



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI

Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: INTRODUZIONE

Le funzioni elementari costituiscono i mattoncini per mezzo dei quali si possono costruire le numerose funzioni che si presentano nelle scienze naturali (scienze della terra e scienze della vita) e in quelle applicate (agraria, biotecnologie, scienze forestali, zootecnica, ecc.).

Una maniera semplice per ottenere funzioni a partire dalle funzioni elementari è quella che prevede l'utilizzo delle operazioni definite sui numeri reali.

In effetti, il valore assunto da una funzione è un numero reale e quindi la nuova funzione viene definita, per opportuni valori del suo argomento, semplicemente utilizzando le operazioni di addizione, di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione su due funzioni elementari che fungono da operandi.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: DEFINIZIONI

Precisamente, siano f_1 e f_2 due funzioni elementari con dominio, rispettivamente, D_1 e D_2 .

Posto $D = D_1 \cap D_2$, è possibile considerare le seguenti funzioni:

▷ $f = f_1 + f_2$ nel senso che:

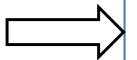
$$\forall x \in D, f(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

▷ $g = f_1 - f_2$ nel senso che:

$$\forall x \in D, g(x) = f_1(x) - f_2(x);$$

▷ $h = f_1 \cdot f_2$ nel senso che:

$$\forall x \in D, h(x) = f_1(x)f_2(x).$$



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: DEFINIZIONI

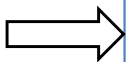
Una precisazione è necessaria per l'operazione di divisione in quanto per essa il secondo operando deve essere non nullo:

▷ $k = \frac{f_1}{f_2}$ nel senso che:

$$\forall x \in D \text{ e } f_2(x) \neq 0, k(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Ne risulta la seguente regola.

Il dominio della somma, della differenza e del prodotto è dato dall'intersezione dei domini delle due funzioni che fungono da operandi. Per la divisione bisogna escludere da tale intersezione i numeri reali che annullano il secondo operando.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: DEFINIZIONI

Con le notazioni precedenti, l'elencazione di alcuni frequenti casi particolari completa questa esposizione.

a) L'opposto di una funzione:

$$f_1 = 0 \implies g = -f_2.$$

b) Il reciproco di una funzione:

$$f_1 = 1 \implies k = \frac{1}{f_2}.$$

c) La somma di una funzione con una costante:

$$f_2 = c \in \mathbb{R} \implies f = f_1 + c.$$

d) Il prodotto di una costante per una funzione:

$$f_1 = c \in \mathbb{R} \implies h = cf_2.$$

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: RISULTATI

Per tali funzioni sussistono i seguenti risultati:

- 1) Il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti.
- 2) Il limite di una differenza è uguale alla differenza dei limiti.
- 3) Il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti (un fattore si può portare fuori dal segno di limite).
- 4) Il limite di un rapporto è uguale al rapporto dei limiti.

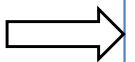
Nel caso 2) ci si può imbattere nella forma indeterminata $\infty - \infty$ mentre nel caso 4) ci si può imbattere in una delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ESEMPI

La funzione $\sin t$ riveste un ruolo molto importante per descrivere quantità che oscillano periodicamente rispetto al tempo t .

A questa classe appartengono, ad esempio, le *onde radio*. Per le onde radio una caratteristica particolarmente importante è l'*ampiezza*: la metà della massima variazione della funzione in un periodo.

Le apparecchiature radio di tipo analogico hanno un opportuno circuito elettrico (costituito da un moltiplicatore e da un sommatore) che una volta regolato con apposite manopole consentiva la sintonia con le stazioni emittenti che trasmettevano in *modulazione di ampiezza*.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ESEMPI

