Esame 20 Ottobre - PARTE A - ♣

1. **Domanda**

   Sia $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ in [-1,1]; indicare l'affermazione vera.

   (a) f_n converge puntualmente a una costante
   (b) Sono soddisfatte le ipotesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale
   (c) f_n converge uniformemente in $[0,1]$
   (d) Nessuna delle altre risposte è corretta

2. **Domanda**

   Sia $\gamma(t) = (t^4 - 1, t^2 - 1)$, $t \in [-1,2]$; indicare le affermazioni vere.

   (a) γ è una curva semplice
   (b) γ è una curva chiusa
   (c) γ non è una curva
   (d) γ è regolare a tratti

3. **Domanda**

   Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; A si dice limitato se:

   (a) A è compatto
   (b) $\exists M > 0$ tale che $|x| \leq M, \forall x \in A$
   (c) $\overline{A} = A$
   (d) nessuna delle altre risposte è corretta

4. **Domanda**

   Sia $f(x,y) = |xy|$; indicare l'affermazione corretta.

   (a) La funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$
   (b) La funzione f non è derivabile in $(3,0)$
   (c) La funzione f non è derivabile in $(0,0)$
   (d) La funzione f non è continua
   (e) Esiste il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,1)$

5. **Domanda**

   Il punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y) = x^5 + (y+x)^2$ è:

   (a) un punto di minimo assoluto
   (b) un punto di sella
   (c) un punto di massimo relativo
   (d) un punto di minimo relativo non assoluto

6. **Domanda**

   Sia $A \subset \mathbb{R}^2$, A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 in A e (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo, allora

(a) $f_{xy}(x_0, y_0) \geq 0$ e $f_{yx}(x_0, y_0) \geq 0$
(b) $f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$
(c) $f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$
(d) nessuna delle altre risposte è corretta

7. **Domanda**

Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}^2$. Cambiare l'ordine di integrazione nel seguente integrale doppio:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} f(x,y)\, dy\, dx.$$

(a) $\int_{-1}^{1} \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\, dx\, dy$
(b) $\int_0^1 \int_0^{\arccos y} f(x,y)\, dx\, dy$
(c) $\int_0^1 \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\, dx\, dy$
(d) $\int_{-1}^{0} \int_0^{\arccos y} f(x,y)\, dx\, dy$

8. **Domanda**

Sia D il dominio normale definito da

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq y \leq b\,,\ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\right\}.$$

Allora la sua area $\mathcal{A}$ è:

(a) $\mathcal{A} = \int_a^b |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\, dy$
(b) $\mathcal{A} = \int_a^b \sqrt{|\varphi_2(y) - \varphi_1(y)|}\, dy$
(c) $\mathcal{A} = (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))(b-a)$
(d) nessuna delle altre risposte è corretta

9. **Domanda**

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0, \end{cases}$$

allora il valore L del $\lim_{x \to +\infty} y(x)$ è:

(a) $L = -\infty$
(b) $L = +\infty$
(c) L non esiste
(d) $L = 1$

10. **Domanda**

Sia y una generica soluzione dell'equazione differenziale $y'' + ay' + by = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Cosa si può sicuramente affermare su $y(x)$, qualsiasi siano a e b?

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{e^{x^2}} = 0$
(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{e^{x}} = 0$
(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^2} = 0$
(d) nessuna delle altre risposte è corretta

Esame 20 Ottobre - PARTE B

1. **Esercizio(***8 punti***)**

Trovare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^4 + 3x^2y + y^2$$

e studiare la loro natura.

2. **Esercizio(***7 punti***)**

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2 - 1\}$. Si calcoli

$$\iint_D x^2 \, dx \, dy.$$

3. **Esercizio(***8 punti***)**

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$$

e determinare tutte le soluzioni tali che esista finito $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x}$.

4. **Esercizio(***7 punti***)**

Determinare una funzione $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 in modo che sia $b(0, y) = 0$ e che la forma differenziale

$$\omega = e^x \sin y \, dx + b(x, y) \, dy$$

risulti esatta. Scrivere una primitiva della forma ottenuta in questo modo.

5. **Domanda**

Enunciare e dimostrare uno dei seguenti teoremi:

(a) Formula di Taylor al II ordine con il resto di Peano per una funzione di 2 variabili

(b) Relazioni tra forme piane chiuse e esatte
(c) Criterio di Cauchy-Hadamard

6. **Domanda**

   Dare una delle seguenti definizioni:

   (a) Domini normali regolari e formule di Gauss-Green
   (b) Superficie regolare
   (c) Derivabilità di una funzione di più variabili