



Fondazioni

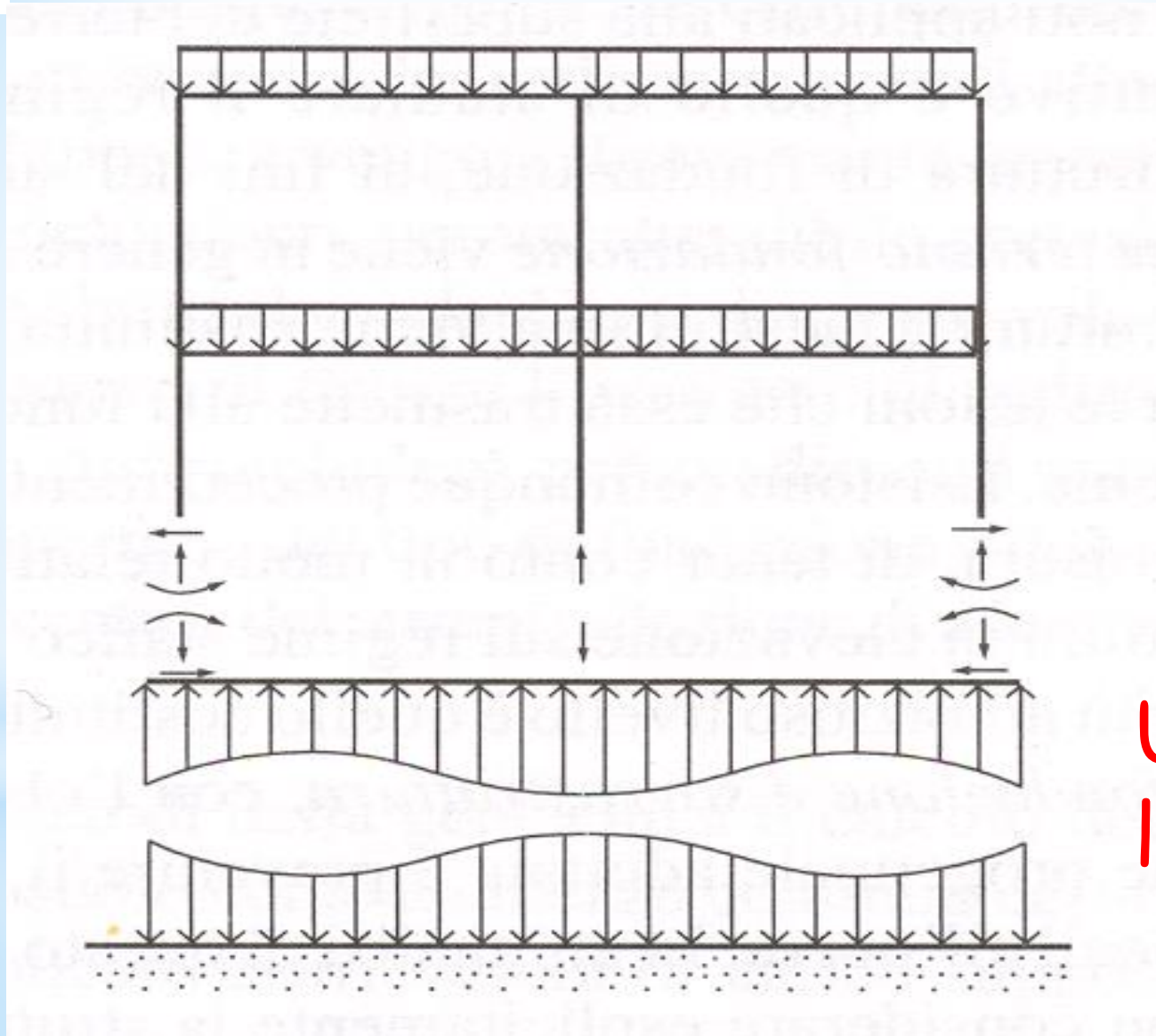
Prof. G. Russo

Interazione terreno-struttura per il calcolo delle sollecitazioni e verifiche **strutturali**



Fondazioni

Prof. G. Russo



Ubi sunt
leones?



Calcolo delle caratteristiche della sollecitazione nella struttura di fondazione

"Interazione terreno-struttura"

Procedimento tradizionale:

- si trascura l'influenza della sovrastruttura, e quindi:
- i carichi esercitati dalla sovrastruttura sulla fondazione vengono determinati assumendo che essi non siano influenzati dai cedimenti (**analisi strutturale a vincoli fissi** o addirittura **analisi strutturale per aree di influenza**)



Fondazioni

Prof. G. Russo

Interazione terreno-struttura

Lo studio dell'interazione fra la struttura di fondazione ed il sottosuolo viene condotto ricorrendo ad opportuni modelli semplificati.

La **struttura di fondazione** è in genere una struttura semplice e cioè una trave(1D) o un reticolo di travi o una piastra (2D).

La modellazione di tali strutture è **semplice e ben nota**.

Per quanto riguarda il **terreno di fondazione**:

Things should be as simple as possible, but not simpler!