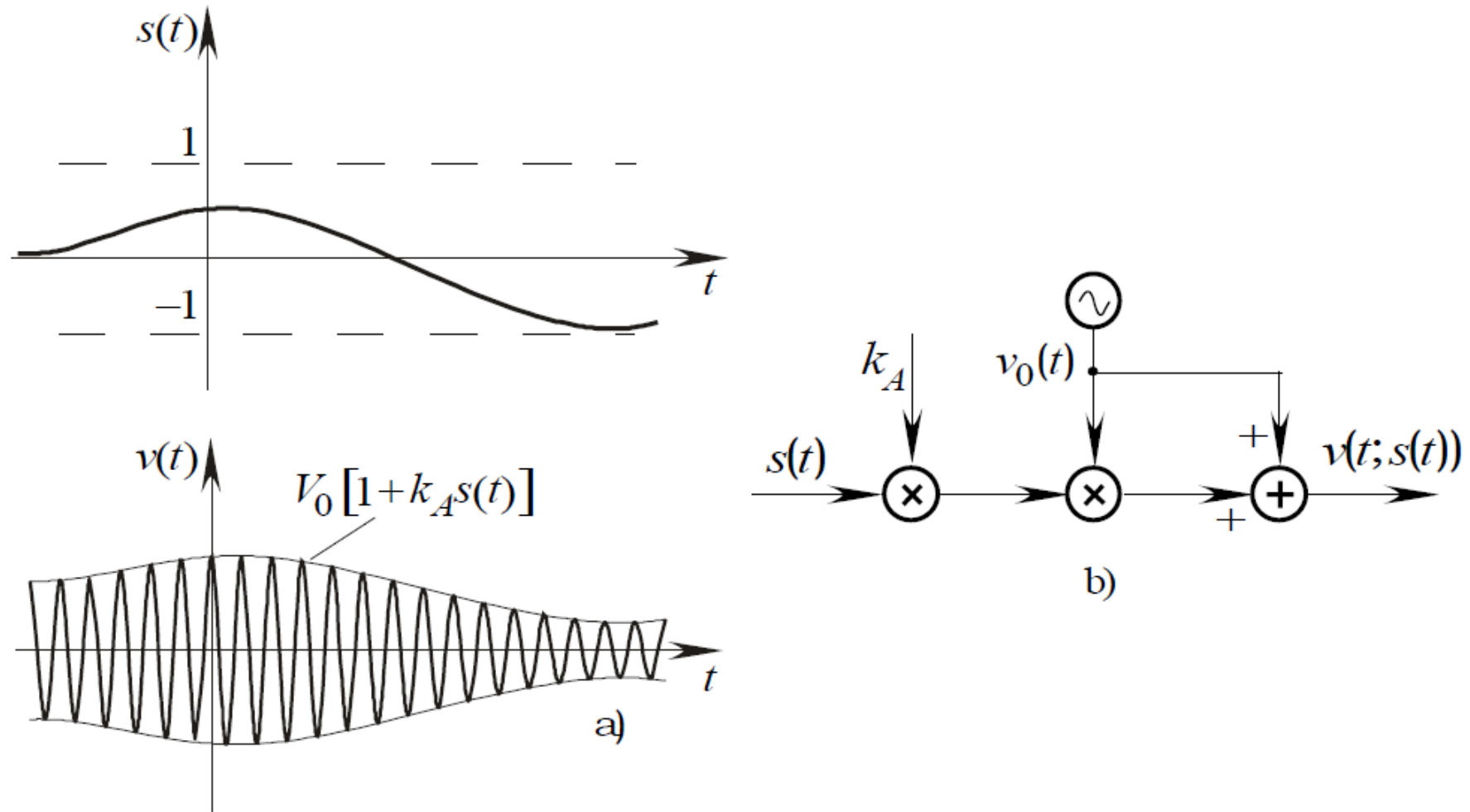
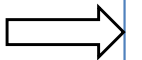


Fig. 1.2 - a) Segnale modulato AM; b) Schema di modulatore AM.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ESEMPI

In termini più semplici, l'onda corrispondente ad una stazione radio aveva assegnata una particolare ampiezza k_A e la sintonia consisteva nell'intercettare l'onda con tale ampiezza.

Dal punto di vista matematico rappresentare una funzione periodica con ampiezza $k_A > 0$ arbitraria è molto facile: basta prendere una funzione periodica con ampiezza unitaria, ad esempio $\sin t$ e moltiplicarla per la costante k_A :

$$h(t) = k_A \sin t .$$

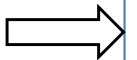
Il dominio della funzione seno è l'insieme dei numeri reali che quindi è anche il dominio della funzione $h(t)$.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ESEMPI

La funzione e^t riveste un ruolo molto importante per descrivere la crescita di una popolazione al variare del tempo t .

