' la matrice (invertibile) del cambio base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$ ed ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ nel riferimento indotto della base $\mathcal{B}''$. [2] *Dunque C e' invertibile e (se $V = K^n$) si ha*

$$C = (B'')^{-1}B'$$

dove B'' e B' sono le matrici le cui colonne sono i vettori di B'' e B' rispettivamente. [3]

2) Se f ha matrice $A^{'}$ rispetto a $\mathcal{B}^{'}$ e $A^{''}$ rispetto a $\mathcal{B}^{''}$ allora

$$A^{'} = C^{-1}A^{''}C$$

dove C e' la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}^{'}$ a $\mathcal{B}^{''}$ (vedi sopra)[4]. [5]

[1] Per definizione di componenti della base $\mathcal{B}$ e grazie al Teorema 10.1 risulta $\underline{x} = A\underline{x}'$ dove le colonne di B sono i vettori della base. Siccome questi vettori sono indipendenti, per 10.9, esiste $C = B^{-1}$ e quindi si puo' risovere il sistema, cioe' moltiplicare $\underline{v} = B\underline{v}'$ sinistra per C ed ottenere $C\underline{v} = \underline{v}'$, come si voleva

[2] e' chiaro che la funzione richiesta e' lineare e quindi rappresentata da una matrice che, naturalmente, ha per colonne le immagini dei versori (vedi 9.4). I versori rappresentano le coordinate dei vettori del riferimento $\mathcal{B}'$ e quindi le colonne rappresentano le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}'$ nella base $\mathcal{B}''$.

[3] laddove, ovviamente, C^{-1} ha la stessa struttura di C con i ruoli di $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ scambiati

[4] che e' invertibile perche' corrisponde ad un'applicazione invertibile f_C

[5] Se $\underline{x}'$ e $\underline{x}''$ sono le coordinate di $\underline{v} \in V$ nella base $\mathcal{B}'$ e nella base $\mathcal{B}''$, per 9.11 si ha $\underline{x}'' = C\underline{x}'$ e $\underline{x}' = C^{-1}\underline{x}''$. Inoltre $f(\underline{v})$ ha coordinate $\underline{y}' = A'\underline{x}' = A'C^{-1}\underline{x}''$ e $\underline{y}'' = A''\underline{x}''$ nella base $\mathcal{B}'$ e nella base $\mathcal{B}''$. Applicando ancora una volta il cambio di base, deve essere $\underline{y}'' = C\underline{y}'$ cioe' $C(A'C^{-1}\underline{x}'') = A''\underline{x}'$, cioe' $(CA'C)^{-1}\underline{x}'' = A''\underline{x}'$ e quindi, poiche' $\underline{v}$ e $\underline{x}''$ sono variabili, si ha $A^{''} = C^{-1}A^{'}C$ piche' inducono la stessa funzione lineare, cvd. Chiaramente C^{-1} ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}''$ nel riferimento indotto della base $\mathcal{B}'$.

In particolare, se $V = K^n$ ed A e' la matrice di f rispetto alla base canonica (che chiamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}''$) rispetto aad una nuova base $\mathcal{B}'$ ha matrice $A' = C^{-1}AC$ dove la matrice C ha come colonne i vettori di $\mathcal{B}'$.

Vediamo un esempio numerico molto elementare. Si considerino le basi $\mathcal{B}' = \{(1,0),(2,-1)\}$ e $\mathcal{B}'' = \{(2,1),(1,1)\}$ Il vettore $P = (3,-1)$ e' somma dei due vettori della prima base, quindi ha coordinate $(1,1)$ nel riferimento indotto dalla prima base. Mi chiedo che coordinate abbia nella seconda base. Per apllicare il teorema considero le matrici $B' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ e $B'' = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ costituite mettendo i vettori delle basi come colonne. Certamente sono invertibili perche' hanno le colonne indipendenti. Calcolo $B''^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ e poi $B''^{-1}B' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Determino quindi le coordinate di P nella base $\mathcal{B}''$ con la formula

$$B''^{-1}B'\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$$

Posso verificare questo risultato in quanto $4(2.1) - 5(1,1) = (3,-1) = P$.

Ad esempio dell'enuniato (2) osserviamo che la funzione lineare $f(x,y) = (2y - x, 5y - 4x)$ ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ rispetto alla base canonica (a cui facciamo giocare il ruolo di $\mathcal{B}''$). Allora rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,2)\}$ ha f ha matrice

$$A' = C^{-1}AC = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

dove $C := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}'$ e poi si calcola $C^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

10 Algoritmo di Gauss-Jordan per Sistemi lineari e Matrici

Riprendiamo il tema della sezione 4.

10.1 Teorema di struttura dei sistemi lineari*(dim):*
1) Le soluzioni $x_1, ..., x_n$ di un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_1 \end{cases}$$

corrispondonono alla soluzioni $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ dell'equazione matriciale

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

dove A e' la matrice $m \times n$ dei coefficienti del sistema e si ha:

$$A\underline{x}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \underline{b}$$

dove le soluzioni sono viste come vettore colonna e $\underline{b}$ e' la colonna dei termini noti.[1]

Dunque le soluzioni $x_1, ..., x_n$ sono gli scalari che permettono di scrivere la colonna $\underline{b}$ dei termini noti come combinazione lineare delle colonne $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$ dei coefficienti del sistema. Cioe' si ha:

$$x_1\underline{v}_1 + ... + x_m\underline{v}_m = \underline{b}$$

In altre parole, risolvere un sistema significa determinare la controimmagine del vettore $\underline{b}$ dei termini noti tramite l'applicazione linare f_A individuata dalla matrice A dei coefficienti del sistema. [2]

2) se il sistema e' omogeneo (cioe' $\underline{b} = \underline{0}$) allora l'insieme S delle soluzioni e' un sottospazio $V_A = \ker f_A$. [3]

3) le soluzioni del sistema hanno tutte la forma $\underline{x}' + \underline{v}$ dove $\underline{x}'$ e' una qualunque fissata soluzione e $\underline{v}$ varia nel sottospazio $V_A = \ker f_A$. In simboli, l'insieme delle soluzioni e' $S = \underline{x}' + V_A := \{\underline{x}' + \underline{v} \mid \underline{v} \in V_A\}$, un cosiddetto sottospazio affine. [4]

Competenza: data $A \in M_{n\times m}(K)$ descrivere le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$.

Competenza: (usando la definizione di prodotto righe per colonne) determinare la formula per l'inversa di una matrice 2×2.

---

[1] dipende direttamente dalla definizione di prodotto di matrici

[2] vedi 9.8

[3] direttamente dalla definizione di f_A. Inoltre ogni sottospazio V_1 di K^n e' insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, come segue da 7.11

[4] e' chiaro che $\underline{x}' + \underline{v}$ e' soluzione poiche' $A(\underline{x}' + \underline{v}) = A\underline{x}' + A\underline{v} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$. Viceversa se $\underline{x}$" e' un'altra soluzione allora $A(\underline{x}'' - \underline{x}') = A\underline{x}'' - A\underline{x}' = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$ e cosi' $\underline{v} = \underline{x}'' - \underline{x}' \in \ker f_A = V_A$ con $\underline{x}' + \underline{v} = \underline{x}$".

10.2 Esempio: studiamo il seguente sistema nelle incognite x, y, z. [5]

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + 3z = 16 \end{cases} \quad \text{con matrice} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

che con le operazioni $R_2 := R_2 - 2R_1$, $R_3 := R_3 - 3R_1$ e $R_3 := R_3 - R_2$ assume la forma ridotta $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ne segue che $y = 2$ e, sostituendo in R_1 si ha $x + z = 4$.

Assumendo z come paramentro si ha che

- le soluzioni hanno forma $(4-z, 2, z) = (4, 2, 0) + z(-1, 0, 1)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$ cioe'

- le soluzioni riempiono il sottospazio affine $S = (4, 2, 0) + \langle(-1, 0, 1)\rangle$, laddove $(4, 2, 0)$ e' una soluzione particolare (con $z = 0$).

- S si puo' descrivere anche come $(4, 2, 0) + \langle(1, 0, -1)\rangle = (3, 2, 1) + \langle(-1, 0, 1)\rangle$ laddove $(3, 2, 1)$ e' una diversa soluzione particolare.

- Scegliendo invece x come parametro si ha che le soluzioni hanno forma $(x, 2, 4 - x) = (0, 2, 4) + x(1, 0, -1)$

- non e' possibile scegliere y come parametro

Diamo ora una sistemazione teorica piu' definita di quanto introdotto nella sezione 4e approfondiamone i risultati. Richiamiamo la definizione 4.3 .

10.3 Definizione: Operazioni Elementari di Gauss *(mosse di Gauss) agiscono sulle righe di una matrice. Esse sono la sostituzione del vettore i-esima riga R_i con*

I) αR_i ove α uno scalare $\neq 0$ (si scrive $R_i := \alpha R_i$ oppure $R_i \to \alpha R_j$);

II) $R_i + \alpha R_j$ ove R_j e' un'altra riga (si scrive $R_i := R_i + \alpha R_j$ oppure $R_i \to R_i + R_j$).

Due matrici che si ottengono l'una dall'altra applicando piu' volte queste operazioni di dicono **matrici equivalenti per righe**.

10.4 Teorema sulle Operazioni elementari di Gauss *(dim) Applicando piu' volte le operazioni elementari ad una matrice:*

- e' possibile scambiare due righe (e quindi riordinare le righe a piacimento); [1]

- e' possibile sostituire ad una riga la sua somma con una combinazione lineare delle altre; [2]

- lo spazio generato dalle righe non viene alterato [3]

- la dimensione dello spazio generato dalle colonne non viene alterata. [4]

---

[5]Vedi pure il tutorial https://www.youtube.com/watch?v=Hv6NYGhCIFk

[1]dimostrazione dettagliata viene lasciata al lettore. Con abuso di notazione, essa si consegue con le operazioni $R_2 := R_2 - R_1$, $R_1 := R_1 + R_2$, $R_2 := R_1 - R_2$

[2]dimostrazione ovvia

[3]e' ovvio che $\langle R_i \rangle = \langle \alpha R_i \rangle$ e anche $\langle R_i, R_i + R_j \rangle = \langle R_i, R_j \rangle$

[4]mediante l'operazione (I) applicata alla prima riga un vettore colonna $(x_1, x_2, ...)^T$ viene trasformato in $(\alpha x_1, x_2, ...)^T$. Similmente l'operazione (II) applicata alle prime due righe lo trasforma in $(x_1, \alpha x_1 + x_2, ...)^T$. Queste due trasformazioni sono lineari e biettive, quindi non alterano le dimensioni del sottospazio generato dalle colonne, cvd.

Notiamo pure che sebbene le operazioni elementari non alterino la dimesione comunque cambiamo lo spazio delle colonne. Ad esempio la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ha le due colonne e colonne uguali . Lo spazio delle colonne e' $\langle(1, 1)\rangle$. Con l'operazione $R_2 := R_1 + R_2$ si ottine la matrice ridotta $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ il cui spazio delle colonne e' $\langle(1, 0)\rangle \neq \langle(1, 1)\rangle$ che ha sempre dimensione 1, ma e' diverso dal precedente

Da 4.2 richiamiamo che una matrice si dice ridotta a scala (o a scalini) se il primo elemento non nullo di ogni riga (se c'e') e' 1 e (se non e' la prima riga) questo 1 si trova in una colonna piu' a destra del primo elemento non nullo della riga precedente. Tale 1 si dice "pivot".

10.5 Teorema: Algoritmo GJ per Riduzione Matrice a Forma Ridotta

Ogni trasformazione elementare su una matrice A ha lo stesso effetto della moltiplicazione a sx di A per la matrice che si ottiene applicando la stessa trasformazione alla matrice identica. [1]

Tramite trasformazioni elementari, con l'algoritmo GJ, si puo' trasformare A in una matrice ridotta a scala R , laddove $R = EA$ con E matrice quadrata ottenuta applicando le stesse trasformazioni alla matrice I. [2]
Per di piu', con una riduzione completa e' possibile arrivare ad una R' a scala ridottissima e cioe' con l'ulteriore proprieta' che nelle colonne dei pivot ci sono tutti 0 a parte il pivot.

