Università degli Studi di Napoli Federico II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

DERIVATE

Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

DERIVATE: DEFINIZIONI E NOTAZIONI

Sia f una funzione definita nel dominio D avente frontiera F e sia x_0 **un elemento di $\boldsymbol{D}$ non appartenente ad $\boldsymbol{F}$**. Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x}$$

ad esso si da il nome di *derivata* della funzione f nel punto x_0.

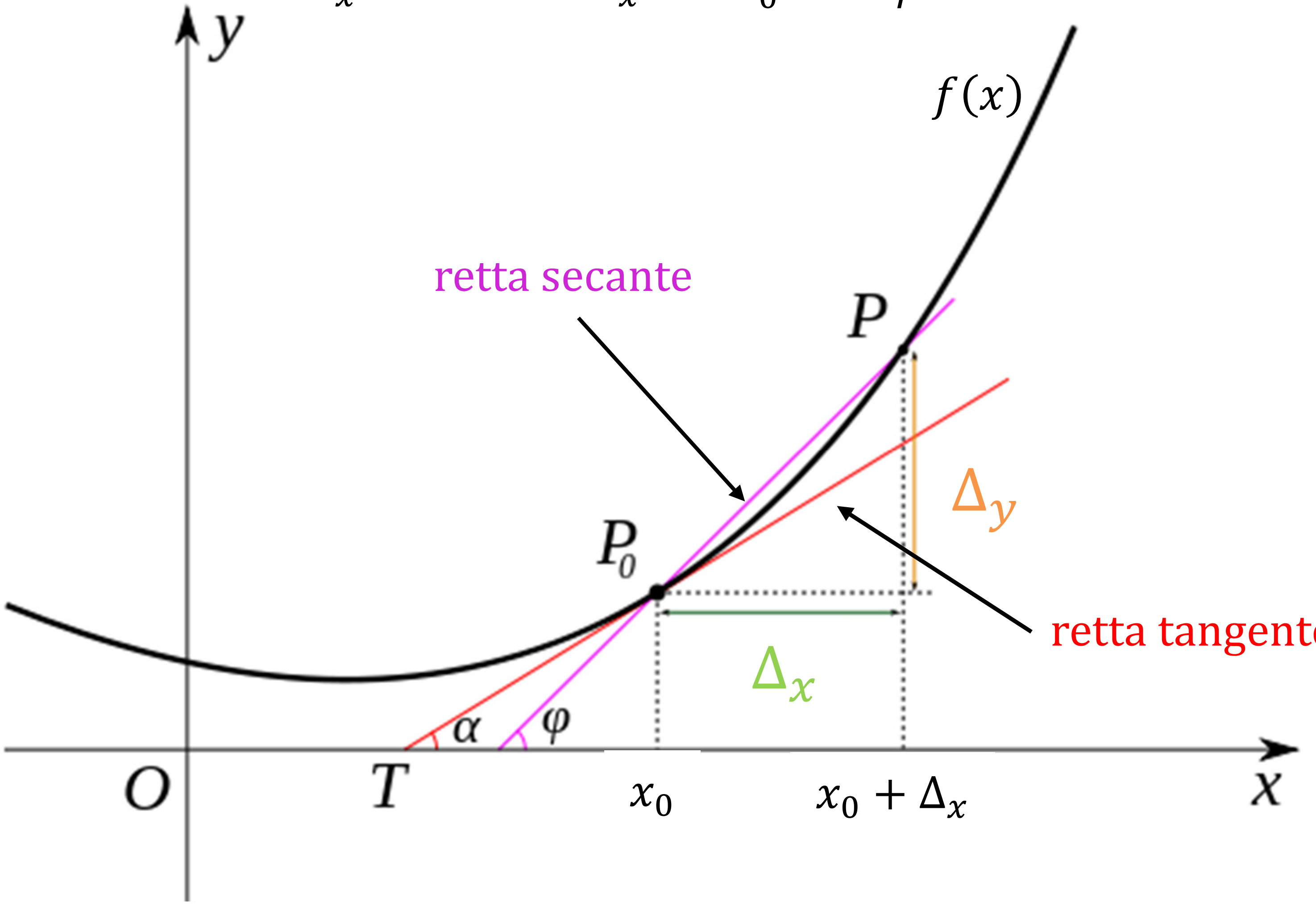
Se la derivata di f esiste in un sottoinsieme $A \subseteq D/F$ allora si dice che la funzione f possiede la derivata nell'insieme A.