La legge $N(t) = e^t$, detta *malthusiana*, è valida in condizioni di assenza di vincoli esterni; in altri termini essa è accettabile quando non c'è competizione tra gli individui, le risorse a disposizione non vengono mai a scarseggiare, ecc.

In effetti, dal momento che $N(0) = e^0 = 1$, la funzione considerata esprime il numero degli individui presenti al tempo t che sono stati generati da un unico individuo al tempo iniziale delle osservazioni.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ESEMPI

Per ottenere l'analogia legge riferita al caso di N_0 individui al tempo $t = 0$ basterà allora moltiplicare la precedente funzione esponenziale per N_0 :

$$M(t) = N_0 e^t.$$

Il dominio della funzione esponenziale è l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali che quindi è anche il dominio della funzione $M(t)$.

D'altra parte, nello specifico contesto le osservazioni (i conteggi del numero degli individui) iniziano al tempo $t = 0$ e questo ci abilita ad escludere dal dominio di $M(t)$ la semiretta dei reali negativi.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: FUNZIONI POLINOMIALI

Si considerino una funzione lineare $f_1(x) = ax + b$ e la funzione quadratica *monica* (ossia con $a = 1$) $f_2(x) = x^2$.

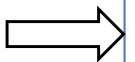
Il loro prodotto

$$h(x) = f_1(x)f_2(x) = (ax + b)x^2 = ax^3 + bx^2,$$

definisce una nuova funzione avente come dominio l'insieme \mathbb{R} .

Addizionando a quest'ultima una funzione lineare $f_3(x) = cx + d$ si ottiene, definita in \mathbb{R} , la funzione polinomiale di terzo grado:

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: FUNZIONI POLINOMIALI

In generale, con $m \in \mathbb{N}_0$ e $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ numeri reali arbitrari, la posizione

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

definisce la *funzione polinomiale di grado m* .

Ovviamente, dal momento che i suoi addendi sono definiti per qualsiasi numero reale, il dominio della funzione polinomiale è l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

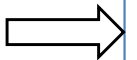
Con $m, n \in \mathbb{N}$ e $P_m(x)$, $P_n(x)$ due funzioni polinomiali ($P_n(x)$ diversa da una costante), la posizione

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)},$$

definisce la più generale *funzione razionale fratta*.

Il dominio delle funzioni $P_m(x)$, $P_n(x)$ è l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali per cui, l'unica limitazione per l'esistenza della funzione f è rappresentata da quei numeri reali che ne annullano il denominatore.

Indicato con S l'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $P_n(x) = 0$, allora il dominio D della funzione f è l'insieme \mathbb{R}/S .



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

L'insieme S costituisce la *parte finita* della frontiera del dominio di f ; un elemento \bar{x} di S è un *asintoto verticale* per il grafico di f se $P_m(\bar{x}) \neq 0$, altrimenti si presenta la *forma indeterminata* $\frac{0}{0}$.

La frontiera F del dominio D della funzione f è costituita anche da $+\infty$ e $-\infty$:

$$F = S \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

In prossimità (*nell'intorno*) di $-\infty$, sia il numeratore P_m che il denominatore P_n tenderanno a crescere in valore assoluto: si dice che si presenta la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Lo stesso accade in prossimità (*nell'intorno*) di $+\infty$.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

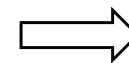
Il rapporto tra la funzione seno e la funzione lineare con coefficiente angolare unitario e intercetta nulla, ovvero la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