Se la matrice A e' quadrata, allora A invertibile se e solo se R di sopra e' una matrice triangolare alta e R' e' addirittura identica. Se $R' = I = E'A$, allora $E' = A^{-1}$. [3]
In tale caso il prodotto degli scalari coinvolti nelle mosse di tipo I costitisce il determinante della matrice $\det(A)$. [4]

Ad esempio in 10.2 la forma ridotta $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ con $R_1 := R_1 + R_2$ si puo' trasformare in una ridottissima $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ che corrisponde al sistema $\begin{cases} x + z = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ che si risolve scegliendo z come paramentro.

Competenza: Data A, con l'algoritmo GJ sapere determinare E, R tali che $R = EA$ e' matrice ridotta e quindi $E = A^{-1}$ se $R = I$ [5]

Ad esempio per calcolare l'inversa della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ eseguiamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{R_2 := R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{R_1 := R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e abbiamo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (la prima e l'ultima matrice sono inverse).
[6]

---

[1] lo verifichiamo nel caso piu' semplice (ma egualmente significativo perche' quello generale e' analogo) delle matrici 2×2 si verifica subito che si ha $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{bmatrix}$ e anche $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{bmatrix}$ come pure $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$

[2] Applicare l'algoritmo GJ ad A prodottovettorialee dedurre che se le trasformazioni impiegate sono in numero di k e esse creano nell'ordine le matrici E_1, E_2,..., E_k, allora si ha $E_k ... E_2 E_1 A = R$ e (grazie alla proprieta' associativa) la matrice $E := E_k ... E_2 E_1$ e' quella che ci occorre.

[3] una volta ridotta $A = ER$, siccome E e' invertibile si ha che A e' invertibile se e solo se R e' invertibile

[4] vedi piu' avanti

[5] Nella pratica E si ottiene affiancando alla matrice A la matrice I (e la matrice non quadrata cosi' ottenuta si indica con $A|I$), facendo le trasformazioni GJ su $A|I$ fino ad ottenere una matrice tipo $R|E$, dove nella meta' di sinistra c'e' la matrice ridotta e a destra la matrice E.

[6] Per verificare i calcoli ed i passaggi sono disponibili calcolatori online ad es,. su
https://onlinemschool.com/math/assistance/matrix/inverse/
oppure cercando sui motori di ricerca
"inverse matrix gaussian elimination calculator".

10.6 Teorema sul rango di una matrice *(dim) Per una matrice A i seguenti numeri sono uguali e si dicono rango della matrice.*
r= il numero delle righe indipendenti
s= il numero delle colonne indipendenti
t= il numero degli 1 nella sua forma ridotta R [1]

Matrici equivalenti hanno lo stesso rango. . [2]

Competenza: saper determinare il rango di una matrice con l'algoritno GJ, ad esempio della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & k \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ [3]

10.7 Teorema di Rouche'-Capelli *(dim[4])*
- Un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ e' compatibile[5] se e solo se la colonna dei termini noti dipende dalle altre e cioe' se le matrici A e $A|\underline{b}$ hanno lo stesso rango.
- La soluzione esiste ed e' unica se questo rango r coincide con in numero n delle incognite [6]
- Se ci sono soluzioni e $r < n$, allora queste sono infinite[7] e dipendono da $s = n - r$ parametri [8].

10.8 Teorema sulle matrici invertibili *(dim)*
Per una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ sono equivalenti:
1) la matrice A e' invertibile;
2) la funzione lineare associata f_A e' invertibile [9]
3) le righe di A sono indipendenti (il rango e' il massimo possibile, cioe' n)
4) le colonne di A sono indipendenti; [10]
5) riducendo A con GJ si arriva ad una matrice triangolare alta (e quindi si puo' arrivare ad una matrice identica). [11]
6) $det(A) \neq 0$ [12]

---

[1] Osservare che le righe/colonne di una matrice ridotta risultano indipendenti (verificare!) e quindi lo spazio da esse generato ha dimensione t.Le trasformazioni elementari sulle righe/colonne non alterano la dimensione dello spazio generato e quindi $r = t$ e $s = t$.

[2] *** possiamo dimostrare il teorema anche senza l'algoritmo GJ. Sia A di tipo $m \times n$ e C la matrice ottenuta da A cancellando le righe dipendenti. Quindi C e' tipo $r \times n$. Per 9.4 esiste una matrice B di tipo $m \times k$ tale che $A = BC$ laddove le colonne di A dipendono da quelle di B, che sono r. Quindi $s \leq r$. Ragionando sulla trasposta di A si ha che $r \leq s$.

[3] per $k = 0$ il rango e' 3, altrimenti e' 4

[4] ovvia in quanto le soluzioni del sistema sono proprio gli scalari della combinazione lineare delle colonne che e' uguale alla colonna termini noti, vedi pure.... sopra

[5] cioe' ha soluzioni

[6] cioe' n e' tale che $\underline{x} \in K^n$ ovvero A e' del tipo $m \times n$

[7] se il campo K e' infinito

[8] poiche' il nucleo della funzione lineare associata al sistema ha dimensione $n - r$ per il teorema della Dimensione e per il fatto che r e' la dimensione dell'immagine

[9] (1) e' equivalente a (2) in virtu' del fatto che la funzione inversa corrisponde alla matrice inversa (vedi Teorema 9.8 sulle funzioni lineari), cioe' $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. Inoltre (3) e (4) sono equivalenti per il Teorema sul rango di una matrice. Per (5) vedi 10.5.

[10] Se vale (1), ovvero (2), allora f_A e' suriettiva e quindi lo spazio delle colonne ha dimensione n, quindi valgono (4) e (3). Viceversa se vale (4) allora f_A e' suriettiva, quindi invertibile (per il Teorema sugli endomorfismi invertibili) e cosi' valgono (1) e (2). Sicche' le prime 4 proprieta' sono equivalenti. Esse valgono se e solo se A ha rango n e quindi se e solo se la matrice ridotta di A ha rango n, cioe' e' identica.

[11] vedi 10.1

[12] vedi 11.3 piu' avanti

Se queste condizioni valgono l'inversa di A risulta $A^{-1} = E'$ dove E' e si determina applicando l'algoritmo GJ alla matrice $A|I$ ottenuta giustapponendo I ad A ed operando fino a giungere a $I|E'$.

10.9 Studio di una funzione lineare Sia f un'applicazione lineare $f : K^m \to K^n$ con matrice A. Si riduca A nella forma R a scalini con rango r, numero dei pivot. Allora
- $\dim \mathrm{im} f = r$ e una base di $\mathrm{im} f$ e' data dalle colonne di R dove compare un pivot; in partcolare f e' suriettiva se e solo $r = n$ e in R compare un pivot in ogni riga
- $\dim \ker f = m - r$ e una base di $\ker f$ si determina risolvendo il sistema omogeneo che ha R come matrice. Le soluzioni dipendono da $m - r$ parametri. Si ottine una base scegliendo gli $m - r$ vettori soluzioni che si ottengono ponendo un solo paramentro per volta $= 1$ mentre gli altri sono uguali a 0. In particolare f e' iniettiva se e solo $m = r$ cioe' nella forma ridotta R di A non appaiono righe nulle

11 Determinanti

In questa sezione si tranno solo matrici quadrate. Presentiamo un metodo, alternativo a quello GJ, di verificare se dei vettori in K^n sono dipendenti e un metodo per calcolare l'inversa di una matrice.

11.1 Teorema su esistenza e unicita' del Determinante *(no dim***):* *Esiste ed e' unica una funzione* det : $M_n(K) \to K$ *tale che* $det(I) = 1$ *e che sia* **multilineare alternante***, cioe' lineare in ogni riga e che cambia segno se si scambiano due righe.*

Talvolta si scrive $|A|$ *in luogo di* $det(A)$

Ad esempio, per $\mathbb{R}^2$ si puo' osservare che se alla matrice A si associa l'area del parallelogramma che ha per basi i vettori applicati OP_1 e OP_2 dove P_1 e P_2 sono la prima e la seconda riga della matrice si ottiene una funzione con le proprieta' del determinante.

Dunque la funzione determinante sulle matrici 2×2 e' data dalla formula.

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Similmente si ragiona in $\mathbb{R}^3$ infatti, data un matrice 3×3,

$$\text{A=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

il volume (orientato) del parallelepipedo che ha per spigoli i vettori costitiuscono le 3 righe e' la funzione determinante, che si scrive quindi con la formula

$$\begin{aligned} detA &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Che questa complicata formula sia quella giusta lo si verifica osservando che ha le proprieta' di essere bilineare, alternante e valere 1 sulla matrice identica. Per tenerla a mente si usa la cosiddetta regola di Sarrus: ad A si si affiancano sulla derta le sue prime due colonne ottenendo cosi' una matrice 3×5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si noti ora hc edeterminante e' dato dal prodotto degli elementi delle tre diagonali principali (da sinistra a scendere verso destra) meno il prodotto degli elementi delle tre diagonali secondarie

. Ad esempio si ha

$$\text{se } \; A = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{allora si scrive} \quad \begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 & | & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & | & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & | & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e si calcola}$$

$$det(A) = 32 - 30 - 18 + 72 - 60 + 4 = 0$$

11.2 Teorema sulle proprieta' elementari del determinante *(dim [1]):*
1. se una riga (o una colonna) di A e' nulla, $det(A) = 0$;

2. se B e' ottenuta da A scambiando fra di loro due righe (o due colonne), allora det(A)= -det(B)

3. se A ha due righe (o due colonne) uguali, allora $det(A) = 0$;

4. se B e' ottenuta da A moltiplicando per α gli elementi di una sua riga (o colonna), allora $det(B) = \alpha \cdot \det(A)$ cioe' applicando la prima mossa di Gauss $R_i := \alpha R_i$ il determinante risulta moltiplicato per α;

5. se A ha due righe (o due colonne) proporzionali, allora $det(A) = 0$;

6. se la riga i-esima di A e' la somma $\underline{a} = \underline{b} + \underline{c}$, allora $det(A) = det(B) + det(C)$, dove B si ottiene da A sostituendo in A la i-esima riga con $\underline{b}$ e C si ottiene da A sostituendo la i-esima riga con $\underline{c}$; la stessa cosa vale per le colonne;

7. se una riga (o una colonna) di A e' combinazione lineare delle altre, allora $det(A) = 0$;

8. se B e' ottenuta da A sommando a una sua riga (o colonna) una combinazione lineare delle altre righe (o colonne), allora det(A)=det(B), cioe' la seconda mossa di Gauss $R_i := R_i + R_j$ (con $i \neq I$) non altera il determinante.

9. il determinante di una matrice triangolare e' il prodotto degli elementi sulla diagonale [2]

10. Se A e B sono equivalenti, allora $det(A) \neq 0$ se e solo se $det(B) \neq 0$. [3]

*11. $det(A) = det(A^T)$, dove A^T e' la trasposta di A (no dim***) e quindi le proprieta' che riguardano le righe valgono anche per le colonne.*

Possiamo ora completare 10.9 .

11.3 Teorema su matrici invertibili e calcolo determinante con GJ*(dim):*
Sia A una matrice quadrata a coefficienti in un campo K.

1) La forma ridotta a scalini $R = EA$ di A ha una riga nulla se e solo se $det(A) = 0$, altrimenti $det(A)$ e' il prodotto degli inversi scalari che si sono usati nelle operazioni elementari di tipo I *di GJ (cioe' prodotto di riga per scalare).* [4].

2) A e' invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$. In tal caso $A^{-1} = E$. [5]

---

[1] per quanto sulle righe tutto segue facilmente dalla definzione; le proprieta' per le colonne discendono dalla (11) la cui dim e' omessa ***

[2] e' possibile ridurre la matrice triangolare ad una matrice diagonale con operazioni che non cambiano il determinante (vedi 8). Poi il determinante di una matrice diagonale e' proprio il prodotto degli elementi sulla diagonale per la miltilinearita' della dunzione det.

[3] nelle operazioni che mutano l'una nell'altra il determinante puo' essere moltiplicato solo per uno scalare non nullo

[4] si ricordi che lo scambio righe produce cambio segno del determinante. L'operazione I moltiplica il det per lo scalare coincvolto mentre l'operazione II non altera il determinante

[5] A e' invertibile se e solo se la ridotta R e' identica, ma cio' avviene quando R non ha una riga nulla e quindi determinante $\neq 0$ per quanto sopra. cvd. Osserviamo pure che se

Competenza: E' possibile calcolare il determinante e l'inversa di una matrice con l'algoritmo GJ. Dedurre la regola di Sarrus applicando GJ.