TEOREMA

Se f è una funzione derivabile nell'intervallo (a, b) allora essa è ivi anche continua.

DERIVATE: DEFINIZIONI E NOTAZIONI

$$\frac{f(x_0+\Delta_x)-f(x_0)}{\Delta_x}=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{\overline{PP_0}\cdot\sin\varphi}{\overline{PP_0}\cdot\cos\varphi}=\tan\varphi=m_s$$



Si consiglia di eseguire l'applet "Die Ableitung als Grenzwert" alla pagina:
http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html

DERIVATE: DEFINIZIONI E NOTAZIONI

Si osservi che la funzione di cui si calcola il limite ha per variabile indipendente Δ_x e che il limite deve essere inteso sia per $\Delta_x \to 0^+$ e sia per $\Delta_x \to 0^-$.

Un esempio, a questo riguardo, è fornito dalla funzione

$$f(x) = |x|,$$

che come si è già stato mostrato ha per dominio l'insieme $\mathbb{R}$ la cui frontiera è l'insieme vuoto. Risulta:

$$\lim_{\Delta_x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta_x) - f(0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0^+} \frac{|0+\Delta_x| - |0|}{\Delta_x}$$

$$= \lim_{\Delta_x \to 0^+} \frac{|\Delta_x|}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0^+} \frac{\Delta_x}{\Delta_x} = 1.$$

DERIVATE: DEFINIZIONI E NOTAZIONI

D'altra parte, risulta:

$$\lim_{\Delta_x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta_x) - f(0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0^-} \frac{|0+\Delta_x| - |0|}{\Delta_x}$$

$$= \lim_{\Delta_x \to 0^-} \frac{|\Delta_x|}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0^-} \frac{-\Delta_x}{\Delta_x}$$

$$= -1.$$

Se ne conclude che in $x = 0$ il limite destro del rapporto incrementale è diverso dal limite sinistro è pertanto la funzione $f(x) = |x|$ non ammette ivi (in $x = 0$) la derivata.

DERIVATE: DEFINIZIONI E NOTAZIONI

Per indicare la derivata della funzione $f(x)$ in x_0 si usa il simbolo:

$$f'(x_0).$$

Come già detto nella diapositiva 1, se la derivata della funzione f esiste in un sottoinsieme $A \subseteq D/F$ allora si dice che f ammette la derivata nell'insieme A; essa si indica con la scrittura:

$$f'(x), \text{ per } x \in A.$$

Per indicare l'operazione di derivata è anche conveniente utilizzare il simbolo:

$$D_x[f(x)].$$

DERIVATE: RISULTATI

Sussistono i seguenti risultati.

TEOREMA 1
Laddove esistente, la derivata della somma (della differenza) di due funzioni è uguale alla somma delle derivate:

$$D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)].$$

TEOREMA 2
Laddove esistente, la derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla somma delle funzioni che si ottengono moltiplicando uno dei fattori per la derivata dell'altro:

$$D_x[f(x)g(x)] = g(x)D_x[f(x)] + f(x)D_x[g(x)].$$

DERIVATE: FUNZIONE COSTANTE

Con $b \in \mathbb{R}$ assegnato, si consideri la funzione costante:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = b.$$

Per qualunque x_0 reale, si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{b - b}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{b - b}{\Delta_x} = 0.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione $f(x) = b$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_x(b) = 0.$$

<u>In altri termini la derivata di una costante è ovunque nulla</u>.

DERIVATE: FUNZIONE COSTANTE

Applicando il Teorema 2 (che fornisce la derivata di un prodotto) con la funzione f uguale alla costante b, si ricava che:

$$D_x[bg(x)] = g(x)D_x(b) + bD_x[g(x)] = bD_x\,[g(x)]$$

Il risultato appena ottenuto consente di affermare che *la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione*.