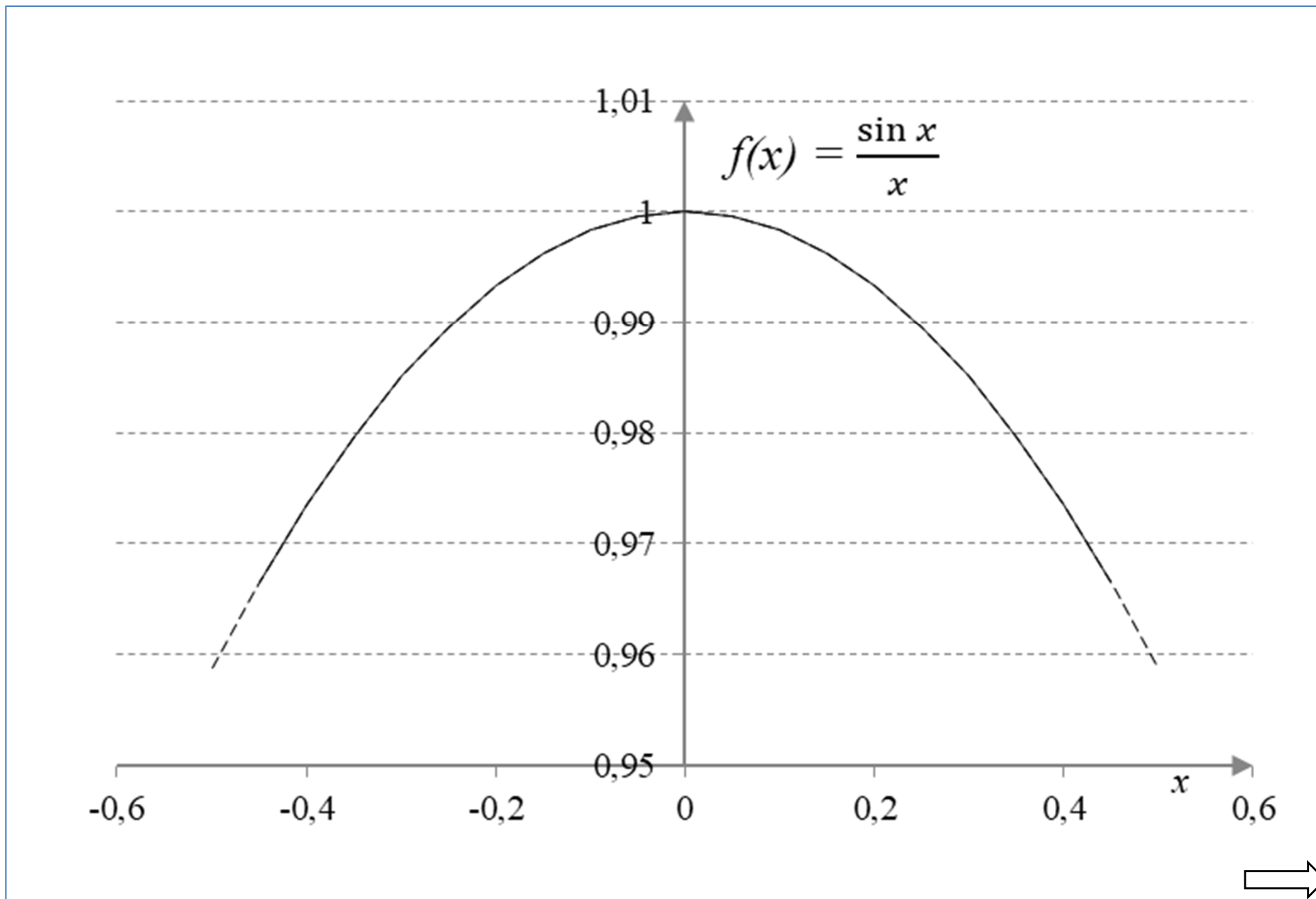
riveste particolare importanza in relazione al comportamento di una funzione in un punto della parte finita della frontiera del dominio. Nel caso in questione vi è un unico siffatto punto, ossia $\bar{x} = 0$, e ivi si presenta la forma indeterminata

$$\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

La figura seguente riporta il grafico di $\frac{\sin x}{x}$, costruito per punti mediante un foglio di calcolo, in prossimità (*nell'intorno*) di $\bar{x} = 0$.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

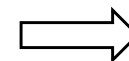
Da esso si evince che, per la funzione $\frac{\sin x}{x}$, sia *nell'intorno sinistro* che in quello *destro* di $\bar{x} = 0$ la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si concretizza nel valore 1 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

oppure in forma abbreviata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Il precedente risultato, la cui dimostrazione si ottiene mediante considerazioni trigonometriche e il teorema del confronto, è riconosciuto come *limite notevole*.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

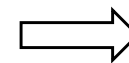
Per quanto riguarda il comportamento della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