Con il metodo di Gauss calcoliamo il determinante della matrice A con parametro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix} \text{ con le trasformazioni } \begin{matrix} R_2 := R_2 - 4R_1 \\ R_3 := R_3 - 7R_1 \\ R_3 := R_3 - 2R_1 \end{matrix} \text{ diviene}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & a-9 \end{pmatrix}$$

e si ha $det(A) = det(A') = 27 - 9a$ prodotto elementi sulla diagonale, in quanto si sono usate solo mosse di tipo II.

11.4 Teorema di Binet *(no dim***):*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot det(B)$$

Pertanto,se A e' invertibile allora $det(A) \neq 0$ e $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$. [1].

11.5 Teorema di Laplace sull'Espansione/calcolo del Determinante.*(***NOdim)*

Se $A = (a_{ij})$ e' una matrice quadrata $n \times n$ allora per ogni j vale

$$det(A) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} det(A_{ij}) a_{ij}$$

dove A_{ij} e' la matrice ottenuta da A cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima. Lo scalare $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$ si dice complemento algebrico di a_{ij}.

Lo stesso vale per le colonne, cioe' $det(A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} det(A_{ij}) a_{ij}$.

Ad esempio, nel caso 3×3:

$$det(A) = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4(-8 + 15) - (-4 + 30) - 6(3 - 12) = -28 - 26 + 54 = 0$$

Competenza: calcolare il determinante di matrici 3×3, 4×4 e 5×5.... sia con il Teorema di Laplace sia con il metodo di Gauss.

$det(A) \neq 0$ allora le righe non sono dipendenti e quindi f_A e' invertibile, e cosi' pure A. Se $det(A) = 0$ allora una riga e' nulla e quindi le righe sono dipendenti. Dunque lo sono le colonne e la quindi f_A non e' suriettiva, quindi non e' invertibile, e cosi' pure A. Infine vedi 10.5

[1]NO Dim se $det(B) = 0$ allora f_B non e' iniettiva e quindi f_{AB} non e' iniettiva (verificare per esercizio). Dunque $\det(AB) = 0$ (indipendentemente da quale sia A). Altrimenti si consideri la funzione $d(A) := \frac{\det(AB)}{\det(B)}$ (che e' definita se $\det(B) \neq 0$). Per provare il Teorema di Binet bisogna provare che $d(A) = \det(A)$. Visto il Teorema 11.1 di esistenza e unicita' basta osservare che $d(I) = 1$ (ovvio) e $d(A)$ e' multilinare alternate. Questo segue dal fatto che moltiplicare una righe di A per uno scalare ha l'effetto di fare la stessa operazione su AB e risultato analogi si ha se una riga di A e' somma di due vettori. Piu' eleganetemente, osserviamo che l'operazione $A \mapsto AB$ e' invariante per mosse di Gauss, infatti se si opera una mossa di Gauss su A si ottiene la matrice EA (con E opportuna, vedi Teroema ...) e se lo si fa su AB si ottiene $E(AB) = (EA)B$. Quindi $d(A)$ ha le stesso comportamento di $\det(AB)$ che, essendo un determinante, e' multilineare. cvd.

11.6 Teorema per la Matrice Inversa(***no dim) Se A e' una matrice invertibile (cioe' $det(A) \neq 0$), allora l'inversa di A e' la trasposta della matrice il cui posto ij e' occupato dal complemento algebrico di a_{ij} cioe' $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$, tutta poi moltiplicata per $1/det(A)$.

Competenza: saper calcolare il determinante e l'eventuale inversa di una qualunque matrice quadrata.

11.7 Teorema: Regola di Cramer *(*** no dim). Sia $A \in M_n(K)$ invertibile. La soluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ e' e' $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ dove $x_i = \det A_i / \det(A)$ dove A_i e' la matrice che si ottiene da A rimpiazzando la colonna i-esima con $\underline{b}$.*

11.8 Teorema degli orlati (o di Kroneker) per determinare il rango di una matrice*(NO dim). Sia A una matrice. Se esiste una sottomatrice quadrata B con determinante non nullo, mentre tutti i suoi orlati hanno determinante nullo, allora le righe (le colonne) che interessano B sono un sistema libero massimale fra tutte le righe (colonne) di A, che quindi ha rango quanto le righe di B.*

12 Autovettori e Diagonalizzazione

[1]

12.1 Definizioni di autovettore ed autovalore. *Siano $f : V \to V$ una funzione lineare e A una matrice quadrata. Se $\underline{0} \neq \underline{v} \in V$ e $\lambda \in K$ e accade che*

$$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

(oppure $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$) si dice che $\underline{v}$ e λ sono **autovettore** *ed* **autovalore** *associato per f (o per A).*

Esempio: per la $f(x, y, z) = (x + y, x + y, 2z)$ i vettori $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono autovettori mentre $g(x, y) = (y, 2x)$ ha $(1, \sqrt{2})$ come autovettore.

12.2 *Una* **matrice e' diagonale** *se e solo se i versori sono tutti autovettori (dove gli autovalori sono i corrispondenti coefficienti sulla diagonale).* [2]

12.3 Teorema su autovalori e autospazi*(dim)*
1) se $\underline{v} \neq 0$ e' un autovettore, esiste un unico autovalore ad esso associato. [3]
2) se λ un e' un autovettore, l'insieme $V_\lambda = \{\underline{v} \mid f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}\}$ degli autovettori corrispondenti (con aggiunta dello $\underline{0}$) e' un sottospazio vettoriale (detto **autospazio***) ed e' il nucleo dalla funzione lineare $g(\underline{v}) := f(\underline{v}) - \lambda\underline{v}$* [4]

12.4 Teorema di caratterizzazione autovalori tramite il polinomio caratteristico *(dim) Gli autovalori di una matrice A (ovvero della funzione f_A) sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico della matrice, cioe' del polinomio* [5]

$$p_A(x) = det(A - xI).$$

12.5 Teorema di invarianza del polinomio caratteristico*(***Dim).*
1) Matrici quadrate simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. [6]
2) Se f e' endomorfismo di uno spazio vettoriale V (con dimensione finita) e A, A' sono e matrici associate ad f rispetto a due basi (distinte) $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, allora $p_A(x) = p_{A'}(x)$. Tale polinomio si dice polinomio caratteristico di f. [7]

12.6 Definizioni. *Siano f funzione lineare e A matrice quadrata.*
1) A si dice **diagonalizzabile** *se esiste una matrice invertibile B tale che la matrice $B^{-1}AB$ e' diagonale, cioe' tutti gli elementi fuori dalla diagonale principale sono 0. Si dice che A e B sono coniugate o simili*[8]
2) f si dice diagonalizzabile se esiste una base costituita da autovettori di f. Siffatta base si dice **spettrale***.*

---

[1] vedi (FM) cap 9 e (LL) cap 4.4 e 4.5 e appunti su Teams per le matrici

[2] si usi 9.4.1

[3] se λ e λ' sono autovalori, allora $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v} = \lambda'\underline{v}$ cioe' $(\lambda - \lambda')\underline{v} = \underline{0}$ da cui $\lambda = \lambda'$ essendo $\underline{v} \neq \underline{0}$

[4] basta ricordare che g e' lineare quale sottrazione di due funzioni lienari oppure verificare che se $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ e $f(\underline{v}') = \lambda\underline{v}'$ allora $f(\underline{v} + \underline{v}') = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{v}' = \lambda(\underline{v} + \underline{v})$ e similmente, se $\alpha \in K$ si ha $f(\alpha\underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) = \alpha(\lambda\underline{v}) = \lambda(\alpha\underline{v})$

[5] notato che x indica uno scalare, basta osservare x e' autovalore sse che il sistema omogeneo con matrice $A - xI$ ha soluzioni non banali, ovvero matrice ha rango non massimo, cioe' determinante nullo

[6] sia $A' = C^{-1}AC$ con C matrice invertibile. Allora siccome xI commuta con ogni matrice e usando la proprieta' distributiva (a detra e a sinistra) si ha $A' - xI = C^{-1}AC - C^{-1}CxI = C^{-1}AC - C^{-1}xIC = C^{-1}(A - xI)C$. Pertanto usando il teorema di Binet $p_{A'}(x) = \det(A' - xI) = \det(C^{-1}(A - xI)C) = \det C^{-1} \det(A - xT) \det C = \det(A - xT) = p_A(x)$, cvd.

[7] perl e formula di cambiamento base risulta che $A' = C^{-1}AC$ con C matrice invertibile. Il resto segue da quanto sopra

[8] si dimostri che la similitudine e' una relazione di equivalenza fra matrici

12.7 Teorema sugli endomorfismi diagonalizzabili *(dim) Sia f un endomorfismo.*
1) f e' diagonalizzabile se e solo se esiste una base (spettrale) rispetto alla quale la matrice associata ad f e' diagonale. [9]
2) f e' diagonalizzabile se e solo se la sua matrice (rispetto ad una qualunque base) e' diagonalizzabile. [10]

12.8 Teorema della base Spettrale (forma incompleta) *Siano $\lambda_1, ...\lambda_m$ gli m autovalori distinti di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale di dimensione finita n . Allora*

0) $m \leq n$; [1]

1) gli autovettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$ corrispondenti ad autovettori distinti sono indipendenti. [2]

2) Se f ha n autovalori distinti, allora e' diagonalizzabile. [3]

3) Se X_i e' base per l'autospazio V_{λ_i} allora $X = X_1 \cup ... \cup X_m$ e' base per $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}$, che ha pertanto dimensione $\dim(V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}) = \dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_m}$, [4]

4) f e' diagonalizzabile se e solo se

$$\dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_m} = n$$

Cio' equivale al fatto che gli autospazi V_{λ_i} generano tutto V e al fatto che

$$V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}.$$

In questo caso X si dice base spettrale. [5].

---

[9]dim ovvia. Si ricordi che le colonne della matrice solo le immagini dei vettori della base

[10]per la formula di cambiamento base risulta che le matrici rispetto alle basi diverse sono coniugate e quindi una di esse e' diagonale sse tutte sono diagonalizzabili.

[1]segue dal fatto che il polinomio caratteristico ha grado n e quindi al piu' m radici.

[2]Se $m = 1$ la cosa e' ovvia (giacche' $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$). Sia poi vero che $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_{m-1}$ sono indipendenti e proviamo che tutti gli $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$ sono indipendenti. Sia
(*) $\alpha_1\underline{v}_1 + ... + \alpha_m\underline{v}_{m-1} = \underline{0}$. Voglio provare cjhe tutti gli $\alpha_i = 0$. Trasformo (*) con f e ottengo
$\alpha_1\lambda_1\underline{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\underline{v}_2... + \alpha_m\lambda_m\underline{v}_m = \underline{0}$. D'altra parte se moltiplico (*) per λ_m e ottengo
$\alpha_1\lambda_m\underline{v}_1 + \alpha_2\ \lambda_m 1\ \underline{v}_2... + \alpha_m\lambda_m\underline{v}_m = \underline{0}$, sottraggo e ottengo
$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)\underline{v}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)\underline{v}_2... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_{m-1})\underline{v}_{m-1} = \underline{0}$ e per l'indipendenza di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_{m-1}$ ottengo $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_1) = 0$ per ogni $i > 1$. Poiche' per ipotesi tutti i coefficienti $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ si ha che $\alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$. sostituendo in (*) si ha pure $\alpha_1 = 0$, come si voleva.

[3]grazie a (2) gli autovalori sono n ed indipendenti, quindi formano una base

[4]dim *** facoltativa (si ragiona come nella dim della formula di Grassman). E' chiaro che X e' un sistema di generatori. Mostriamo che e' indipendendente. Un vettore $\underline{v}$ che sia una combinazione lineare di vettori di X (che non scriviamo esplicitamente) si puo' scrivere -usando la proprieta' associativa- come $\underline{v} = \underline{v}_1 + ...\underline{v}_m$ con $\underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$. Per il punto (1) si ha che, se $\underline{v} = \underline{0}$ allora ogni $\underline{v}_i = 0$. Poiche' ogni X_i e' indipendente allora $\underline{v}_i = 0$ implica che la combinazione lineare dei vettori in X_i che ha come risultato $\underline{0}$ ha tutti scalari $= 0$, per ogni i. cvd. Poi, per (1), e' chiaro che in X non si ripetono elementi e quindi X ha proprio $\dim V_{\lambda_1} + ... + \dim V_{\lambda_m}$ elementi.