In altri termini, si può anche dire che è lecito portare il fattore costante fuori dal segno di derivata.

DERIVATE: FUNZIONE LINEARE

Si consideri la funzione lineare con $a = 1$ e $b = 0$, ovvero

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x.$$

Per qualunque x_0 reale si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta_x) - x_0}{\Delta_x}$$

$$= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_x}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} 1 = 1.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione $f(x) = x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(x) = 1.$$

DERIVATE: FUNZIONE LINEARE

Più in generale, applicando

il Teorema 1 (la derivata di una somma)

e

il fatto che una costante si può portare fuori dal segno di derivata,

si ha, che la derivata della generica funzione lineare vale:

$$D_x(ax+b) = D_x(ax) + D_x(b) = aD_x(x) + D_x(b)$$
$$= a \cdot 1 + 0 = a.$$

In definitiva,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(ax+b) = a.$$

In altri termini la derivata di una funzione lineare è uguale al coefficiente del termine in x.

DERIVATE: FUNZIONE QUADRATICA

Si consideri la funzione quadratica monica (a =1):

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Per qualunque x_0 reale si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta_x)-f(x_0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{(x_0+\Delta_x)^2-(x_0)^2}{\Delta_x}$$

$$= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{(x_0)^2+2x_0\Delta_x+(\Delta_x)^2-(x_0)^2}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{2x_0\Delta_x}{\Delta_x} + \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{(\Delta_x)^2}{\Delta_x}$$

$$= 2x_0 + \lim_{\Delta_x \to 0} \Delta_x = 2x_0.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione x^2:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(x^2) = 2x.$$

DERIVATE: FUNZIONE QUADRATICA

Applicando

il Teorema 1 (la derivata di una somma)

e

il fatto che una costante si può portare fuori dal segno di derivata,

si ha, più in generale, che la derivata della più generale funzione quadratica vale:

$$\begin{aligned} D_x(ax^2+bx+c) &= aD_x(x^2)+bD_x(x)+D_x(c) \\ &= a\cdot 2x+b\cdot 1+0 \\ &= 2ax+b. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(ax^2+bx+c) = 2ax+b.$$

DERIVATE: FUNZIONE POTENZA AD ESPONENTE INTERO POSITIVO

Con $n \in \mathbb{Z}^+$ fissato, si consideri la funzione potenza ad esponente intero positivo:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^n.$$

Applicando un procedimento analogo a quello della funzione quadratica monica, si riesce a dimostrare che, per qualunque x_0 reale si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = n\, x_0^{n-1}.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione x^n:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(x^n) = n x^{n-1}.$$

DERIVATE: FUNZIONE POLINOMIALE

Più in generale, tenendo conto del Teorema 1, della derivata della funzione potenza ad esponente intero positivo e del fatto che una costante può essere portata fuori dal segno di derivata, risulta:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{e } \forall x \in \mathbb{R},\ D_x(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Ad illustrazione della formula precedente si forniscono i seguenti esempi:

- $D_x(x^3 - 2x - 4) = 3x^2 - 2;$
- $D_x(5x^4 - 2x^3 + x - 4) = 20x^3 - 6x^2 + 1;$
- $D_x(6x^6 - 2x^4 + 5x^2 - 8) = 36x^5 - 8x^3 + 10x.$

DERIVATE: FUNZIONE POTENZA AD ESPONENTE INTERO NEGATIVO

Con $n \in \mathbb{Z}^+$, si consideri la funzione potenza ad esponente intero negativo:

$$\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}, \qquad f(x) = x^{-n}.$$

Sebbene con maggiore difficoltà, si riesce a dimostrare che, per qualunque x_0 reale non nullo si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = -n x_0^{-(n+1)}.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione x^{-n}:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}, \qquad D_x(x^{-n}) = -n x^{-(n+1)}.$$

DERIVATE: FUNZIONE POTENZA AD ESPONENTE INTERO NEGATIVO

Ad illustrazione della formula precedente, con $x \neq 0$, si forniscono i seguenti esempi:

- $D_x\left(\frac{1}{x}\right) = D_x(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;
- $D_x\left(\frac{1}{x^2}\right) = D_x(x^{-2}) = -2x^{-3} = -2\frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$;
- $D_x\left(\frac{1}{x^3}\right) = D_x(x^{-3}) = -3x^{-4} = -3\frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}$;
- $D_x\left(\frac{1}{x^4}\right) = D_x(x^{-4}) = -4x^{-5} = -4\frac{1}{x^5} = -\frac{4}{x^5}$.

