UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

FUNZIONI COMPOSTE

Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Si consideri la funzione $\operatorname{sen} t$. Si è visto che essa è periodica con periodo pari a 2π, ovvero che:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t\,.$$

Ci si chiede ora se è possibile avere una funzione periodica con periodo unitario. La risposta è affermativa: basta considerare la funzione

$$g(t) = \operatorname{sen}(2\pi t).$$

Difatti, si ha:

$$\begin{aligned} g(t+1) &= \operatorname{sen}[2\pi(t+1)] \\ &= \operatorname{sen}(2\pi t + 2\pi) \\ &= \operatorname{sen} 2\pi t = g(t)\,. \end{aligned}$$

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Si ha di più che si possono avere funzioni con periodo $P > 0$ qualsiasi.

Infatti, considerata la funzione

$$h(t) = \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{P}\right),$$

si ha:

$$\begin{aligned} h(t+P) &= \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t+P}{P}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{P} + \frac{2\pi P}{P}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{P} + 2\pi\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{P}\right) = h(t). \end{aligned}$$

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Osservazione importante

Il periodo di una funzione periodica ha le stesse dimensioni della variabile indipendente; nel caso delle onde che trasmettono il segnale radiofonico il periodo è l'intervallo di tempo dopo il quale essa si ripete e pertanto nel Sistema Internazionale si misura in secondi.

Per sapere quante volte l'onda radio si ripete in un secondo basterà prendere il reciproco del periodo e tale quantità rappresenta la *frequenza* del segnale radio:

$$\omega = \frac{1}{P} > 0.$$

Nel Sistema Internazionale la frequenza si misura in hertz (Hz = 1/s).

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

In definitiva la funzione

$$\omega = \frac{1}{P}$$

$$f(t) = A \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{t}{P}\right) = A\operatorname{sen}(2\pi\omega t),$$

è una funzione periodica con ampiezza $A > 0$ e frequenza $\omega > 0$.

A questo punto, tenendo anche conto <u>del ruolo dei prefissi</u> nel Sistema Internazionale, la frase

La Rai, per ragioni di carattere tecnico e allo scopo di giungere con i suoi servizi anche ad aree fino ad oggi poco curate, nel 1950 decise di trasmettere i programmi radiofonici <u>con trasmettitori a modulazione di frequenza nella gamma fra 88 e 108 MHz.</u>

dovrebbe essere di facile interpretazione.

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Si osservi con attenzione il percorso per ottenere il valore della funzione

$$f(t) = A\text{sen}(2\pi\omega t)\,.$$

1) All'argomento t deve essere applicata la <u>funzione lineare</u> con coefficiente angolare $2\pi\omega$ e intercetta nulla,

2) al risultato ottenuto, ossia $2\pi\omega t$, deve essere applicata la <u>funzione seno</u>,

3) il risulto ottenuto, ossia $\text{sen}(2\pi\omega t)$, è <u>moltiplicato</u> per A.

Quindi, indicata con f_1 la funzione lineare e con f_2 la funzione seno, risulta

$$h(t) = A \cdot f_2[f_1(t)]\,.$$

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Si fornisce ora un ulteriore esempio.

Il sistema di distribuzione dell'energia elettrica prevede il suo trasferimento da una centrale di produzione a delle centraline di distribuzione e quindi alle singole utenze.

Nell'ultimo passaggio, dalla centralina si dipartono quattro cavi dei quali tre sono chiamati "fasi" e l'altro è detto "neutro". Il neutro serve a chiudere un circuito elettrico e quindi è indispensabile per un qualsiasi utilizzo.

Le tre fasi servono a due scopi. Il primo è quello di alimentare un "motore trifase" utilizzato nelle officine meccaniche oppure negli impianti di elevazione (ascensori). Il secondo è quello di distribuire in maniera più uniforme il carico tra le civili abitazioni.

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Così, in un condominio, al misuratore dell'appartamento numero 1 entra il neutro e una fase, a quello del numero 2 entra il neutro e un'altra fase e quello del numero 3 entra il neutro e l'ultima fase disponibile. Dopo ciò lo schema si ripete con gli appartamenti aventi numero 4, 5 e 6 e cosi via.