A. Einstein

Nature is indifferent towards the difficulties it causes to the mathematicians

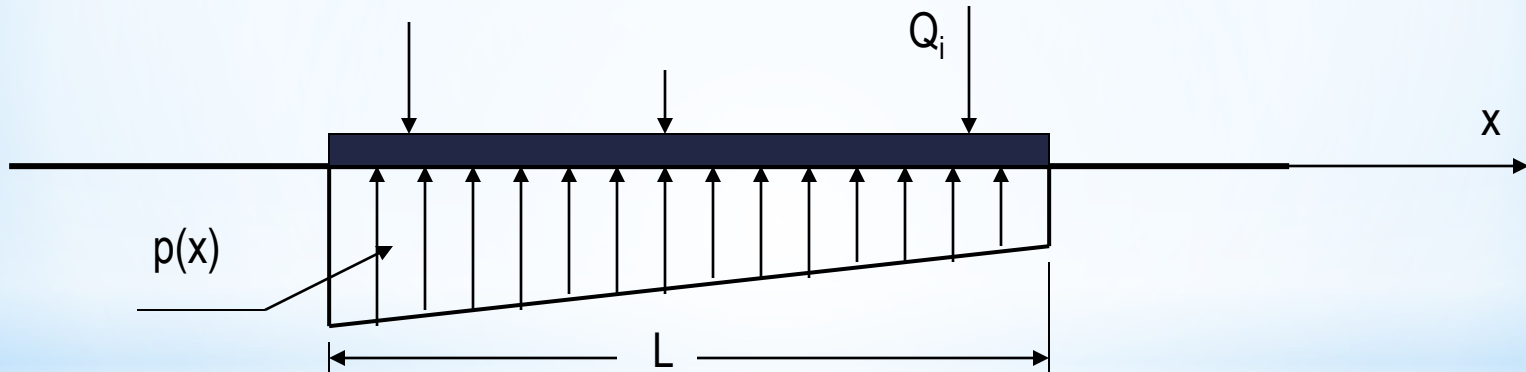
J. Fourier



Modello n° 1. Trapezio delle tensioni

Spannungtrapezverfahren

- Solo condizioni di equilibrio
- Ignora la congruenza
- Assume una distribuzione lineare della reazione



$$\sum Q_i = B \int_0^L p(x) dx$$

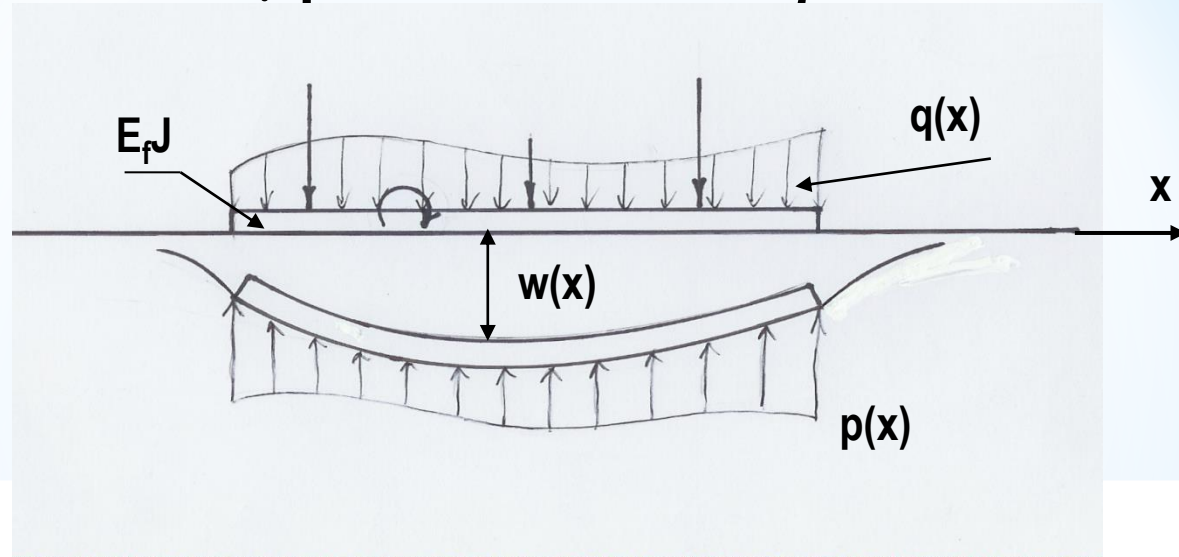
$$\sum Q_i x_i = B \int_0^L p(x) \cdot x \cdot dx$$

Noto anche, **impropriamente**,
come **"metodo della trave rigida"**

Accettabile solo per
dimensionamento preliminare



Per imporre la congruenza



Equazione della trave (o piastra) inflessa

$$E_f J \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - p(x)$$

$$D \nabla^4 w = q(x, y) - p(x, y)$$

da associare ad un'equazione che descriva il terreno

$$w(x) = f\{p(x)\}$$



Fondazioni

Prof. G. Russo

Semplificazioni correnti

- vincolo **bilaterale** tra fondazione e terreno (**ininfluente**)
- contatto "**liscio**" (assenza di tensioni tangenziali), moderatamente cautelativo



