

Esame 20 Ottobre - PARTE A - ♥

1. Domanda

Sia $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ in $[-1,1]$; indicare l'affermazione vera.

- (a) f_n converge puntualmente a 0, ma non uniformemente
- (b) f_n converge uniformemente a 0
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = 0$
- (d) Nessuna delle altre risposte è corretta

2. Domanda

Sia $\gamma(t) = (t^3 - 1, t^2 - 1)$, $t \in [-1, 1]$; indicare le affermazioni vere.

- (a) γ è una curva semplice
- (b) γ è una curva chiusa
- (c) γ non è una curva
- (d) γ è regolare

3. Domanda

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; A si dice limitato se:

- (a) A è compatto
- (b) $\exists M > 0$ tale che $A \subset B_M(0)$
- (c) $\forall x \in A \exists B_r(x)$ tale che $B_r(x) \subset A$
- (d) nessuna delle altre risposte è corretta

4. Domanda

Sia $f(x, y) = |xy|$; indicare l'affermazione corretta.

- (a) La funzione f è derivabile in $\mathbb{R}^2$
- (b) La funzione f non è derivabile in $(0, 0)$
- (c) La funzione f non è continua
- (d) La funzione f non è derivabile in $(0, 1)$
- (e) Non esiste il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0, 0)$

5. Domanda

Il punto $(0, 0)$ per la funzione $f(x, y) = x^3 + (y - x)^2$ è:

- (a) un punto di minimo assoluto
- (b) un punto di massimo relativo
- (c) un punto di minimo relativo non assoluto
- (d) un punto di sella

6. Domanda

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$, A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 in A e (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo, allora

- (a) $f_{xy}(x_0, y_0) \geq 0$ e $f_{yx}(x_0, y_0) \geq 0$
- (b) $f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$
- (c) $f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$
- (d) nessuna delle altre risposte è corretta

7. Domanda

Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}^2$. Cambiare l'ordine di integrazione nel seguente integrale doppio:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx.$$

- (a) $\int_{-1}^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx dy$
- (b) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx dy$
- (c) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx dy$
- (d) $\int_0^1 \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx dy$

8. Domanda

Sia D il dominio normale definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Allora la sua area $\mathcal{A}$ è:

- (a) $\mathcal{A} = \int_a^b (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) dx$
- (b) $\mathcal{A} = \int_a^b \sqrt{|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|} dx$
- (c) $\mathcal{A} = (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))(b - a)$
- (d) nessuna delle altre risposte è corretta

9. Domanda

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0, \end{cases}$$

allora il valore L del $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ è:

- (a) $L = -\infty$
- (b) $L = +\infty$
- (c) $L = 0$
- (d) $L = 1$

10. **Domanda**

Sia y una generica soluzione dell'equazione differenziale $y'' + ay' + by = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Cosa si può sicuramente affermare su $y(x)$, qualsiasi siano a e b ?

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{e^{2x}} = 0$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x^3} = 0$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{e^{x\sqrt{x}}} = 0$
- (d) nessuna delle altre risposte è corretta

Esame 20 Ottobre - PARTE B

1. **Esercizio**(8 punti)

Trovare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^4 - 3x^2y + y^2$$

e studiare la loro natura.

2. **Esercizio**(7 punti)

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 1 - x^2\}$. Si calcoli

$$\iint_D x^2 dx dy.$$

3. **Esercizio**(8 punti)

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$$

e determinare tutte le soluzioni tali che esista finito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x}$.

4. **Esercizio**(7 punti)

Determinare una funzione $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in modo che sia $a(x, 0) = 0$ e che la forma differenziale

$$\omega = a(x, y) dx + e^y \sin x dy$$

risulti esatta. Scrivere una primitiva della forma ottenuta in questo modo.

5. **Domanda**

Enunciare e dimostrare uno dei seguenti teoremi:

- (a) Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor

- (b) Condizione sufficiente del II ordine
- (c) Teorema del differenziale totale

6. Domanda

Dare una delle seguenti definizioni:

- (a) Domini normali e formule di riduzione
- (b) Nozioni di convergenza per una serie di funzioni
- (c) Differenziabilità di una funzione di più variabili