[5]dim *** facoltativa: se f e' diagolizzabile la si scriva tramite una matrice diagonale, in essa compaiono i λ_i sulla diagonale e raccogliendo quelli uguali (eventualmente scambiando le righe) di deducono i V_{λ_i} la cui somma delle dimensioni e' ovviamente il numero di righe della matrice, cioe' $\dim V$, e quindi in V_i generano tutto lo spazio. Viceversa, se vale la somma, allora X come sopra ha tanti elementi quanti la dimensione, quindi e' una base spettrale

Il numero $\dim V_\lambda$ *si dice molteplicita' geometrica dell'autovalore* λ *ed e' la dim del ker di* $g(\underline{v}) = f(\underline{v}) - \lambda\underline{v}$ *cioe' il numero* $n-r$*, laddove* $n = \dim V$ *e* r *e' il rango della matrice* $A - \lambda I$ *dove* A *rappresenta* f *in una qualunque base.* [6]

12.9 Corollario *Se gli autovalori di un endomorfimo* f *sono tanti quanti* $n = \dim V$*, ovvero il polinomio caratteristico di* f *ha esattamente* n *radici distinte, allora* f *e' diagonalizzabile laddove i corrispondenti autovettori formano una base spettrale per* f [1]

Esercizio) Determinare per quali valori del parametro reale k l'omorfismo $f(x,y) = (x+ky, x+y)$ e' diagonalizzabile (se $\mathbb{R}$). Nei casi positivi, scrivere una base di autovettori al variare di k .

12.10 Teorema sulla Matrice Diagonalizzante *(***DIMfacoltativa) Se una matrice quadrata* A *e' diagonalizzabile, cioe' ha una base spettrale (cioe' di autovettori)* $\mathcal{S}$ *ed* S *e' la matrice che ha per colonne questi autovalori, allora* $S^{-1}AS$ *e' una matrice diagonale ed ha sulla diagonale gli autovalori di* A*.*[2] [3]

Competenze: - Data una matrice quadrata 2×2 o 3×3 sul campo dei numeri reali (con polinomio caratteristico facilmente decomponibile) saper stabilire se e' diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice C tale che $C^{-1}AC$ e' matrice diagonale (laddove C si ottiene disponendo gli autovettori per colonna).
- Saper fare lo stesso per una applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Esempio, la matrice

$$A = \left(\begin{smallmatrix}-1 & 2\\ -4 & 5\end{smallmatrix}\right)$$

ha polinomio caratteristico $det\left(\begin{smallmatrix}-1-\lambda & 2\\ -4 & 5-\lambda\end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$. Dunque vi sono tanti autovalori quanti la dimensione e la matrice e' certamente diagonalizzabile. Risolvendo il sistema omogeneo di prima matrice $\left(\begin{smallmatrix}-1-\lambda & 2\\ -4 & 5-\lambda\end{smallmatrix}\right)$, quando $\lambda = 1$, si cancella la seconda riga (deve essere per forza cosi' perche' ci sono soluzioni non nulle) e quindi si ha solo la prima riga $-2x + 2y = 0$, cioe' $x = y$. Se ne deduce l'esistenza dell'autovettore $(1,1)$ collegato all'autovalore 1. Similmente per l'autovalore 3 si ha autovettore $(1,2)$. Mettendo questi vettori come colonne si ottiene la matrice $S := \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ che ha inversa $S^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si puo' poi verificare che

$$S^{-1}AS = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{smallmatrix}\right)$$

e' diagonale (e ha gli autovalori sulla diagonale) come prescritto dal Teorema 12.10.

Per diagonalizzare la matrice $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 2\end{bmatrix}$ se ne calcola il polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 2 & -4 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda\end{bmatrix} =$

[6] segue dalla teoria dei sistemi lienari e fal Teorema di Rouche'-Capelli 10.7

[1] dim: ogni V_{λ_i} ha dimensione almeno 1 e essi sono proprio n, quindi generano tutto V.

[2] si dimostra applicando il Teorema di Cambio di Base 9.12, o anche con verifica diretta. Infatti se $\underline{v}_1 ..., \underline{v}_n$ sono gli autovalori per verificare che $S^{-1}AS$ e' diagonale, calcoliamone la colonna j-esima, che (come per tutte le matrici) e' $S^{-1}AS\underline{e}_j$, prodotto per il j-esmi versore canonico. Allora
$S^{-1}AS\underline{e}_j = S^{-1}A(S\underline{e}_j) = S^{-1}A\underline{v}_j = S^{-1}\lambda_j\underline{v}_j = \lambda_j S^{-1}\underline{v}_j = \lambda_j\underline{e}_j$

[3] si applichi 9.12 con $\mathcal{B}'$ base canonica, $\mathcal{B}'' = \mathcal{S}$ base spettrale, $A' = A$. Si ha che A'' e' matrice diagonale.

$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$ che ha come radici per gli autovalori: $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1$ che sono 3 , quanto la dimensione. Per quanto sopra, la matrice e'diagonalizzabile. Cerchiamo allora una base v_1, v_2, v_3 di autovettori. Fissiamo il primo autovalore $\lambda_1 = 3$ e risolviamo l'equazione $Av = \lambda v$ che si traduce in un sistema indeterminato con matrice $A - 3I = ...$ e soluzioni tutte proporzionali al vettore $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Per gli altri due autovalori si hanno le soluzioni $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Accostandoli come colonne si ha la matrice di cambiamento di base $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ che diagonalizza A , come si verifica calcolando:

$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dove il risultato e' una matrice diagonale che ha come coefficienti non nulli proprio gli autovalori (nell'ordine fissato).

Esercizio Per quali valori del parametro reale k la matrice $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e' diagonalizzabile? Con $k = -1$ diagonalizzarla determinando la matrice diagonalizzante.

Esercizi di riepilogo Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defininita da

$$f(x, y, z) = (x + ky + 3z, 2y + kz, 4y + 2kz)$$

. Determinare una base ortonormale di $\ker f$ ed una di $\mathrm{im} f$.
1. Al variare di k individiare gli autospazi di f e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lapplicazione f e'diagonalizzabile.
2. Per k = 0, determinare una base di R^3composta da autovettori di f.

13 Spazi vettoriali euclidei

[1]

13.1 Definizioni per il prodotto scalare (non standard)

Un'operazione che ad una **coppia di vettori** $\underline{a}, \underline{b}$ *associa uno* **scalare** $\underline{a} \cdot \underline{b}$ *si dice* **forma bilineare** *se e' commutativa e bilineare, cioe' per ogni scelta di vettori* $\underline{a}, \underline{b}, \underline{b}'$ *e scalare* α *valgono le seguenti*
1) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
2) $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{b}') = (\underline{a} \cdot \underline{b}) + (\underline{a} \cdot \underline{b}')$ [2]
3) $\underline{a} \cdot (\alpha \underline{b}) = \alpha(\underline{a} \cdot \underline{b})$ [3]

- *due vettori* $\underline{a}$, $\underline{b}$ *si dicono* **ortogonali** *se e solo se* $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$.

- *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *di dice* **euclideo** *se e' dotato di un* **prodotto scalare**, *cioe' una* **forma bilineare definita positiva**, *cioe' tale che* $\underline{a} \cdot \underline{a} > 0$ *per ogni* $\underline{a} \neq \underline{0}$ *e quindi si puo' definire la* **norma** *(o modulo, o lunghezza) del vettore* $\underline{a}$*:*
- $|\underline{a}| := \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$. [4].
- *un vettore di norma* 1 *si dice* **versore** *e quindi* $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ *e' un versore.*
- $|\alpha \underline{a}| = |\alpha| \cdot |\underline{a}|$. [5]

Esempi:
- Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e' euclideo con il prodotto scalare standard

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

- l'insieme l_2 delle successioni di numeri reali $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tali che $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e se (a_i) e (b_i) sono in l_2 allora risulta

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < \infty$$

e questo valore e' un prodotto scalare. [6]
- l'insieme delle funzioni reali continue su $[0, 1]$ e' uno spazio euclideo con prodotto scalare $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ e norma $|f| = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$. [7]

13.2 Teorema di Caratterizzazione forme bilineari e prodotti scalari *(in dimensione finita)DIM*

Le forme bilineari di $V = K^n$ *sono tutte e sole le funzioni del tipo* $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} A \underline{y}^T$ *con* $A = (a_{i,j})$ *matrice* $n \times n$ *dove* $a_{i,j} = e_i \cdot e_j$*; inoltre* f *e' commuativa se e solo se* $A = A^T$ *e' simmetrica.* [8]

---

[1] vedi (AD) pag 79-92.
[2] poiche' e' commutativa, vale lo stesso per la prima componente
[3] poiche' e' commutativa, vale lo stesso per la prima componente
[4] in qualche libro la norma viene anche indicata con $||\underline{a}|| := |\underline{a}|$ oppure per norma si intende $||\underline{a}|| := |\underline{a}|^2$
[5] dim: $|\alpha \underline{a}| = \sqrt{(\alpha \underline{a}) \cdot (\alpha \underline{a})} = \sqrt{\alpha^2 (\underline{a} \cdot \underline{a})} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = |\alpha| \cdot |\underline{a}|$
[6] no dim ***
[7] no dim ***
[8] dim e' chiaro che $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} A \underline{y}^T$ e' bilineare, viceversa se f e' bilineare fissata la base canonica $e_1, \ldots, e_n$ risulta che f e' indotta dalla matrice $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,j} = v_i \cdot v_j$.

Ad esempio i le forme lineari commutative di $\mathbb{R}^2$ hanno matrice del tipo $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = A^T$ e sono quindi del tipo

$$f((x_1, y_1)), (x_2, y_2)) = ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + dy_1y_2.$$

13.3 ** Teorema di Sylvester** *(NON IN PROGRAMMA 2020)*
Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ e' definita positiva, cioe' $\underline{x}A\underline{x}^T > 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\underline{x} \neq \underline{0}$, se e solo se i **minori principali** *di A sono tutti positivi.* [9]

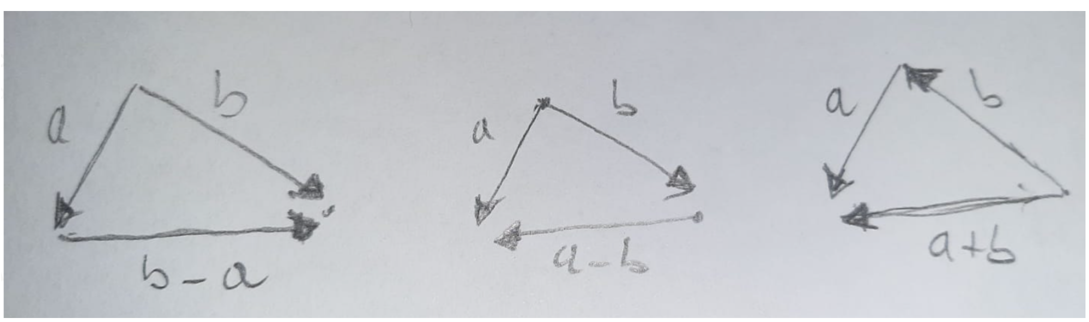
In particolare, i prodotti scalare di $\mathbb{R}^2$ sono tutti e soli quelli del tipo

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = ax_1x_2 + dy_1y_2.$$

con $a > 0$ e $det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = ad - b^2 > 0$. [1]

13.4 ** Teorema matrici simmetriche definite positive** *(NON IN PROGRAMMA 2020)*
Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica:
1) A e' sempre **diagonalizzabile** *(e gli autovalori sono tutti reali).*
2) gli autovalori di A sono tutti positivi se e solo se $\underline{x}A\underline{x}^T > 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (si dice che A e' **definita positiva***).*
3) risulta $A = B^{-1}DB$ con D matrice diagonale e B **matrice ortogonale***, cioe' tale che $BB^T = I_n$ (cioe' con righe fra loro ortogonali e tutte di norma 1).*

13.5 Descrizione Triangolo *Dati $A, B, C \in R^n$ si rappresentano i lati BC, CA, AB del triangolo (orientato) ABC con i vettori liberi $\underline{a} = C - B$, $\underline{b} = A - C$, $\underline{c} = A - B \quad \in \mathbb{R}^n$. Inversamente, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ rappresentano i lati di un triangolo orientato se e solo se $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$. Se il triangolo non e' orientato si possono avere diverse situazioni (vedi figura).*



13.6 Teorema di Pitagora *(DIM) (anche rispetto a un prodotto scalare non standard):*
Due vettori sono $\underline{a}, \underline{b}$ sono ortogonali se e solo se il quadrato del modulo della somma e' la somma dei quadrati dei moduli. In simboli [2]

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 \;\Leftrightarrow\; \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

---

[9] con $k = 1, 2, ...n$ per minore principale di ordine $k \leq n$ si intende il determinante della sottomatrice $k \times k$ in alto a sinistra.

