

3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Definizione: Massimo

Sia A un insieme di numeri reali.

Def. Si dice **massimo** di A , se esiste, quel numero M che appartiene ad A ed è maggiore o uguale di ogni altro elemento dell'insieme A

$$A \subset \mathbb{R} \quad M \text{ massimo di } A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A, \quad M \geq a \end{cases}$$

3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Definizione: Minimo

Sia A un insieme di numeri reali.

Def. Si dice **minimo** di A , se esiste, quel numero m che appartiene ad A ed è minore o uguale di ogni altro elemento dell'insieme A

$$A \subset \mathbb{R} \quad m \text{ minimo di } A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall a \in A, \quad m \leq a \end{cases}$$



Insiemi senza Massimo e minimo

Non tutti gli insiemi di numeri reali sono dotati di massimo o di minimo!



Insiemi senza Massimo e minimo

Esempio 1.

Sia A l'insieme dei numeri reali positivi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

allora sicuramente possiamo affermare che

$$\nexists \min A \text{ e } \nexists \max A$$

infatti lo zero sicuramente non può essere il minimo poiché $0 \notin A$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Massimo e minimo sono unici

Si può facilmente verificare che, se esistono, il massimo o il minimo di un insieme sono **unici**

Dimostrazione (per assurdo):

siano dati $M_1 = \max A$ ed $M_2 = \max A$ con $M_1 \neq M_2$; allora vale che:

$$M_1 \in A$$

$$M_2 \in A$$

$$M_1 \geq a, \forall a \in A$$

$$M_2 \geq a, \forall a \in A$$

$$\text{se } M_2 \in A \Rightarrow M_1 \geq M_2$$

$$\text{se } M_1 \in A \Rightarrow M_2 \geq M_1$$

$$\Downarrow \\ M_1 = M_2$$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Esempi

Esempio 2. Consideriamo l'insieme N dei numeri naturali. Allora

$$\exists \min N = 1 \quad \text{ma} \quad \nexists \max N$$

Esempio 3. Consideriamo l'insieme Z_p dei numeri relativi pari:

$$Z_p = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

allora:

$$\nexists \min Z_p \quad \text{e} \quad \nexists \max Z_p$$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Esempi

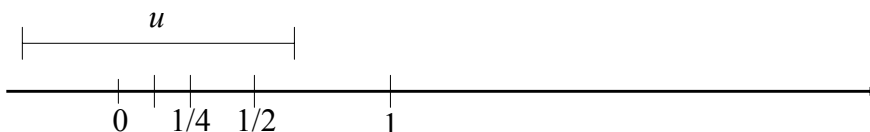
Esempio 4. Consideriamo l'insieme

$$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \text{ ed } n \neq 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

allora

$$\nexists \min B \quad \text{ma} \quad \exists \max B = 1$$

infatti



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Esempi

Esempio 5. Consideriamo l'insieme $I =]2,9[$
Sicuramente possiamo affermare che

$$\nexists \min I \quad \text{e} \quad \nexists \max I$$

Maggiorante e minorante: definizione

Def. Un numero reale L si dice **maggiorante** per un insieme A di numeri reali se è maggiore o uguale di ogni elemento di A . In simboli:

$$L \text{ maggiorante di } A \Leftrightarrow L \geq a, \forall a \in A$$

Def. Un numero reale l si dice **minorante** per un insieme A di numeri reali se è minore o uguale di ogni elemento di A . In simboli:

$$l \text{ minorante di } A \Leftrightarrow l \leq a, \forall a \in A$$

OSSERVAZIONE 1

ovviamente, il massimo ed il minimo di un insieme, se esistono, sono anche rispettivamente un maggiorante ed un minorante.

$$A \subset \mathbb{R} \quad M \text{ massimo di } A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A, \quad M \geq a \end{cases}$$



$$A \subset \mathbb{R} \quad M \text{ maggiorante di } A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \quad M \geq a \end{cases}$$

Ma NON è vero il viceversa

Maggiorante e minorante: osservazioni

OSSERVAZIONE 2

Un insieme di numeri reali non sempre ammette maggioranti o minoranti

Esempio. Sia dato l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

non solo $\nexists \min A$ e $\nexists \max A$

inoltre $\exists \text{minoranti } A$ ma $\nexists \text{maggioranti } A$

(lo 0, così come tutti numeri negativi sono dei minoranti di A)