Si osservi che è stato escluso il caso $n = 0$: infatti per qualunque x reale risulta $x^0 = 1$ e la derivata di una costante è stata già considerata.

DERIVATE: FUNZIONE RADICE QUADRATA

Si consideri ora la funzione

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x},$$

e sia $x_0 \in]0, +\infty[$.

Si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta_x} - \sqrt{x_0}}{\Delta_x}.$$

Si osservi che per il punto 0, che è punto di frontiera al finito del dominio di f, il rapporto incrementale non può essere considerato.

DERIVATE: FUNZIONE RADICE QUADRATA

D'altra parte, con $\Delta_x \neq 0$, risulta:

$$\frac{\sqrt{x_0+\Delta_x}-\sqrt{x_0}}{\Delta_x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta_x}-\sqrt{x_0}}{\Delta_x}\cdot\frac{\sqrt{x_0+\Delta_x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+\Delta_x}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\frac{x_0+\Delta_x-x_0}{\Delta_x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta_x}+\sqrt{x_0}}$$

$$=\frac{\Delta_x}{\Delta_x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta_x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta_x}+\sqrt{x_0}}.$$

In definitiva,

$$\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{\sqrt{x_0+\Delta_x}-\sqrt{x_0}}{\Delta_x}=\lim_{\Delta_x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta_x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

DERIVATE: FUNZIONE RADICE QUADRATA

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione $\sqrt{x}$:

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \qquad D_x(\sqrt{x}\,) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

DERIVATE: FUNZIONE POTENZA A ESPONENTE REALE

Con α numero reale assegnato si consideri la funzione potenza ad esponente reale:

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \qquad f(x) = x^{\alpha}.$$

Sebbene con maggiore difficoltà, si riesce a dimostrare che, per qualunque $x_0 > 0$ risulta:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \alpha\, x_0^{\alpha - 1}.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione x^{α}:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \,]0, +\infty[, \qquad D_x(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

DERIVATE: FUNZIONE POTENZA A ESPONENTE REALE

Ad illustrazione della formula precedente, si forniscono i seguenti esempi: per $x \neq 0$

- $D_x\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = D_x\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}};$

- $D_x\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$

- $D_x(x^{1,5}) = 1,5x^{(1,5-1)} = \frac{3}{2}x^{0,5} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x};$

- $D_x\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{(\sqrt{2}-1)}.$

DERIVATE: FUNZIONE RADICE

Con $n \in \mathbb{Z}^+$ fissato si consideri la funzione radice:

$$\forall x \in [0, +\infty[, \; f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Tenendo conto che $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, il risultato relativo alla derivata della funzione potenza ad esponente reale applicato con $\alpha = 1/n$, per qualunque $x_0 > 0$, fornisce:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \frac{1}{n}(x_0)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x_0^{-\frac{n-1}{n}}.$$

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione $\sqrt[n]{x}$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } \forall x \in]0, +\infty[, \qquad D_x(\sqrt[n]{x}\,) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

DERIVATE: FUNZIONE ESPONENZIALE

Si consideri la funzione esponenziale avente per base il numero di Nepero:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

per qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta_x} - e^{x_0}}{\Delta_x}$$

$$= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{e^{x_0} e^{\Delta_x} - e^{x_0}}{\Delta_x} = e^{x_0} \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{e^{\Delta_x} - 1}{\Delta_x} = e^{x_0}.$$

DERIVATE: FUNZIONE ESPONENZIALE

Se ne deduce il seguente risultato per la derivata della funzione e^x:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(e^x) = e^x.$$

Più in generale, è abbastanza agevole dimostrare che si ha:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+/\{1\} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_x(a^x) = a^x \cdot \ln a\,.$$