[1] dimostriamo solo il caso $n = 2$ si ha che $(1, 0) \cdot (1, 0) = a > 0$ e poi per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta $(t, 1) \cdot (t, 1) = at^2 + 2bt + d > 0$. Dunque il discriminante di $at^2 + 2bt + d$ deve essere negativo. Esso e' $4b^2 - 4ad$. Ne segue $ad - b^2 > 0$. Nota: e' chiaro che in queste condizioni necessariemane anche $d > 0$

[2] basta calcolare $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$

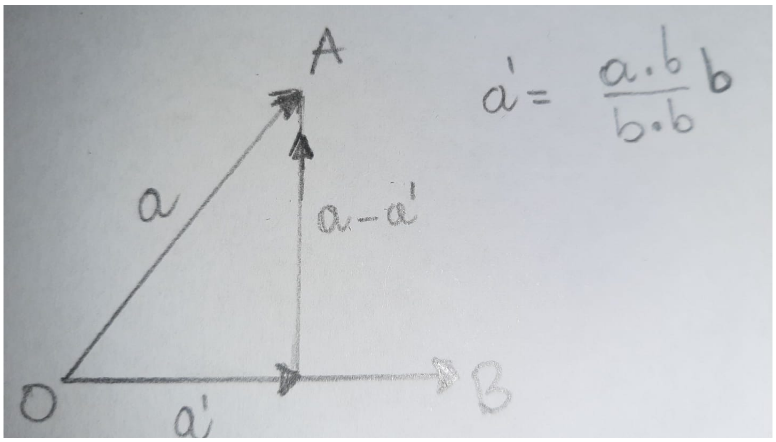
13.7 Teorema sull Proiezioni ortogonali *DIM*
Siano $\underline{a}, \underline{b}$ vettori di uno spazio euclideo. Allora

1) $\underline{a}' := \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}\cdot\underline{b}}\,\underline{b}$ *e' proporzionale a $\underline{b}$. Esso si dice* **proiezione ortogonale** *di $\underline{a}$ su $\underline{b}$ in quanto $(\underline{a}-\underline{a}')$ e' ortogonale a $\underline{b}$* [3]

2) lo scalare $\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}\cdot\underline{b}}$ si dice **coefficiente di Fourier** *di $\underline{a}$ rispetto a $\underline{b}$*

3) $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{a}'\cdot\underline{b}$ *e anche* $|\underline{a}\cdot\underline{b}| = |\underline{a}_{\underline{b}}|\cdot|\underline{b}|$ [1]

4) $\underline{a} = \underline{a}' + (\underline{a}-\underline{a}')$ *si scrive come somma di vettori fra loro ortogonali.* [2]



13.8 Esercizio Determinare la lughezza dell'altezza del CH triangolo con vertici $A = (1,1)$, $B = (4,2)$, $C = (1,3)$, in 3 modi e verificare che essi conducono allo stesso risultato:
i) calcolare la proiezione ortogonale H di C sulla retta AB come intersezione della retta per AB e della sua perpendicolare per C. Calcolare infine la distanza di C ed H.
ii) calcolare l'area del triangolo ABC grazie alla formula con il determinante (vedi 5.9), raddoppiarla, e poi dividere per la lunghezza di $AB = B - A$.
ii) Applicare 13.7
Fare lo stesso in 3D, con i punti $A = (1,1,0)$, $B = (4,2,0)$, $C = (1,3,1)$ usando magari 14.15 e 14.16.

13.9 Teoremi di Euclide *(NON IN PROGRAMMA 2020)*
Due vettori (cateti) sono $\underline{a}, \underline{b}$ sono ortogonali se e solo una delle seguenti vale
1) se $\underline{a}'$ e' la proiezione ortogonale di $\underline{a}$ sul terzo lato $\underline{c} := \underline{a}-\underline{b}$ del triangolo, allora

$$|\underline{a}|^2 = |\underline{a}'|\cdot|\underline{a}-\underline{b}|$$

Cioe' il quadrato costruito su un cateto e' equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa. [3]

---

[3]con verifica diretta, calcolare il prodotto scalare $(\underline{a}-\underline{a}')\cdot b = 0$.

[1]applicare la definizione di sopra e scrivere $\underline{a}'\cdot\underline{b}$ verificando che risulta $\underline{a}\cdot\underline{b}$. La seconda uguaglianza segue dal fatto che $\underline{a}'$ e $\underline{b}$ sono allineati (=proporzionali)

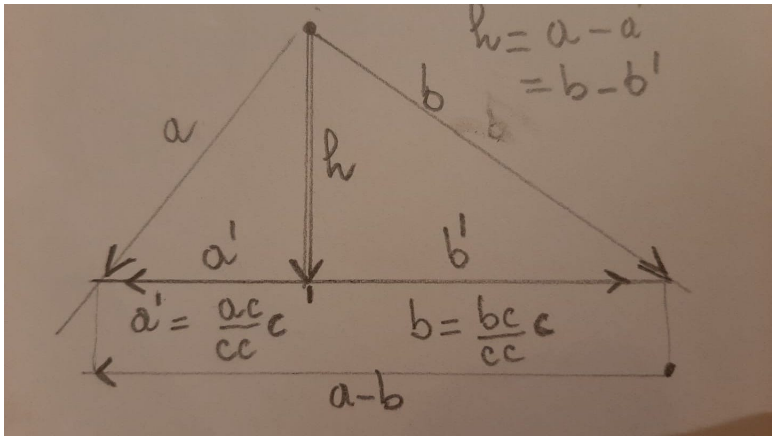
[2]segue da quanto sopra

[3]Risulta $|\underline{a}|^2 = \underline{a}\cdot\underline{a} = \underline{a}\cdot(\underline{a}+\underline{b}-\underline{b}) = (\underline{a}\cdot\underline{b}) + \underline{a}\cdot(\underline{a}-\underline{b})$ dove $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ e $\underline{a}\cdot(\underline{a}-\underline{b})$ e' il prodotto della lunghezza di $\underline{a}$ per la lunghezza della sua proiezione sull'ipotenusa $\underline{c} = \underline{a}-\underline{b}$, come visto sopra.

2) Se $\underline{h}$ e' l'altezza del triangolo relativa $\underline{c}$ mentre $\underline{a}'$ e $\underline{b}'$ sono le proiezioni ortogonale di $\underline{a}$ e $\underline{b}$ su $\underline{c}$ allora

$$|\underline{h}|^2 = |\underline{a}'| \cdot |\underline{b}'|$$

Cioe' il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa e' equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. [4]



13.10 Formula di Polarizzazione *(NON IN PROGRAMMA 2020)*

permette di calcolare il prodotto scalare una volta nota la funzione norma (cioe' la lunghezza dei segmenti)

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(|a+b|^2 - |a|^2 - |b|^2) = \frac{1}{4}(|a+b|^2 - |a-b|^2)$$

e quindi di identificare gli angoli di un triangolo e di un parallelogramma /tramite il prodotto scalare indicato sopra). [1]

13.11 Legge del Parallelogramma *(NON IN PROGRAMMA 2020)*

Se $\underline{a}$ e $\underline{b}$ rappresentano i lati di un parallelogramma, allora $\underline{a}+\underline{b}$ e $\underline{a}-\underline{b}$ rappresentano le diagonali e risulta [2]

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2 + |\underline{a}-\underline{b}|^2 = 2|\underline{a}|^2 + 2|\underline{b}|^2$$

13.12 Teorema (Disuguaglianza di Schwarz) *(DIM)* [3]

Se V e' uno spazio euclideo allora per ogni $\underline{a}, \underline{b} \in V$,

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$$

o equivalentemente: $(\underline{a} \cdot \underline{b})^2 \leq (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b})$. [4]

---

[4] Si ha che l'altezza relativa alla base $\underline{c}$ e' rappresentata da $\underline{h} := \underline{a} - \underline{a}'$ e anche $\underline{h} := \underline{b} + \underline{b}'$ quindi $|\underline{h}|^2 = \underline{h} \cdot \underline{h} = (\underline{a} - \underline{a}') \cdot (\underline{b} + \underline{b}') = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{b}' - \underline{a}' \cdot \underline{b} - \underline{a}' \cdot \underline{b}'$
Si verifica poi subito che $\underline{a}'\underline{b} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{c}}{\underline{c} \cdot \underline{c}} \underline{c} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{\underline{c} \cdot \underline{c}} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b}'$ e quindi $|\underline{h}|^2 = \ \underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{a}' \cdot \underline{b}'$ laddove $-\underline{a}' \cdot \underline{b}' = |\underline{a}'| \cdot |\underline{b}'|$ (sono vettori proporzionali e discordi) e $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ se e solo se il triangolo e' rettangololo. cvd

[1] per la prima equazione, basta calcolare $|a+b|^2 = (a+b) \cdot (a+b) = ...$ per la seconda basta calcolare anche $|a-b|^2$ e fare la sottrazione

[2] dim ovvia

[3] si noti che questa disuguaglianza si applica anche per spazi vettoriali diversi da $\mathbb{R}^n$.

[4] si osservi che sono stati indicati allo stesso modo: valore assoluto di un numero e modulo di un vettore. Dim: se $\underline{a}, \underline{b}$ sono proporzionali il teorema e' di facile verifica ponendo $\underline{a} = x\underline{b}$ e constatando che vale l'uguaglianza . Altrimenti si consideri la combinazione lineare $a+xb$ con $x \in R$. Certamente $a+xb \neq 0$, dunque $|a+xb|^2 = |a|^2x^2 + 2(a \cdot b)x + |b|^2 > 0$ per ogni x. Quindi il polinomio (nella x) deve avere sempre valore > 0 e questo vale se e solo se per il suo discriminante vale $\Delta \leq 0$. Siccome $\Delta = 4(a \cdot b) - 4|a|^2|b|^2$ la tesi segue facilmente.

13.13 Teorema (di Carnot) del coseno *(DIM)*
Dati i vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ si definisce il coseno dell'angolo fra i due come

$$\cos \hat{\underline{ab}} := \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} \in [-1, 1]$$

e risulta

$$|\underline{b} - \underline{a}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2\cos \hat{\underline{ab}} \cdot |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$$

dove $b - a$ rappresenta il terzo lato del triangolo con lati $\underline{a}$ e $\underline{b}$. [1]

13.14 Teorema (Disuguaglianza triangolare) *(DIM)* [2] *Se V e' uno spazio euclideo allora per ogni $\underline{a}, \underline{b} \in V$,*

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$$

13.15 Teorema su Sistemi ortogonali *(DIM)*
1) Un sistema $v_1, \ldots, v_n$ di vettori fra loro ortogonali (cioe $v_i \cdot v_j = 0$ se $i \neq j$) e' indipendente [3].

2) Se $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ dove i vettori v_i sono fra loro ortogonali (a coppie) allora $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ dove $\alpha_i = \frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}$ e' il coefficiente di Fourier. [4].