Esercizio

Insieme	Min	Max	Minoranti (esistono)	Maggioranti (esistono)	Inf	sup
$A=\{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 12\}$						
$B=\{x \in \mathbb{R} : x \geq 7\}$						
$C=\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$						
$D=\{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$						
N numeri naturali						
$Z_p = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$						
$I = (2, 9)$						
$I = [2, 9)$						
$I = (2, 9]$						
$I = [2, 9]$						

3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Definizione: limitato superiormente/inferiormente

Def. Un insieme A di numeri reali si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante

Def. Un insieme A di numeri reali si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante

Def. Un insieme A di numeri reali si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente. In simboli:

$$A \text{ limitato} \Leftrightarrow \exists l, L \in \mathbb{R} : l \leq a \leq L, \forall a \in A$$

3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Definizione: estremo superiore

Def. Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente ($\Rightarrow$ ammette maggioranti). Allora si dice che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se è il minimo dei maggioranti di A . In simboli:

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x \end{cases}$$



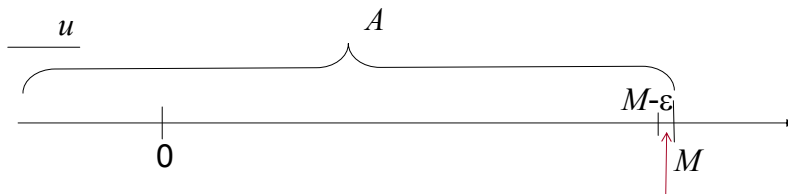
3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Estremi (sup e inf) di un insieme numerico

Def. Sia A un insieme numerico limitato superiormente. Diciamo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A , indicato col simbolo $\sup A$, se M è il minimo dei maggioranti di A . Cioè, M verifica le due proprietà:

$$i) M \geq x, \quad \forall x \in A$$

$$ii) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x$$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Definizione: estremo inferiore

Def. Sia A un insieme di numeri reali non vuoto e limitato inferiormente ($\Rightarrow$ ammette minoranti). Allora si dice che $m \in \mathbb{R}$ è l'**estremo inferiore** di A se è il massimo dei minoranti di A . In simboli:

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x, \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > x \end{cases}$$

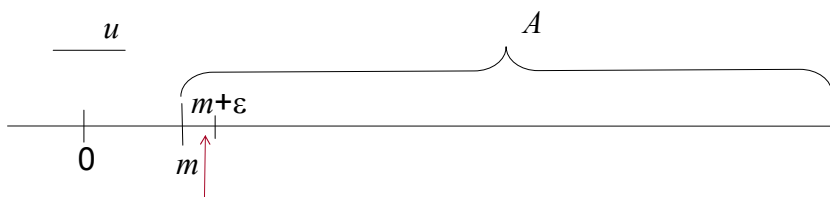
3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Estremi (sup e inf) di un insieme numerico

Def. Sia A un insieme numerico limitato inferiormente. Diciamo che $m \in \mathbb{R}$ è l'**estremo inferiore** di A , indicato col simbolo $\inf A$, se m è il massimo dei minoranti di A . Cioè, m verifica le due proprietà:

$$i) m \leq x, \quad \forall x \in A$$

$$ii) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > x$$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Limitato sup/inf => estremo superiore/inferiore

TEOREMA. Sia A un insieme di numeri reali, con $A \neq \emptyset$, allora vale che:

- se A è limitato superiormente $\Rightarrow A$ ammette estremo superiore
- se A è limitato inferiormente $\Rightarrow A$ ammette estremo inferiore



Limitato sup/inf: osservazioni

OSSERVAZIONE. Se A è un insieme di numeri reali, con $A \neq \emptyset$ e non limitato superiormente, allora si pone:

$$\sup A = +\infty$$

Allo stesso modo, se A è un insieme di numeri reali, con $A \neq \emptyset$ e non limitato inferiormente, allora si pone:

$$\inf A = -\infty$$



Limitato sup/inf: osservazioni

Ogni insieme di numeri reali diverso dall'insieme vuoto ammette sia estremo superiore che estremo inferiore.