Bisogna ora capire il significato di fase.

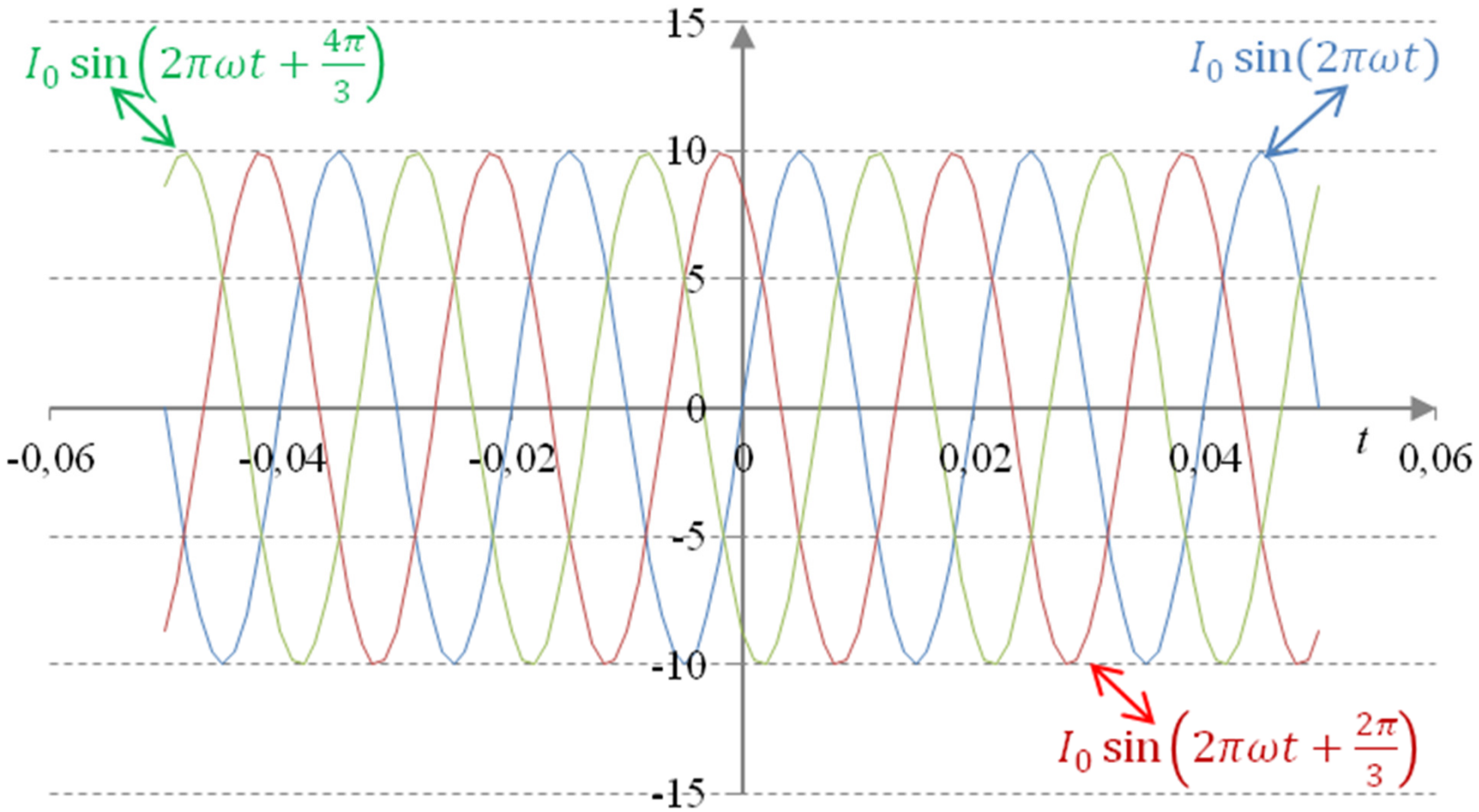
La corrente elettrica (alternata) "viaggia" in ciascun cavo di rame come un'onda sinusoidale:

$$i(t) = I_0 \sin(2\pi\omega t + \varphi).$$

ampiezza frequenza fase

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Nella funzione $i(t) = I_0 \sin(2\pi\omega t + \varphi)$, la fase φ assume uno dei seguenti tre valori: $0, \frac{2}{3}\pi = 120°, \frac{4}{3}\pi = 240°$.



FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Quindi le tre onde sono del tutto uguali tra di loro in ampiezza e frequenza e risultano semplicemente <u>sfalsate o sfasate</u> di

$$\frac{2}{3}\pi = 120°,$$

cosa che in effetti corrisponde all'avere diviso l'angolo giro ($2\pi = 360°$) in tre parti uguali.

FUNZIONI COMPOSTE: INTRODUZIONE

Si osservi con attenzione il percorso per ottenere il valore della funzione:

$$i(t) = I_0 \operatorname{sen}(2\pi\omega t + \varphi).$$

1) All'argomento t deve essere applicata la <u>funzione lineare</u> con coefficiente angolare $2\pi\omega$ e intercetta φ,
2) al risultato ottenuto, ossia $2\pi\omega t + \varphi$, deve essere applicata la <u>funzione seno</u>,
3) il risulto ottenuto, ossia $\operatorname{sen}(2\pi\omega t + \varphi)$, è <u>moltiplicato</u> per I_0.

Quindi, indicata con f_1 la funzione lineare e con f_2 la funzione seno, risulta

$$i(t) = I_0 \cdot f_2[f_1(t)].$$

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Nulla vieta che si può utilizzare il procedimento prima descritto componendo un numero di funzioni maggiore di due.

Ad esempio, indicata con f_1 la prima funzione da applicare (quella più interna), con f_2 la seconda funzione e con f_3 la terza funzione da applicare (quella più esterna), la funzione composta si scrive:

$$f(t) = f_3\{f_2[f_1(t)]\}.$$

Per le funzioni *composte con funzioni elementari* (nel seguito solo composte) vale il seguente risultato: <u>esse sono continue all'interno del proprio dominio</u>.

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Inoltre per le funzioni composte valgono tutte le proprietà dei limiti delle funzioni ottenute mediante le operazioni.

L'unica difficoltà scaturisce nel determinare il dominio e la frontiera della funzione composta in esame.

Per semplicità si preferisce illustrare l'argomento con alcuni esempi.

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Si consideri, con $\omega > 0$, la funzione composta

$$h(t) = \sin(2\pi\omega t).$$

<u>Non ci sono limitazioni sia per la funzione lineare che per la funzione seno</u>. Il dominio è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e la frontiera è l'insieme $\{-\infty, +\infty\}$.

Inoltre, per $t \to -\infty$ si ha che $2\pi\omega t \to -\infty$ e, dal fatto che la funzione seno nell'intorno di $-\infty$ oscilla, si ha che $\lim_{t\to-\infty} h(t)$ <u>non esiste</u>.

Infine, per $t \to +\infty$ si ha che $2\pi\omega t \to +\infty$ e, dal fatto che la funzione seno nell'intorno di $+\infty$ oscilla, si ha che $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ <u>non esiste</u>.

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Si consideri la funzione composta

$$i(t) = I_0 \sin(2\pi\omega t + \varphi).$$

<u>Non ci sono limitazioni sia per la funzione lineare che per la funzione seno</u>. Il dominio è l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e la frontiera è l'insieme $\{-\infty, +\infty\}$.

Inoltre, per $t \to -\infty$ si ha che $2\pi\omega t \to -\infty$ e, dal fatto che la funzione seno nell'intorno di $-\infty$ oscilla, si ha che $\lim_{t\to-\infty} i(t)$ <u>non esiste</u>.