13.16 Teorema Gram-Schmidt *(dim). Dato un sistema di vettori (indipendenti) per un sottospazio W, l'algoritmo* **GS** *di Gram-Schmidt produce -con mosse di Gauss- un sistema ortogonale di generatori (cioe' fatto da vettori ortogonali a coppie) per W .*
In particolare, data la successione dei vettori v_i si definiscono induttivamente i vettori
$v'_1 = v_1$
$v'_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v'_1}{v'_1 \cdot v'_1} v'_1$
$v'_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot v'_1}{v'_1 \cdot v'_1} v'_1 - \frac{v_3 \cdot v'_2}{v'_2 \cdot v'_2} v'_2$
$\ldots$
$v'_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} (\frac{v_{n+1} \cdot v'_i}{v'_i \cdot v'_i}) v'_i$ *dove* $\frac{v_{n+1} \cdot v'_i}{v'_i \cdot v'_i}$ *e' il coeff. di Fourier di v_{i+1} su v'_i.*
Fatto questo si ha:
- se vettori $v_1, ..., v_i$ sono indipendenti, allora $v'_1, ..., v'_i$ sono tutti non nulli e ortogonali fra loro (a coppie) e vale anche $W = \langle v_1, ..., v_i \rangle = \langle v'_1, ..., v'_i \rangle$ [5]
- se si dispongono i vettori $\underline{v}_i$ come righe di una matrice A e i vettori $\underline{v}'_i$ come righe di una matrice A' allora $A' = TA$ con T matrice triangolate bassa. [6]

13.17 Corollario sulle componenti rispetto ad un riferimento ortonormale*:*
Data una base $\{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e' possibile determinare una

---

[1] la dimostrazione e' ovvia vista la definizione appena data. Si noti che risulta pure $\cos \hat{uv} = \cos \hat{vu} = \cos \widehat{(\alpha v)\, u}, \forall \alpha \in R$

[2] si ha $|\underline{a} + \underline{b}|^2 = (\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b}) \leq |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2\underline{a} \cdot \underline{b} \leq |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2|\underline{a} \cdot \underline{b}| = |(\underline{a}| + |\underline{b}|)^2$

[3] Se $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ e' una combinazione lienari di vettori tutti non nulli, allora facendo prodotto scalare per v_i si ottiene $\alpha_i v_i \cdot v_i = 0$ e quindi $\alpha_i = 0$

[4] moltiplicando ambo i membri della relazione $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ per v_i si ottiene l'asserto

[5] per come costruito v'_i e' combinazioni lineare di $v_1, ..., v_i$ e quindi non puo' essere nullo. Per quanto sull'ortogonalita' -procedendo per induzione- sufficiente fare (per $j < i$) il prodotto scalare $v'_i \cdot v_j$ e constatare che risulta $= 0$.

[6] basta osservare che A' si e' ottenuta con mosse di Gauss e invocare **??** tenendo presente che le mosse fatte trasformano una matrice tringolare basse in una che e' ancora triangolare bassa

base ortonormale $\{\underline{v}'_1, ..., \underline{v}'_m\}$ *dello stesso sottospazio e cioe' fatta da vettori di norma* 1 *e ortogonali fra loro, ovvero tali che* $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ *se* $i \neq j$ *e* $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_1 = 1$ *se* $i = j$.

In tale base la i-esima componente di $\underline{v}$ *risulta* $\underline{v} \cdot \underline{v}'_i$. [7]

13.18 Teorema sul complemento ortogonale *(non programma 2020)*

Sia W *e' sottospazio di* $\mathbb{R}^n$*, allora*

1) $W^\perp := \{v \mid v \cdot w = 0 \ \forall w \in W\}$ *e' un sottospazio (detto complemento ortogonale)* [1]

2) $V = W \oplus W^\perp$ [2]

3) $(W^\perp)^\perp = W$ [3]

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$ scrivere una base per un sottospazio con dimensione 2 perpendicolare al sottospazio $\langle(1,1,0)\rangle$. [4]

---

[7] vedi 13.15

[1] dim ovvia

[2] dim cenni: in $W \cap W^\perp$ ci sono i vettori ortogonali e se stessi e quindi a norma 0 allora $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$. Scegliere poi una base di W , completarla ad una base di di V con il Teorema 7.10 del Complemento , applicare GS e ottenere $V = W \oplus W_1$ con $W_1 \leq W^\perp$. Ma dalla Formula di Grassman si ha che W_1 e $W^\perp$ hanno la stessa dim e quindi sono uguali

[3] ogni vettore di W e' ortogonale a quelli che gli sono ortogonali, quindi e' ovvio che $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Per mostrare l'altra implicazione sia $w_2 \in (W^\perp)^\perp$. Poiche' certamente $w_2 \in V = W \oplus W^\perp$ allora posso scrivere $w_2 = w + w_1$ con $w \in W$ e $w_1 \in W^\perp$. Cosi' $w_2 - w = w_1 \in W^\perp \cap (W^\perp)^\perp$ e quindi $w_2 = 0$ e $w_2 = w \in W$.

[4] basta completare la base data ad una base di $\mathbb{R}^3$ e poi usare Gs

14 Rette e piani nello spazio euclideo 3D

In questa sezione mostriamo come le tecniche dell'algebra lineare forniscano strumenti per trattare egevolmente la geometria 3D ed eventualmente anche in $\mathbb{R}^n$ senza il ricorso all'intuizione spaziale.

14.1 Modello affine dello spazio euclideo. Chiamiamo:
- **punti** gli elementi P dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, cioe' le terne di numeri reali. Spesso si identificano i punti P con gli insiemi $\{P\}$ e si dicono pure sottospazi affini di dimensione 0

- **rette** i cosidetti laterali dei sottospazi di dimensione 1 o **sottospazi affini** (di dim =1) gli insiemi dei punti

$$r := P_0 + \langle P_* \rangle = \{P_0 + tP_* \mid t \in \mathbb{R}\}$$

con $P_* \neq \underline{0}$, che . Inoltre $P_* \in \mathbb{R}^3$ si dice un **vettore direzione** (individuato a meno di proporzionalita'[1]) o terna di **numeri direttori** della retta. La retta $\langle P_* \rangle$ si dice direzione di r.

- **piani** i cosiddetti laterali dei sottospazi di dimensione 2 o **sottospazi affini** (di dim =2) gli insiemi

$$\pi := P_0 + \langle P_1, P_2 \rangle = \{P_0 + tP_1 + sP_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

dove $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ non sono proporzionali. Il piano $\langle P_1, P_2 \rangle$ si dice giacitura di π.

Allora otteniamo che $\mathbb{R}^3$ diviene un modello della geometria euclidea, cioe' ne soddisfa (i primi) assiomi[2] Invece nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ si introducono le rette allo stesso identico modo quali sottospazi affini di dimensione 1 e non si introducono i piani.

14.2 *Siano P, P' punti e W, W' sottospazi vettoriali*
0) Se $P_1, P_2 \in \mathcal{A} = P + W$ allora $P_1, P_2 \in W$
1) Se $\mathcal{A} = P + W$ allora anche $\mathcal{A} = P' + W$ per ogni $P' \in \mathcal{A}$
2) risulta $P + W \subseteq P' + W'$ se e solo se ($W \subseteq W'$ e $P - P' \in W'$)

14.3 *(nodim) Nello spazio euclideo 3D valgono le seguenti:*
1) Per 2 punti distinti passa una ed una sola retta. [3]
2) Per 3 punti distinti passa uno ed un solo piano. [4]
3) Se una retta r ed un piano π hanno 2 punti in comune, allora la retta e' contenuta nel piano. [5]
4) Se due rette sono incidenti o parallele allora sono contenute in uno stesso piano.
5) Dati un punto P ed una retta r tale che $P \notin r$, allora esiste una ed una sola retta per P parallela ad r. [6]
6) Due rette distinte sono parallelle non hanno intersezione (non vale viceversa)[7]

---

[1] Si noti che P_0 e' univocamente identificato.

[2] in verita' per soddisfare tutti gli assiomi della geometria secondo Euclide bisogna aggiungere anche altre definizioni, ma non ce ne occupiamo perche' non usiamo i teoremi della geometria euclidea, ma solo quelli dell'algebra lineare

[3] vedi 14.4

[4] vedi 14.8

[5] se A e B sono i punti comuni, allora $r = A + \langle A - B \rangle$.Se $\pi = A + W$ allora $A - B \in W$ per 14.2.0. Sicche' $r = A + \langle A - B \rangle \subseteq A + W = \pi$.

[6] se r ha direzione W allora la retta e' necessariamente $P + W$, cfr. 14.2.1

[7] vedi 14.4

14.4 Equazione vettoriale della retta in spazi $\mathbb{R}^n$ di qualunque dimesione

Le rette passanti per l'origine sono tutti e soli i sottospazi di dimensione 1, ovvero del tipo $r = \langle P \rangle$ dove $P \neq O$ e' un qualunque punto di r e gli altri sono tutti del tipo tP con $t \in \mathbb{R}$.

Esiste una ed una sola **retta r per due punti** (distinti) P_0 e P_1 ed e'

$$r = P_0 + \langle P_1 - P_0 \rangle$$

cioe' il luogo dei punti $P = P(t)$ tali che

$$(S_0) \qquad P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

laddove $P(0) = P_0$, $P(1) = P_1$ e $P(\frac{1}{2}) = \frac{P_0+P_1}{2}$ e' il punto medio del segmento P_1P_2.[1] [2]

- Se P' e P'' sono altri punti della retta r allora $P' - P''$ e $P_1 - P_0$ sono proporzionali e sono entrambi **vettore direzione**.[3]

- Due rette si dicono **parallelle** se e solo se hanno la stessa direzione cioe' i vettori direzione son proporzionali. Esse sono coincidenti oppure non hanno intersezione[4] .[5]

14.5 Equazione parametrica della retta in 2D e 3D

In $\mathbb{R}^3$, se si indicano $P(t) = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, alllora esplicitando le componenti nella equazione vettoriale

$$(S_0) \qquad P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

si ha che la retta r si rappresenta con l'**equazione parametrica**:

$$(S_1) \qquad \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0 \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0 \\ z = t(z_1 - z_0) + z_0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

Dove $\underline{v} = (l, m, n) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = P_1 - P_0$ e' un vettore direzione (o terna di numeri direttori) di r, esso e' determinato a meno di una costante di proporzionalita'.[6]

Le componenti del versore $\frac{1}{|\underline{v}|}\underline{v}$ si dicono anche **coseni direttori** poiche' sono i coseni degli angoli che la retta forma con gli assi (vedi 13.13) e sono invece univocamente determinati.

Se si ritiene fissatoP_0 e si lascia variare il vettore direzione (l, m, n) allora (S_1) rappresenta il **fascio di rette** di centro P_0, cioe' l'insieme delle rette che passano per P_0.

Due rette sono **parallele/ortogonali** se e solo se i loro numeri direttori sono proporzionali/hanno prodotto scalare nullo.

Nota: in dimensione 2, cioe' in $\mathbb{R}^2$, basta cancellare tutto quello che riguarda la variabile z. In dimensione maggiore invece basta aggiungere analoghe equazioni in una quarta, quinta, etc. variabile.

---

[1] l'esistenza e' ovvia. Per l'unicita' vedi nota sotto

[2] ovvero l'unico punto della retta per P_1 e P_2 equidistante da P_1 e P_2.

[3] basta scrivere $P' = P_0 + t'(P_1 - P_0)$ e $P'' = P_0 + t''(P_1 - P_0)$ e calcolare $P' - P'' = (t' - t'')(P_1 - P_0)$. Ne segue pure che un'altra possibile retta per P_1, P_2 deve avere la stessa direzione e quindi essere necessariamente r.

[4] Se due rette hanno la stessa direzione W e un punto in comune P allora sono la retta $r = P + W$

[5] poiche' la dimensione 3 non e' apparsa in questo ragionamento, l'enunciato vale anche in 2D e, anzi, in uno spazio di ogni dimensione

[6] in 2D i numeri direttori sono una coppia $\underline{v} = (l, m) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = P_1 - P_0$

14.6 Equazione cartesiana della retta in 2D

In $\mathbb{R}^2$ l'equazione della retta

$$(S_1) \qquad \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0 \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

eliminendo t conduce a un'equazione tipo

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0)$$

Equivalentemenete, tre punti P, P_0, P_1 di $\mathbb{R}^2$ sono **allineati** (cioe' sulla stessa retta r) se e solo se i loro vettori $P - P_0$ e $P_1 - P_0$ sono proporzionali e quindi se e solo se la matrice $\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ ha le righe proporzionali. Calcolandone il determinante si giunge nuovamente alla equazione

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0)$$

che, quando i denominatori non sono nulli, si scrive pure $t =$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Dunque la retta r nel piano cartesiano 2D si rappresenta anche con un'equazione[1]

$$ax + by = d$$

Viceversa quest'equazione rappresenta una retta (cioe' un sottospazio affine di dimensione 1) grazie a Teorema di Struttura dei Sistemi Lineari.