In particolare:

- se è limitato superiormente, ammette estremo superiore finito
- se è limitato inferiormente, ammette estremo inferiore finito



Limitato sup/inf: esempi

Esempio 1. Consideriamo l'insieme dei numeri reali positivi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Vediamo le diverse proprietà

$$\nexists \min A \text{ e } \nexists \max A$$

$$\exists \text{ minoranti } A \text{ ma } \nexists \text{ maggioranti } A$$

Inoltre possiamo dire che

$$\inf A = 0 \text{ e } \sup A = +\infty$$



Limitato sup/inf: esempi

Esempio 2. Sia dato

$$Z_p = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

abbiamo già detto che

$$\nexists \min Z_p \quad \text{e} \quad \nexists \max Z_p$$

$$\nexists \text{minoranti } Z_p \quad \text{e} \quad \nexists \text{maggioranti } Z_p$$

Inoltre possiamo dire che

$$\inf Z_p = -\infty \quad \text{e} \quad \sup Z_p = +\infty$$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Limitato sup/inf: esempi

Esempio 3. Consideriamo di nuovo l'insieme

$$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ ed } n \neq 0 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

Abbiamo già detto che

$$\nexists \min B \quad \text{ma} \quad \exists \max B = 1$$

inoltre possiamo dire che

$$\inf B = 0 \quad \text{e} \quad \sup B = \max B = 1$$

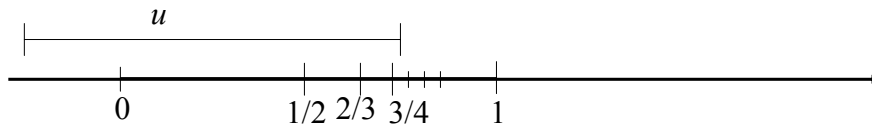


3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Limitato sup/inf: esempi

Esempio 4. Consideriamo l'insieme

$$C = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ ed } n \neq 0 \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \right\}$$



allora vale che

$$\min C = \inf C = 0 \quad , \quad \nexists \max C \quad , \quad \exists \sup C = 1$$

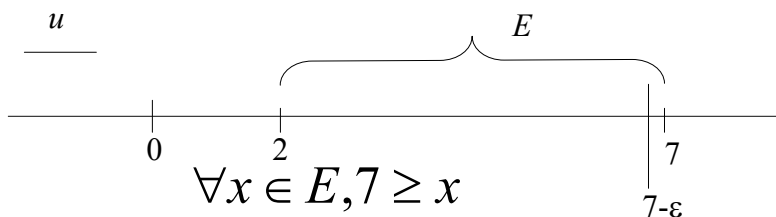
3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Limitato sup/inf: rappresentazione grafica

Esempio 5. Consideriamo l'insieme $E=[2,7)$

allora si ha che E è limitato sia superiormente che inferiormente e vale che

$$\min E = \inf E = 2 \quad , \quad \nexists \max E \quad , \quad \exists \sup E = 7$$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E : 7 - \varepsilon < x$$

3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Esercizio

Insieme	Min	Max	Minoranti (esistono)	Maggioranti (esistono)	Inf	sup
$A=\{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 12\}$						
$B=\{x \in \mathbb{R} : x \geq 7\}$						
$C=\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$						
$D=\{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$						
N numeri naturali						
$\mathbb{Z}_p = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$						
$I = (2, 9)$						
$I = [2, 9)$						
$I = (2, 9]$						
$I = [2, 9]$						



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Cosa abbiamo imparato

$$M \text{ massimo di } A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A, M \geq a \end{cases}$$

$$L \text{ maggiorante di } A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, L \geq a \end{cases}$$

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, M \geq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a \end{cases}$$



3. Massimo, minimo, maggioranti e minoranti. Insiemi limitati. Estremi superiori ed inferiori.

Cosa abbiamo imparato

1. massimo minimo (def. punto)
2. maggioranti e minoranti (def. punto)
3. insiemi limitato superiormente e inferiormente (def. Insieme)
4. estremi superiori ed estremi inferiori (def. punto)