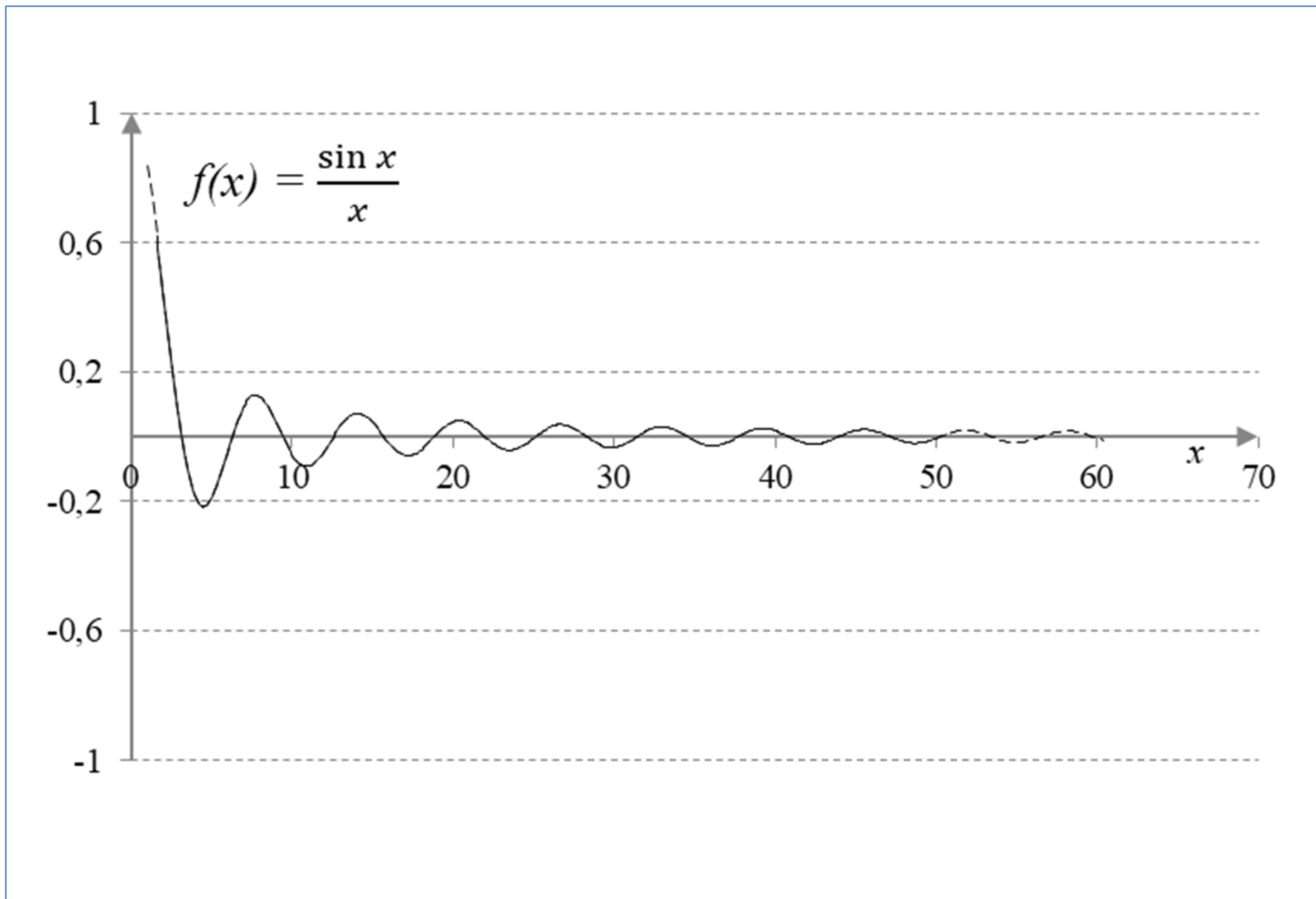
quando x si trova in prossimità (nell'*intorno*) di $+\infty$ e $-\infty$ è facile rendersi conto che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Infatti, al crescere (in modulo) di x , il numeratore oscilla nell'intervallo $[-1,1]$ mentre il denominatore cresce indefinitamente portandone il rapporto a zero. Si veda la diapositiva successiva per una rappresentazione grafica per x grande e positivo.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

Il rapporto tra il complemento a 1 della funzione coseno e la funzione quadratica monica, ovvero la funzione

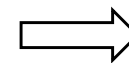
$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

fornisce un altro esempio di limite notevole.