Due rette $ax + by = d$ e $a'x + b'y = d'$ sono:
- parallele se (a, b) e (a', b') sono proporzionali.
- ortogonali se $aa' + bb' = 0$

Se $b \neq 0 \neq b'$ allora le rette si scrivono anche nella cosiddetta forma esplicita $y = mx + n$ con $n = \frac{d}{b}$ e $m = -\frac{a}{b}$ (coefficiente angolare).
Le condizioni di parallelismo e ortogonalita' divengono $m = m'$ e $mm' = -1$ [2]

14.7 Equazione cartesiana della retta in 3D Tre punti P, P_0, P_1 sono **allineati** (cioe' sulla stessa retta) se e solo se i loro vettori $P - P_0$ e $P_1 - P_0$ sono proporzionali e quindi se e solo se la matrice $\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix}$ ha le righe proporzionali ovvero

$$(S_2') \qquad \begin{cases} (x - x_0)(y_1 - y_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0) \\ (z - z_0)(y_1 - y_0) = (z_1 - z_0)(y - y_0) \end{cases}$$

Relazione alla quale si giunge anche calcolando esplicitamente t nella (S_1). Infatti, quando i denominatori non sono nulli, si ha $t =$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Dunque la retta r per i due punti P_0 e P_1 si rappresenta anche con un sistema (equivalente) di **equazioni cartesiane**[3]:

$$(S_2) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

[1] dove i coefficienti a, b... si possono calcolare facilmente
[2] ovvero $m' = -\frac{1}{m}$, se $a \neq 0$
[3] dove i coefficienti a, b... si possono calcolare da (S_2') dove certamente $c = b' = 0$

che e' del tipo (S_2).[4]. Reciprocamente, risolvendo il sistema (S_2) si passa da (S_2) ad un sistema del tipo (S_1) (parametrico) [5]

Viceversa unsistema (S_2) rappresenta una retta (cioe' un sottospazio affine di dimensione 1) grazie al Teorema di Struttura dei Sistemi Lineari e la presenta come intersezione di due piani (vedi 14.8 e 14.9).

Un **vettore direzione** della retta rappresentata da (S_2) e' $(a, b, c) \times (a', b', c')$ cioe' il prodotto esterno delle giaciture dei piani coinvolti in (S_2) (vedi 14.15) [1].

14.8 Equazione parametrica/vettoriale del piano I piani per l'origine sono tutti e soli i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, pertanto il piano per l'origine e per i punti P_1, P_2 non allineati[2] e' il luogo dei vettori P che sono combinazione lineare dei vettori P_1 e P_2 e quindi ha equazione parametrica $P(s,t) = sP_1 + tP_2$ che fornisce anche un *riferimento* nel piano [3] laddove le immagini dei versori canonici sono $P(1,0) = P_1$ e $P(0,1) = P_2$.

Piu' in generale, esiste uno ed un solo **piano per tre punti non allinaati** P_0, P_1, P_2. Esso e' il sottospazio affine

$$\pi = P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0 \rangle$$

cioe' l'insieme dei punti dei punti P tali che $P - P_0$ sia sul piano passante per l'origine e $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ e quindi ha **equazione parametrica vettoriale**

$$P = P(s,t) = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$$

che conduce facilmente a un sistema di 3 equazioni parametriche con 2 paramentri la cui eliminazione conduce da una sole equazione (cartesiana) del tipo

$$ax + by + cz = d$$

con a, b, c, d funzione delle componenti di P_0, P_1, P_2.

14.9 Equazione cartesiana del piano Il piano per l'origine ed i punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e' il luogo dei punti $P = (x, y, z)$ che da dipendono linearmente da P_1 e P_2, cioe' tali che $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ Cio' conduce ad un'equazione tipo

$$ax + by + cz = 0$$

con a, b, c facilmente calcolabili con il Teorema di Laplace. [4,5]

---

[4] in ogni caso allo stesso risultato di puo' anche arrivare eliminando t in (S_1)

[5] e' sufficiente scegliere un incognita come parametro (ed es. porre $z = t$) e ricavare le altre due in funzione del parametro.

[1] perche' e' perpendicolare alle perpendicolari ad entrambi i piani e quindi e' parallelo ad entrambi i piani, dunque e' il candidato che cerchiamo. Oppure lo si puo' calcolare esplicitamente trasformando le equazioni cartesiane (S_2) in equazioni parametriche (S_1)

[2] cioe' che non sono sulla stessa retta

[3] che e' un sottopazio vettoriale e quindi uno spazio di per se'.

[4] osserviamo che dopo questa osservazione, notato che il determinete qualche riga sopra determinante descrive una funzione che vale 0 in P_0, P_1, P_2 rappresenta il piano per questi punti.

[5] se i punti sono allineati si ha $a = b = c = d = 0$ ed il procedimento e' inutile

Piu' in generale il **piano per tre punti** non allineati P_0, P_1, P_2 ha equazione (cartesiana): [6] [7]

$$ax + by + cz - d = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dove a, b, c, d sono facilmente calcolabili come minori 3×3 della matrice. [1]

Viceversa, dato $(a, b, c) \neq \underline{0}$ il luogo dei punti P che soddisfano $ax+by+cz = d$ e' un sottospazio affine di dimensione 2 per il Teorema10.1 di Struttura dei Sistemi Lineari.

14.10 Si dice **vettore normale** di un piano un vettore $\underline{v}$ **ortogonale** ad ogni vettore applicato (cioe' segmento) con estremi sul piano $ax + by + cz = d$. Cio' vale se e solo se e' $\underline{v}$ proporzionale al vettore (a, b, c). [2]

14.11 Posizioni reciproche di due piani *π e π' di equazioni $ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$:*
- *sono* **uguali** *se e solo se i vettori (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono proporzionali.* [3]
- *sono* **paralleli** *se e solo se (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali.* [4]
- *sono* **incidenti** *in una retta se e solo se sono non paralleli.* [5]

14.12 Posizioni reciproche piano/retta

- **Il piano** π'' : $a''x + b''y + c''z = d$ **e la retta** r : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c' + d' = 0 \end{cases}$
sono
1) **paralleli** *se e solo se sono* **non incidenti**. *Cio' accade se e solo se hanno vettore normale (a, b, c) e direzione (l, m, n) ortogonali, cioe'* [6]

---

[6]dim: Si cerca un sottospazio affine $P_0+\pi$ dove π e' il piano per l'origine P_1-P_0, P_2-P_0 e quindi l'equazione e' la stessa avendo traslato tutto $-P_0$; d'altra parte il determinante descrive una funzione che vale 0 in P_0, P_1, P_2e rappresenta un piano per quanto sotto.

[7]se i punti sono allineati si ha $a = b = c = 0$ ed il procedimento e' inutile

[1]Questa formula da anche la condizione di complanarita' di 4 punti. Cfr pure 14.16

[2]se $d = 0$ la cosa e' ovvia, altrimenti si osservi che $P_0 - P_1$ sta sul piano se e solo se $a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = 0$. Si noti che il vettore normale non e' univocamente determonato, mentre lo e' il sottospazio che racchiude tutti i vettori normali, che andrebbe chiamato "sottospazio normale".

[3]questo e' ovvio perche' le due equazioni hanno le stesse soluzioni.

[4]hanno lo stesso vettore normale e quindi sono paralelli. Alternativamente si osserva che se i piani hanno lo stesso vettore normale, ma sono distinti, allora la pima matrice del sistema per la loro intersezione ha rango 1 menre quella completa ha rango 2. Dunque i piani non hanno intersezione.

[5]se i piani non sono paralleli, le matrici del sistema hanno lo stesso rango = 2 e quindi si applica il Teorema10.1 di Struttura dei Sistemi Lineari. Se i piani sono paralleli e distinti i piani non hanno intersezione poiche' il sistema formato dalle due equazioni non ha soluzioni per il Teorela di Rouche' Capelli. Se i piani sono uguali, la loro intersezione e' un piano.

[6]Il sistema che calcola l'intersezione non deve essere determinato (cioe' deve essere indeterminato se la retta e' nel piano o impossibile se esterna). Quindi la prima matrice non e' invertibile ed il suo determinante e' zero.
Con un'altra dim, si puo' vedere che -grazie allo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga- quel determinente non e' altro che il prodotto scalare di un vettore normale del piano e dei numeri direttori della retta 14.15.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

2) **ortogonali** *se e solo se hanno vettore normale* (a, b, c) *e direzione* (l, m, n) *proporzionali.*

14.13 Fascio di piani per una retta *(***)* e' l'insieme dei piani che contengono un retta data r. Se r ha equazione cartesiana $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c' + d' = 0 \end{cases}$ allora il generico piano del fascio ha equazione:

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

al variare dei due parametri reali α, β. [1]

14.14 Posizioni reciproche di due rette in 3D *(***)*
Si considerino le rette r ed r'' di equazioni cartesiane

$$r := \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad r'' := \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}.$$

e le matrici del sistema costituito delle 4 equazioni

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

ed il loro ranghi $\rho(A_1)$ e $\rho(A_2)$. Certamente $2 \leq \rho(A_1) \leq \rho(A_2) \leq \rho(A_1) + 1 \leq 4$. Esaminiamo tutti i possibili casi, tra loro esclusivi:

1) r ed r'' sono **coincidenti** se e solo se $2 = \rho(A_1) = \rho(A_2) = 2$. [2]

2) r ed r'' sono **parallele** e distinte se e solo se $2 = \rho(A_1) < \rho(A_2) = 3$. [3]

3) r ed r'' sono **incidenti** e distinte se e solo se $3 = \rho(A_1) = \rho(A_2) = 3$. [4]

4) r ed r'' sono **sghembe** (=non complanari) se e solo se $3 = \rho(A_1) < \rho(A_2) = 4$ [5]

Solo nei casi (2) e (4) le rette hanno intersezione non vuota come da Teorema di Rouche-Capelli.

[1] dim un piano $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ sta nel fascio se contiene la retta e quindi si il sistema delle tre equazioni e' indeterminato. Per succedere questo la matrice completa deve avere rango 2 e quindi il vettore (a'', b'', c'', d'') deve essere combinazione lineare dei vettori (a, b, c, d) , (a', b', c', d'). Si noti poi che -a costo di rinunciare al secondo dei due piani- di puo' porre $\alpha = 1$ e osservare che i piani del fasco dipendono sostanzialmenete da un solo parametro.

[2] $\rho(A_1) = \rho(A_2) = 2$ se e solo se il sistema omogeneo con tre incognite associato ad A_1 ha ∞ soluzioni, ovvero un sottospazio affine di dimensione 1, cioe' una retta, che deve necessariamente coincidere con r

[3] $\rho(A_1) = \rho(A_2) = 2$ se e solo se il sistema omogeneo con tre incognite associato ad A_1 ha ∞ soluzioni, cioe' le rette direzione di r ed r'' coincidono, ovvero r ed r'' sono parallele. Pero' il sistema delle rette non ha soluzioni, quindi le rette sono distinte

[4] $\rho(A_1) = \rho(A_2) = 3$ se e solo se il sistema di matrice A ha una ed una sola soluzione

[5] vale per esclusione dei casi precedenti

- r ed r'' si dicono **ortogonali** se sono complanari (cioe' si intersecano) e hanno direzioni ortogonali.