Assunto un determinato "modello" di sottosuolo, ne risulta determinata la relativa equazione:

$$w(x) = f\{p(x)\} \qquad w(x, y) = f\{p(x, y)\}$$

Essa può essere:

- un'equazione algebrica (es.: $p = kw$)
- un'equazione differenziale (es.: $p = kw - Td^2w/dx^2$)
- un'equazione integrale, come ad esempio:

$$w = \int_0^H \frac{1}{E} [\sigma_{zx} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] dz$$

con $\sigma_i = f\{p(x)\}$



Fondazioni

Prof. G. Russo

A queste diverse espressioni analitiche
corrispondono diversi significati fisici



Fondazioni

Prof. G. Russo

Modello n° 2. Mezzo "alla Winkler"

Universalmente (ed impropriamente) noto come
"teoria della trave (o piastra) elastica su suolo elastico"

Si assume:

$$p = kw$$

$$k [F L^{-3}]$$

(costante di sottofondo o coefficiente di reazione del terreno)

Le equazioni si combinano in:

$$E_f J \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - kBw(x)$$

$$D\nabla^4 w = q(x, y) - kw(x, y)$$



Con riferimento alla trave (1D), e per carichi concentrati ($q = 0$), l'integrale generale dell'equazione è il seguente:

$$w = \exp\left\{\frac{x}{\lambda}\right\} \left(A \cos \frac{x}{\lambda} + B \sin \frac{x}{\lambda} \right) + \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\} \left(C \cos \frac{x}{\lambda} + D \sin \frac{x}{\lambda} \right)$$

nella quale:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4E_f J}{kB}} \quad [1] \quad \text{Lunghezza caratteristica}$$

Una volta ottenuta la funzione incognita $w(x)$, si ha:

$p = kw$ = reazione del terreno;

dw/dx = inclinazione

$E_f J d^2w/dx^2$ = momento flettente;

$E_f J d^3w/dx^3$ = sforzo di taglio



Fondazioni

Prof. G. Russo

La soluzione dell'equazione differenziale dipende dal rapporto fra la **lunghezza L** e la **lunghezza caratteristica λ**

L/λ = rigidezza **relativa**

$L/\lambda < \pi/4$ → trave **infinitamente rigida**; le deformazioni per flessione sono trascurabili rispetto agli spostamenti rigidi

$\pi/4 < L/\lambda < \pi$ → Trave flessibile **di lunghezza finita**

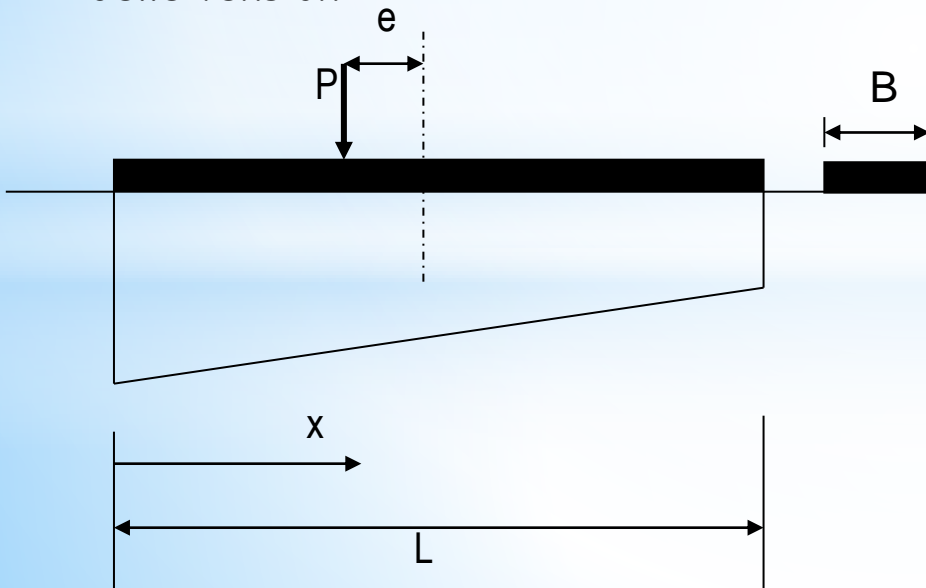
$\pi < L/\lambda$ → Trave **infinitamente lunga** o flessibile



Trave infinitamente rigida

$$(L/\lambda < \pi/4)$$

- i moti rigidi prevalgono sulle inflessioni
- w risulta distribuito con **legge lineare** (è definito da uno spostamento più una rotazione, o dallo spostamento di due punti)
- $p = kw$ è anch'esso distribuito con **legge lineare**
- il metodo di Winkler **degenera** nel metodo del trapezio delle tensioni