Infine, per $t \to +\infty$ si ha che $2\pi\omega t + \varphi \to +\infty$ e, dal fatto che la funzione nell'intorno di $+\infty$ seno oscilla, si ha che $\lim_{t\to+\infty} i(t)$ <u>non esiste</u>.

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

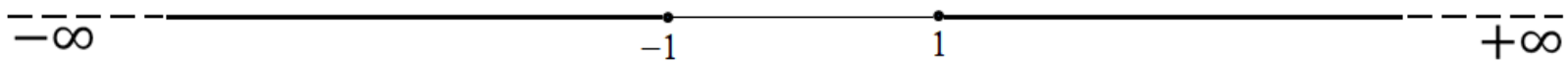
Si consideri la funzione composta

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

- Per il polinomio di secondo grado $x^2 - 1$ <u>non ci sono limitazioni</u>.
- Per la radice quadrata l'argomento <u>deve essere non negativo</u>.

Il dominio della funzione è allora l'insieme S delle soluzioni della disequazione $x^2 - 1 \geq 0$. Risulta,

$$\mathrm{D} \equiv S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$



e la frontiera è l'insieme

$$\mathrm{F} = \{-\infty, -1, 1, +\infty\}.$$

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Si ha che,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \sqrt{x^2-1} = 0 \equiv f(-1)$$

e

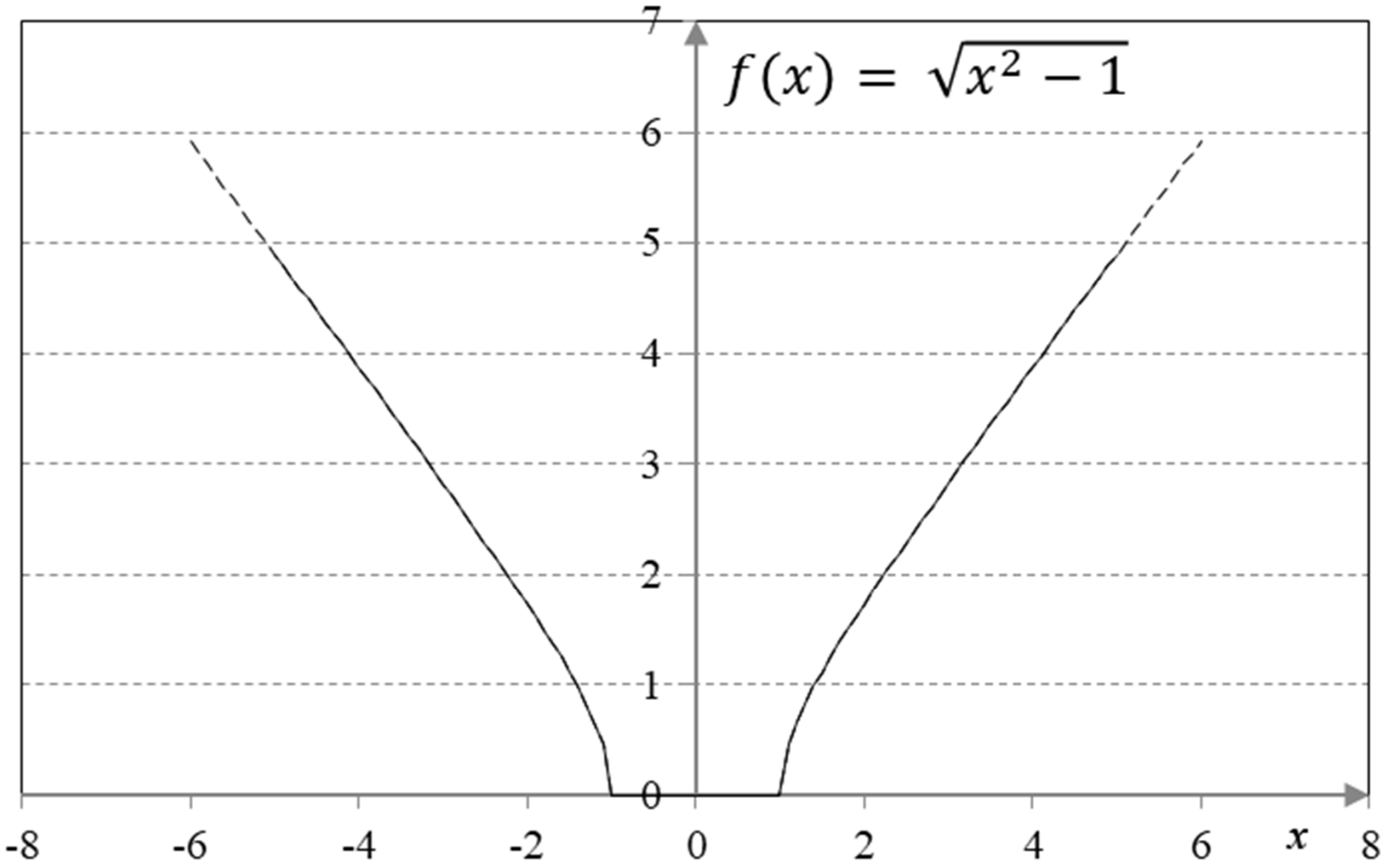
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1} = 0 \equiv f(1).$$