14.15 Prodotto vettoriale (esterno) Dati due vettori $\underline{v}_1 := P_1$ e $\underline{v}_2 = P_2$ definiamo il loro prodotto esterno

$$P_1 \times P_2 = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1) =: \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

dove il (falso) determinante si intende calcolato -con abuso di notazione- con la regola di Laplace e $\underline{i} = (1,0,0)$, $\underline{j} = (0,1,0)$, $\underline{k} = (0,0,1)$ sono i versori della base canonica.
Il prodotto esterno $\underline{v}'' = \underline{v} \times \underline{v}'$ gode delle seguenti proprieta':

- e' perpendicolare ad entrambi i vettori $\underline{v}, \underline{v}'$. [1]

- e' bilineare, cioe' lineare in entrambe le variabili

- e' anticommutativo cioe' $\underline{v}' \times \underline{v} = -(\underline{v} \times \underline{v}')$; [2]

- ha verso tale che la terna orientata $\underline{v}, \underline{v}', \underline{v}''$ e' orientata come pollice, indice, medio della mano destra. [3]

- ha modulo $|\underline{v} \times \underline{v}'|$ pari all'**area del parallelogramma** che ha lati $\underline{v}, \underline{v}'$ (*** dim no 2020) [4]
quindi vale la formula "identità di Lagrange":

- $|\underline{v} \times \underline{v}'| = |\underline{v}| \cdot |\underline{v}'| \cdot \sin \hat{\underline{v}\underline{v}'} = \sqrt{(\underline{u} \cdot \underline{u})(\underline{v} \cdot \underline{v}) - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2} = \sqrt{|\underline{u}|^2 \cdot |\underline{v}|^2 - |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ [5] [6]

- e' l'unica funzione bilineare anticommutativa tale che $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{k}$, $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$ e quindi necessariamente vale $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$ e $\underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$, $\underline{k} \times \underline{j}$, $\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$ [7]
- non e' associativo, siccome $\underline{0} = (\underline{i} \times \underline{i}) \times \underline{j} \neq \underline{i} \times (\underline{i} \times j) = -\underline{j}$.

14.16 Prodotto triplo Se $\underline{v} = (a, b, c)$, $\underline{v}' = (a', b', c')$, $\underline{v}'' = (a'', b'', c'')$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$, allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

---

[1] dim: calcolando il prodotto scalare prodotto scalare di $(\underline{v} \times \underline{v}') \cdot \underline{v}$ si ritrova l'espansione di Laplace rispetto alla prima riga di una matrice con due righe uguali a $\underline{v}$ e la terza $\underline{v}'$. Questo determinante e' 0. Con ragionamento analogo si vede che $(\underline{v} \times \underline{v}') \cdot \underline{v}' = 0$

[2] si tratta del determinante con due righe scambiate

[3] no dim***

[4] questo perche' e' una funzione lineare (rispetto alla moltiplicazione con scalari positivi) cosi' come l'area geometrica e quindi per verificare che queste due funzioni coincidono basta verificarlo sui versori canonici, cosa ovvia in quanto viene sempre 1.

[5] no dim*** dove $\sin \hat{\underline{v}\underline{v}'} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\underline{v}\underline{v}'}}$ e $\cos \hat{\underline{v}\underline{v}'} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}'}{|\underline{v}| \cdot |\underline{v}'|} =$.

[6] dim facoltativa ***: basta osservare che -in valore assolto- il prodotto triplo ha modulo il prodotto del modulo di $\underline{a} \times \underline{b}$ (che e' l'area della base quadrilatero di lati $\underline{b}, \underline{c}$) per la proiezione di $\underline{a}$ sulla perpendicolare a questa base, cioe' su $\underline{b} \times \underline{c}$

[7] no dim

e questo scalare si chiama **prodotto triplo** e:
- e' nullo se i vettori sono complanari. [8]
- e' positivo se la terna e' levogira. [9]
- rappresenta il **volume del parallelepipedo orientato** con lati $\underline{v}, \underline{v}', \underline{v}''$. [10]
- conduce alla formula per il **volume del tetraedro** di vertici P_0, P_1, P_2, P_3 che vale

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

[1]

[8] dim: se sono complanati sono linearmente dipendenti

[9] dim facoltativa ***

[10] dim facoltativa ***: basta osservare essa e' lineare in tutte e tre le variabili, cosi' come il volume orientato e che coincide con il volume quando la si applica ai versori (cioe' viene ± 1 oppure 0 a seconda che siano tutte e tre diversi o meno, nel prino caso si verifichi che viene -1 se e solo se la terna ordinata non e' levogira). Oppure -con una diostrazioen differente- si puo' ossercare che -in valore assolto- il prodotto triplo ha modulo il prodotto del modulo di $\underline{a} \times \underline{b}$ (che e' l'area della base quadrilatero di lati $\underline{b}, \underline{c}$) per la proiezione di $\underline{a}$ sulla perpendicolare a questa base, cioe' su $\underline{b} \times \underline{c}$.

[1] dim facoltativa ***, ma basta modificare la matrice con GJ in modo che l'ultima colonna abbia 1 in prima posizione e poi sempre 0.

14.17 Indice argomenti teorici trattati a proposito dello spazio euclideo 3D:

1. Riferimenti cartesiani monometrici ortogonali.
2. Identificazione dei punti dello spazio con le terne di $\mathbb{R}^3$.
3. Rappresentazione parametrica ed equazioni cartesiane della retta (nel piano e nello spazio). vedi 14.7
4. Retta per due punti (formule), vedi 14.7.
5. Fascio di rette per un punto (formula) vedi 14.5.
6. Vettore direzionale di una retta (numeri direttori) vedi 14.5.
7. Condizioni di parallelismo ed ortogonalita' fra rette nello spazio (con vettori direzione) 14.5.
8. Allineamento di tre punti, vedi 14.7)
9. Prodotto esterno (cioe' vettoriale) di vettori, vedi 14.15
10. rappresentazione parametrica ed equazione cartesiana del piano 14.9.
11. Piano per 3 punti (anche tramite determinante 3x3) vedi 14.9.
12. Complanarita' di 4 punti (anche tramite determinante 3x3 o 4x4) vedi 14.9.
13. Fascio di piani (formula come combinazione lineare delle equazioni) vedi 14.13
14. Vettore normale (a, b, c) di un piano (perpendicolare al piano $ax + by + cz = d$), vedi 14.10.
15. Condizioni di parallelismo ed ortogonalita' fra piani nello spazio (tramite vettore normale), vedi 14.11
16. Intersezione fra piani, vedi 14.11.
17. Intersezione e parallelismo fra piano e retta, vedi 14.12
18. Rette complanari/sghembe (anche tramite determinante 4x4) vedi 14.14
19. Retta parallela/ortogonale ad un piano (=vettori direzione e normale ortogonali/paralelli), vedi 14.12
20. Volume di un tetraedro in funzione dei 4 vertici (anche tramite determinante 4x4 e prodotto triplo), vedi 14.16.
21. Area di un triangolo nello spazio tramite il prodotto vettore, vedi 14.15.

14.18 Esempi di competenze (esercizi) richieste a proposito dello spazio euclideo 3D

Senza usare la formula bella e pronta seper scrivere/calcolare equazione/coordinate

1. equazione cartesiana/parametrica/numeri direttori di una retta/piano dati tramite equazione di altro tipo [1]
2. piano/retta per 3/2 punti dati [2]
3. piano contenente un punto ed una retta data (in qualsiasi forma) [3]
4. piano che contiene due rette incidenti (date in qualsiasi forma) [4]
5. la/una retta per un punto dato P perpendicolare/parallela ad un piano π [5]
6. il/un piano per un punto dato P parallelo/perpendicolare ad un piano π [6]
7. la retta per un punto dato P parallela/(incidente e ortogonale) ad una retta r [7]
8. il/un piano per un punto dato P ortogonale/parallelo ad una retta data r [8]
9. retta per un punto P parallela a due piani dati (non paralleli). [9]
10. piano per un punto P parallelo a due retta date [10]

[1] ad esempio passare dalla equazone parametrica alla cartesiana e viceversa

[2] per la retta vedi varie formule nella teoria sopra, per il piano vedi 14.9. Comodo usare il determinante.

[3] scegliere due ulteriori punti sulla retta e poi usare formula del piano per tre punti. Oppure usare la formula del fascio di piani per quella retta e imporre il passaggio per quel punto.

[4] scegliere tre punti sulle rette (non sulla stessa) e poi usare formula del piano per tre punti. Oppure usare la formula del fascio di piani una retta e imporre il passaggio per un punto dell'altra.

[5] usare eq. parametrica, vettori direzione e noramle

[6] usare eq. cartesiana e vettore normale

[7] per la parallela usare eq. parametrica e numeri direttori. Per determinare la retta ortogonale, vedi 11

[8] usare eq. cartesiana e numeri direttori

[9] usare eq. parametrica per la retta e individuare i numeri direttori con il prodotto esterno delle giaciture

[10] scritti i vettori direzione delle rette si impone che il vettore normale del piano sia ortogonale al entrambi. Oppure il vettore normale del piano si individua direttamente con il prodotto esterno delle direzioni delle rette.

11. proiezione ortogonale P_r di un punto P su una retta r [1]

12. retta per un punto P che sia secante e perpendicolare ad una retta data r [2]

13. retta r per un punto P incidente due rette sghembe r' e r'' [3]

14. piano per una retta data e parallelo ad un'altra data
(e stabilire quando esiste) [4]

15. distanza fra un punto P e retta r [5]

16. proiezione P_π di un punto P su un piano π [6]

17. distanza fra un punto P e piano π [7]

18. distanza fra due piani paralleli. [8]

19. distanza fra due retta parallele [9]

20. distanza fra due retta parallele/sghembe r e r' [10]

---

[1] scrivere il piano α per P e ortogonale a r e calcolarne l'intersezione di α e r

[2] scrivere l'equazione della retta per P e P_r come nel punto 11 sopra

[3] r e' intersezione del piano per P che contiene r' e del piano per P che contiene r'', vedi punto 4 sopra.

[4] scrivere l'equazione del fascio di piani per r e individuare in questo il piano con giacitur ortogonale alla direzione di r

[5] calcolare la distanza fra P e P_r

[6] scrivere la retta r per P perpendicolare a π e calcolare l'intersezione di r con π

[7] calcolare la distanza fra P e P_π

[8] scrivere una retta ortogonale ad entrambi, trovare le intersezioni e quindi la loro distanza.

[9] scrivere un piano ortogonale ad entrambe e calcolare le intesezioni con le rette e poi la distanza. Procedendo in un altro modo, scegliere un punto su una retta e proiettarlo sull'altra, poi calcolare la distanza

[10] determinare le formule parametiche delle rette r e r' tramite parametri t, t' (rispettivamente), scrivere il generico punto $P(t)$ su r e $P'(t')$ su r', poi imporre che il vettore $P(t) - P'(t')$ sia ortogonale ad entrambe r e r' (cioe' ai loro numeri direttori), determinare cosi' t, t' e quindi $P(t)$ e $P'(t')$ e infine la loro distanza

Esercizi sciolti

- Al variare del paramentro reale k, scrivere l'equazione del piano per il punto $P = (1, 2, k)$ e perpendicolare alla retta $r \begin{cases} x + y + kz = 0 \\ y = k \end{cases}$

- Verificare per quali valori del paramentro a esiste piano per (1,0,2), perpendicolare al piano $ax - y + 2z = 1$ e parallelo alla retta $\begin{cases} 2x & + z & = & 1 \\ x & + y & = & -1 \end{cases}$

-Al variare del paramentro a, verificare se le rette r_1 e r_2
rappresentate dai seguenti sistemi sono sghembe

$$\begin{cases} ax & +2y & +z & = & -1 \\ 2x & +y & -z & = & -3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x & -y+ & z & = & a \\ x & +2y & -z & = & -1 \end{cases}$$

Nei casi in cui non lo sono, determinare un piano ad esse parallelo e passante per $(1, 0, 0)$.

- Determinare per quali valori dei paramentri h, k il piano α per i punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ e della retta r per i punti $(1, 0, k)$, $(0, 1, h)$ sono paralleli e quindi trovarne la distanza.

- Determinare il punto P' proiezione ortogonale di $P = (0, -2, 0)$ sul piano α di equazione $x + y = 1$ e P'' proiezione di P sulla rette che e' intersezione del piano α con il piano $z = 0$.

- Verificare se le rette r ed s sono sghembe, laddove
r ha equazioni cartesiane $x = 2x - y = z + 1$ ed
s e' la retta passante per il punto $(1, 1, 0)$ e parallela alla retta di equazioni cartesiane $x = y = 0$

- Determinare per quali valori dei paramentri h, k il piano α per i punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ e la retta r per i punti $(1, 0, k)$, $(0, 1, h)$ sono paralleli e quindi trovarne la distanza.

- Si determini per quali valori del parametro k la retta per i punti $(k - 1, 0, 0)$ e $(1, k, 0)$ passa anche per $(0, 0, 0)$