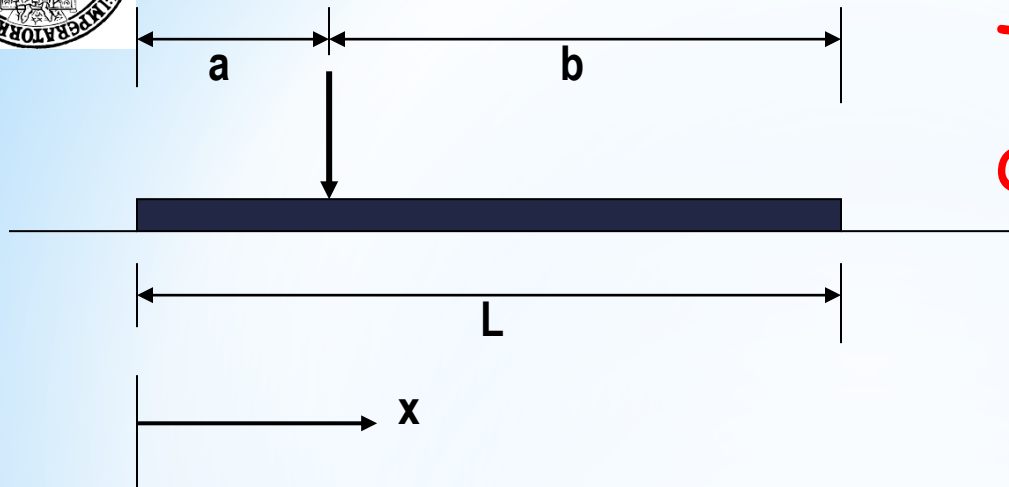
Ecco da dove viene
il nome di "trave rigida"

$$p(x) = \frac{P}{BL} \left(1 + 6 \frac{e}{L} - 12 \frac{ex}{L^2} \right)$$



Fondazioni

Prof. G. Russo



Trave deformabile
di lunghezza finita
 $\pi/4 < L/\lambda < \pi$

$$w \frac{\lambda k B}{P} (\sinh^2 \frac{L}{\lambda} - \sin^2 \frac{L}{\lambda}) = 2 \cosh \frac{x}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda} \left(\sinh \frac{L}{\lambda} \cos \frac{a}{\lambda} \cosh \frac{b}{\lambda} - \sin \frac{L}{\lambda} \cosh \frac{a}{\lambda} \cos \frac{b}{\lambda} \right) +$$
$$+ \left(\cosh \frac{x}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} + \sinh \frac{x}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda} \right) \left[\sinh \frac{L}{\lambda} \left(\sin \frac{a}{\lambda} \cosh \frac{b}{\lambda} - \cos \frac{a}{\lambda} \sinh \frac{b}{\lambda} \right) + \right.$$
$$\left. + \sin \frac{L}{\lambda} \left(\sinh \frac{a}{\lambda} \cos \frac{b}{\lambda} - \cosh \frac{a}{\lambda} \sin \frac{b}{\lambda} \right) \right]$$

$$w = \frac{p}{\lambda k B} A \left(\frac{L}{\lambda}, \frac{x}{\lambda} \right)$$



Fondazioni

Prof. G. Russo

$$M = \frac{P\lambda}{2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{L}{\lambda} + \sin^2 \frac{L}{\lambda}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \sinh \frac{x}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} \left(\sinh \frac{L}{\lambda} \cos \frac{a}{\lambda} \cosh \frac{b}{\lambda} - \sin \frac{L}{\lambda} \cosh \frac{a}{\lambda} \cos \frac{b}{\lambda} \right) \\ + \left(\cosh \frac{x}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} - \sinh \frac{x}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda} \right) \times \\ \left[\sinh \frac{L}{\lambda} \left(\sin \frac{a}{\lambda} \cosh \frac{b}{\lambda} - \cos \frac{a}{\lambda} \sinh \frac{b}{\lambda} \right) + \right. \\ \left. \sin \frac{L}{\lambda} \left(\sinh \frac{a}{\lambda} \cos \frac{b}{\lambda} - \cosh \frac{a}{\lambda} \sin \frac{b}{\lambda} \right) \right] \end{array} \right\}$$

e quella dello sforzo di taglio:

$$T = \frac{P}{\sinh^2 \frac{L}{\lambda} + \sin^2 \frac{L}{\lambda}} \left\{ \begin{array}{l} \left(\cosh \frac{x}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} + \sinh \frac{x}{\lambda} \cos \frac{x}{\lambda} \right) \times \\ \left(\sinh \frac{L}{\lambda} \cos \frac{a}{\lambda} \cosh \frac{b}{\lambda} - \sin \frac{L}{\lambda} \cosh \frac{a}{\lambda} \cos \frac{b}{\lambda} \right) + \\ \sinh \frac{x}{\lambda} \sin \frac{x}{\lambda} \left[\sinh \frac{L}{\lambda} \left(\sin \frac{a}{\lambda} \cosh \frac{b}{\lambda} - \cos \frac{a}{\lambda} \sinh \frac{b}{\lambda} \right) \right. \\ \left. + \sin \frac{L}{\lambda} \left(\sinh \frac{a}{\lambda} \cos \frac{b}{\lambda} - \cosh \frac{a}{\lambda} \sin \frac{b}{\lambda} \right) \right] \end{array} \right\}$$