Inoltre, per $x \to -\infty$ si ha che $(x^2-1) \to +\infty$ e, dal fatto che la funzione radice nell'intorno di $+\infty$ tende a $+\infty$, risulta $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$.

Infine, per $x \to +\infty$ si ha che $(x^2-1) \to +\infty$ e, dal fatto che la funzione radice nell'intorno di $+\infty$ tende a $+\infty$, risulta $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Segue il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.



FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Si consideri la funzione composta

$$g(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}.$$

Per determinarne il dominio si osservi che:

- per il polinomio di secondo grado $x^2 - 1$ (funzione più interna) non ci sono limitazioni;
- per la radice quadrata l'argomento deve essere non negativo:

$$x^2 - 1 \geq 0;$$

- per il logaritmo (funzione più esterna) l'argomento deve essere positivo:

$$\sqrt{x^2 - 1} > 0.$$

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

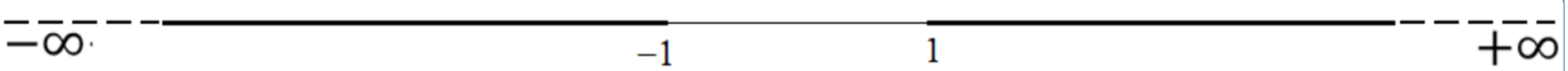
Ne risulta quindi

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0,$$

il cui insieme delle soluzioni S è il dominio D della funzione composta $g(x)$.

Per quanto già visto nell'esempio precedente,

$$D \equiv S =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$



e la frontiera è costituita dall'insieme:

$$F = \{-\infty, -1, +1 + \infty\}.$$

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Si ha,

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} \ln\sqrt{x^2-1} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\sqrt{x^2-1} = -\infty\ .$$

Inoltre, per $x \to -\infty$ si ha che $(x^2-1) \to +\infty$; dal fatto che la funzione radice nell'intorno di $+\infty$ tende a $+\infty$, si ha che $\sqrt{x^2-1} \to +\infty$ e infine anche il logaritmo tende a $+\infty$ quando il suo argomento tende a $+\infty$.

In definitiva:

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln\sqrt{x^2-1} = +\infty.$$

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

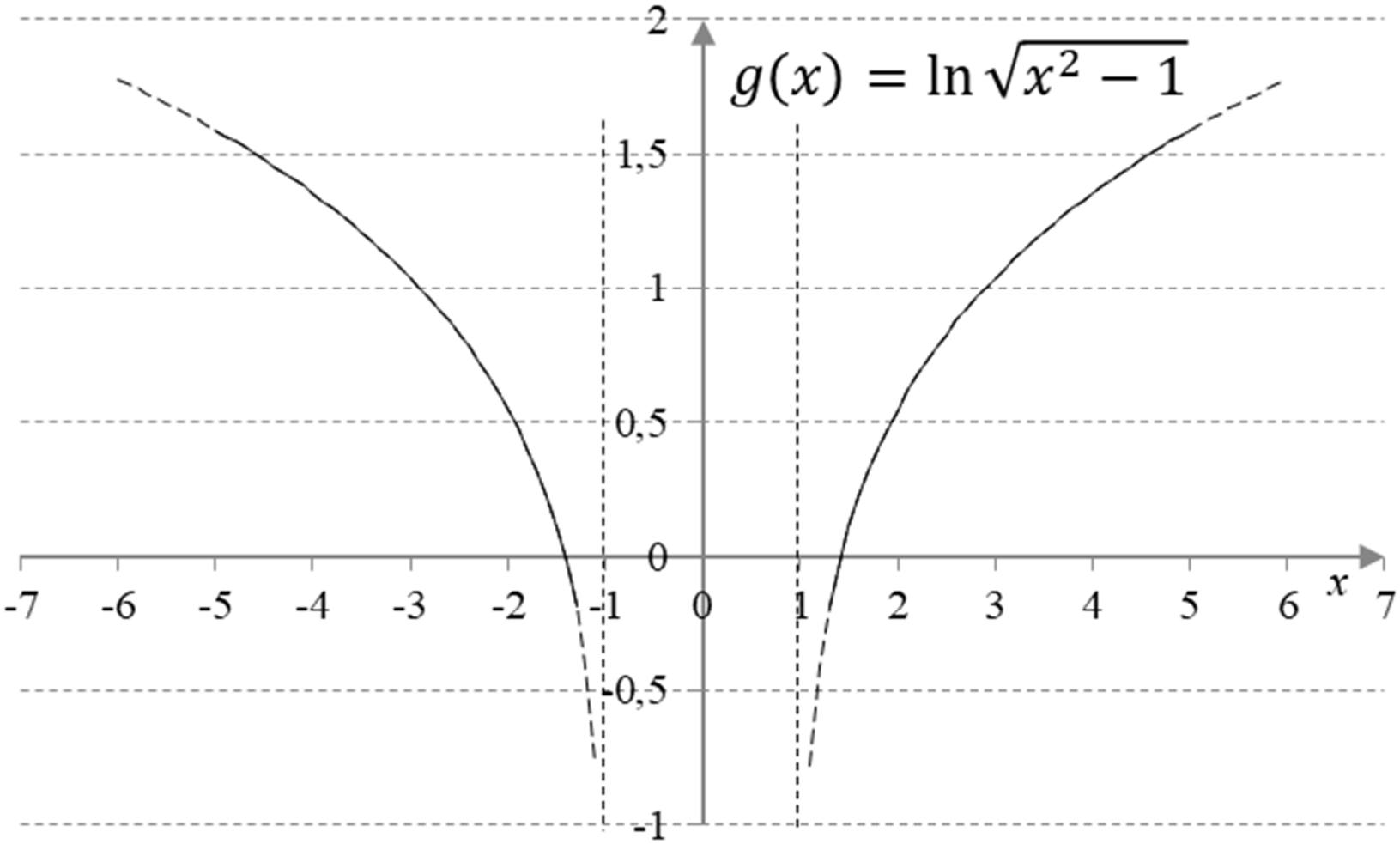
Per ultimo, per $x \to +\infty$ si ha che $(x^2 - 1) \to +\infty$; dal fatto che la funzione radice nell'intorno di $+\infty$ tende a $+\infty$, si ha che $\sqrt{x^2 - 1} \to +\infty$ e infine anche il logaritmo tende a $+\infty$ quando il suo argomento tende a $+\infty$.

In definitiva:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln \sqrt{x^2 - 1} = +\infty.$$

<u>Osservazione importante</u>

Per eseguire correttamente i ragionamenti come quello di sopra e gli altri delle diapositive precedenti è necessario, almeno all'inizio, consultare la tavola riassuntiva delle funzioni elementari.

FUNZIONI COMPOSTE: DEFINIZIONE ED ESEMPI

Segue il grafico della funzione $g(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$.