Queste equazioni possono essere espresse nella forma:

$$w = \frac{P}{Bk\lambda} A'; \quad M = P \frac{\lambda}{2} B'; \quad T = PC' \quad (9.6)$$



Trave infinitamente lunga

$$(L/\lambda > \pi)$$

Per i più comuni casi di carico, sono disponibili soluzioni in forma analitica chiusa. Esse risultano combinazioni lineari delle funzioni:

$$F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\} \left(\cos \frac{x}{\lambda} + \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$F_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\} \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda}$$

$$F_3\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\} \left(\cos \frac{x}{\lambda} - \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\} \cos \frac{x}{\lambda}$$



Fondazioni

Prof. G. Russo

$$F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \left(\cos \frac{x}{\lambda} + \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$F_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda}$$

$$F_3\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \left(\cos \frac{x}{\lambda} - \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-\frac{x}{\lambda}} \cos \frac{x}{\lambda}$$

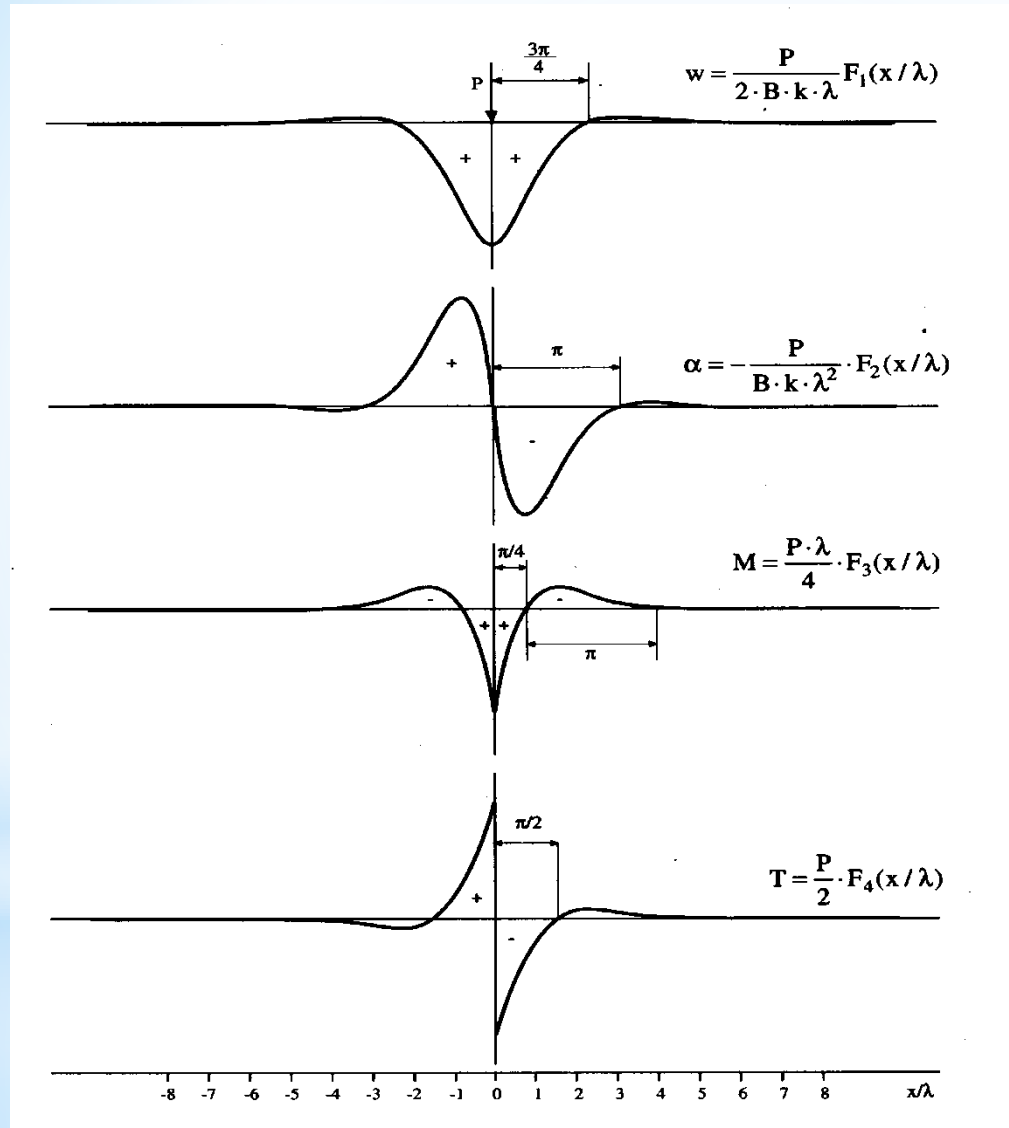
Caratteristica	Forza o coppia in sezione intermedia		Forza o coppia ad un'estremità	
	Forza	Coppia	Forza	Coppia
w	$\frac{P}{2 Bk\lambda} F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{C}{Bk\lambda^2} F_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{2P}{Bk\lambda} F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{-2C}{2 Bk\lambda^2} F_3\left(\frac{x}{\lambda}\right)$
α	$\frac{-P}{Bk\lambda^2} F_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{C}{Bk\lambda^3} F_3\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{-2P}{Bk\lambda^2} F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{4C}{Bk\lambda^3} F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right)$
M	$\frac{-P}{2} F_3\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{C}{2} F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$-P\lambda F_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$CF_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$
T	$\frac{-P}{2} F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{-C}{2\lambda} F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$-PF_3\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$\frac{2C}{\lambda} F_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

Tab. 9.1. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler



Fondazioni

Prof. G. Russo



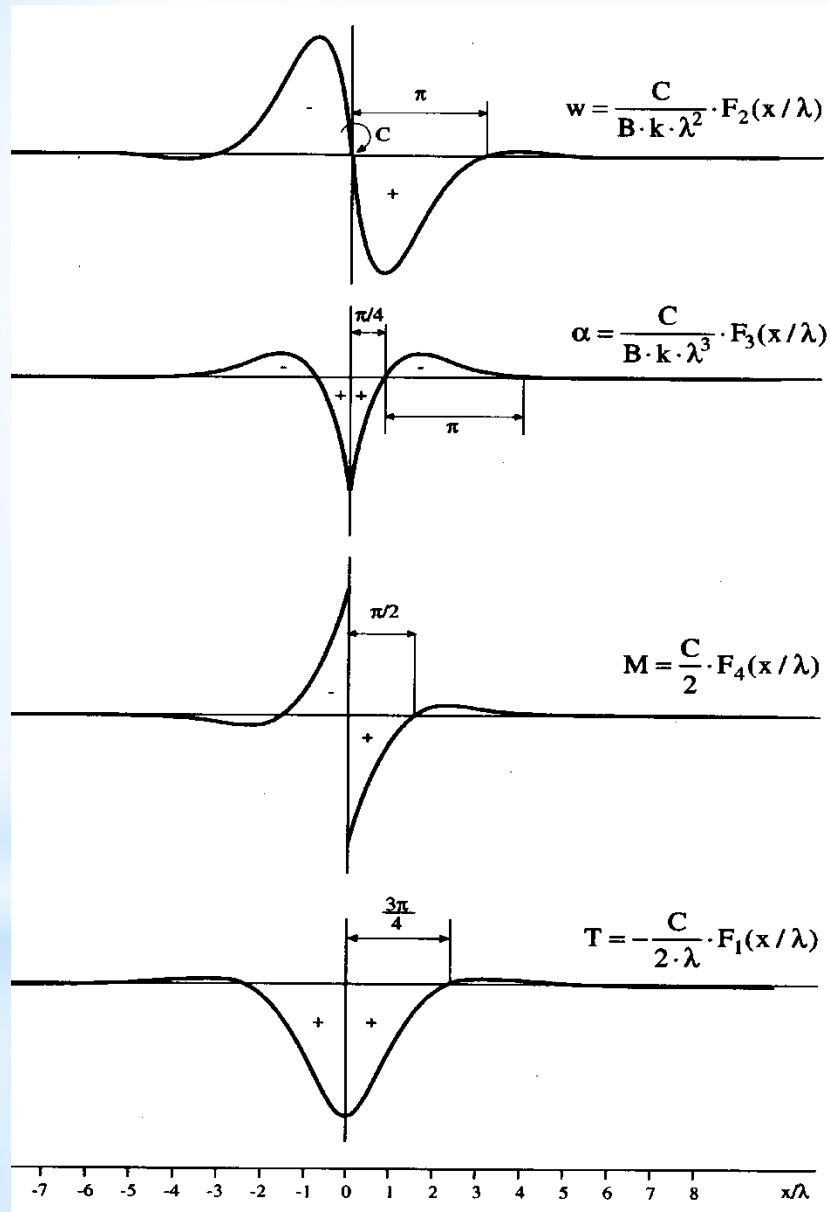
Trave di lunghezza infinita
($L/\lambda > \pi$)

Forza concentrata



Fondazioni

Prof. G. Russo



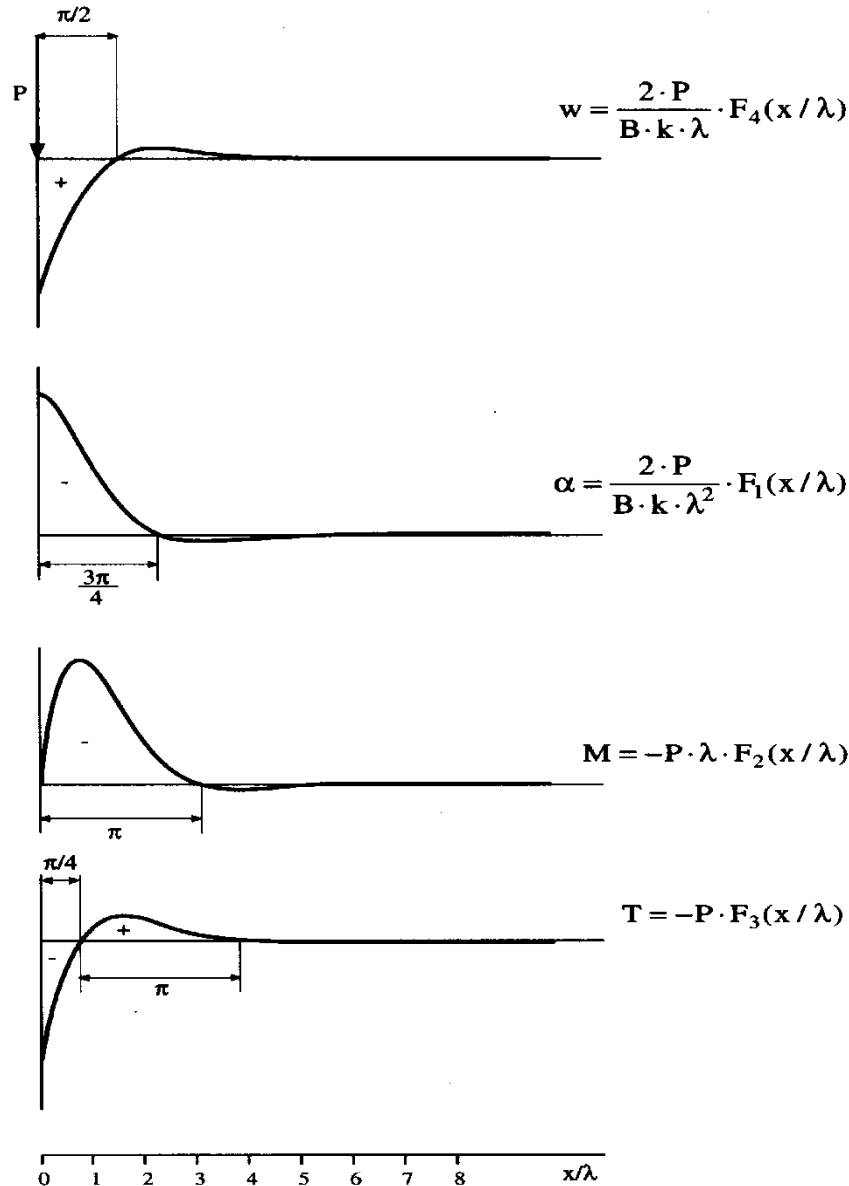
Trave di lunghezza infinita
($L/\lambda > \pi$)

Coppia concentrata



Fondazioni

Prof. G. Russo



Trave di lunghezza infinita
($L/\lambda > \pi$)

Forza concentrata
in un estremo

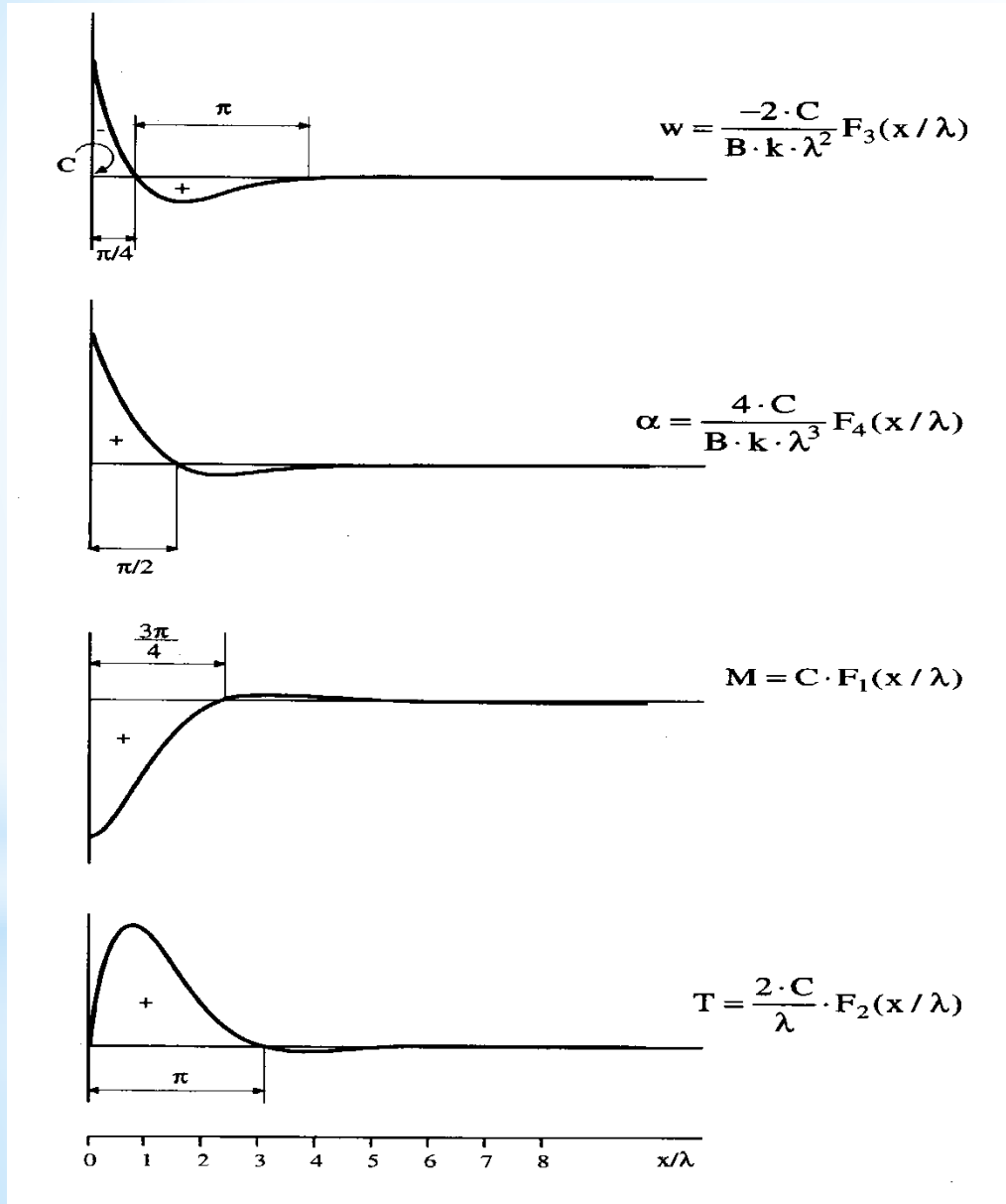


Fondazioni

Prof. G. Russo

Trave di lunghezza infinita ($L/\lambda > \pi$)

Coppia concentrata in un estremo





Fondazioni

Prof. G. Russo

Dal punto di vista fisico, il mezzo alla Winkler può essere assimilato:

- a un letto di molle **indipendenti**
- ad un liquido di peso specifico k , nel quale la fondazione galleggi (Winkler vs. **Archimede**)

Attenzione! In un terreno reale, il cedimento dipende:

- dalla costituzione del sottosuolo e dalle proprietà dei terreni
- dalla forma, dalle dimensioni e dalla profondità della fondazione

Pertanto il coefficiente di reazione del terreno $k = p/w$

- **non è una proprietà del terreno**
- **è insensato fornirne valori tipici per terreni tipici**



Fondazioni

Prof. G. Russo

Stima del valore di k

Il procedimento più logico ed affidabile consiste nel calcolare il cedimento w sotto la pressione media p e porre quindi:

$$k = p/w$$

In questo modo si tiene conto implicitamente, ed al meglio, di tutti i fattori che influenzano k (forma, dimensioni e profondità della fondazione, carichi, profilo stratigrafico, natura e caratteristiche dei terreni, ...)



Stima del valore di k

Se si fa riferimento ad una **piastra standard**
(forma circolare; diametro 30 cm)
i fattori connessi alla fondazione scompaiono e,
per un sottosuolo relativamente omogeneo,
può avere un senso dare valori tipici di k
che chiameremo k_1

Dovremo poi stabilire delle relazioni per trasformare
il valore di k_1 relativo alla piastra standard
in un valore di k relativo alla fondazione in esame



Valori di k_1 , terreni coesivi

Tipo di argilla	Consistenza		
	Consistente	Molto consistente	Dura
c_u (kPa)	50 ÷ 100	100 ÷ 200	> 200
Intervallo dei valori di k_1 (N/cm ³)	18 - 35	35 ÷ 70	> 70
Valore consigliato di k_1 (N/cm ³)	25	50	100

Valori di k_1 , terreni incoerenti

Tipo di sabbia		Stato di addensamento		
		Sciolto	Medio	Denso
Intervallo dei valori di k_1 (N/cm ³)		7 ÷ 20	20 ÷ 100	100 ÷ 350
Valore consigliato	Satura	10	30	110
	Non satura	15	50	175



Fondazioni

Prof. G. Russo

Relazioni di trasformazione di k_1 in k

Argille sovraconsolidate, $E(z) \approx \text{cost.}$

Piastra standard
di diametro b

$$w_1 = \frac{qb}{E} (1 - \nu^2) I_1$$

Trave di fondazione
di larghezza B

$$w = \frac{qB}{E} (1 - \nu^2) I$$

$$\frac{k}{k_1} = \frac{w_1}{w} = \frac{b}{B} \frac{I_1}{I}$$

$$k = k_1 \frac{b}{1,5B}$$



Fondazioni

Prof. G. Russo

Relazioni di trasformazione di k_1 in k

Terreni incoerenti, $E \approx az$

Relazione empirica di Terzaghi e Peck

$$w = w_1 \left(\frac{2B}{B+b} \right)^2$$

$$\frac{w_1}{w} = \left(\frac{B+b}{2B} \right)^2$$

$$k = k_1 \frac{w_1}{w} = k_1 \left(\frac{B+b}{2B} \right)^2$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} k = \frac{1}{4}$$



Stima di prima approssimazione

$$w = \frac{qB}{E} (1 - v^2) I_w$$

Con $E = E_{ed}$; $v = 0$; $I_w \approx 1$

$$w = \frac{qB}{E_{ed}}$$

$$k = \frac{q}{w} = \frac{E_{ed}}{B}$$