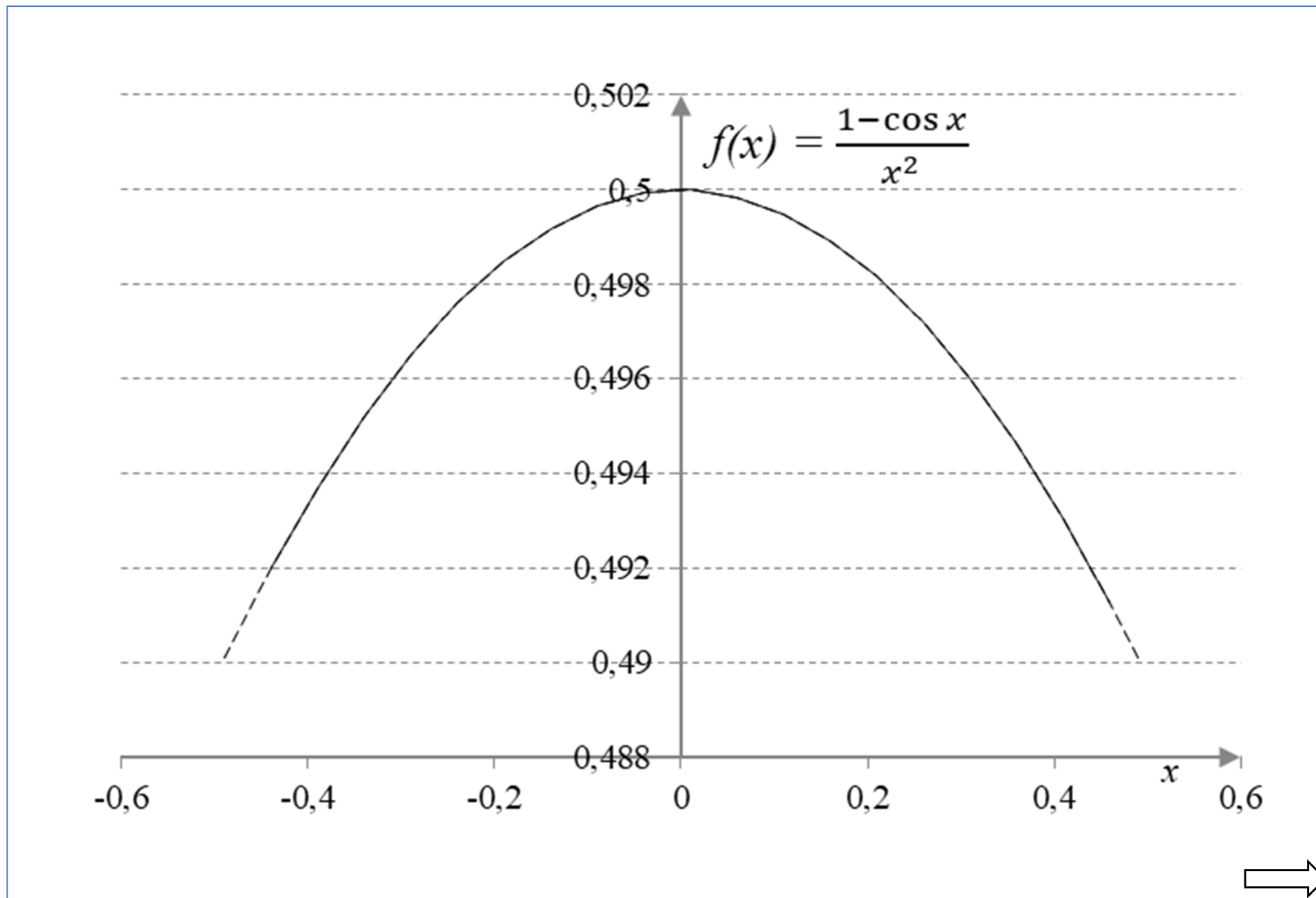
Difatti, la funzione ha il punto $\bar{x} = 0$ come unico punto di frontiera al finito e ivi si presenta la forma indeterminata

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

La figura nella successiva dispositiva riporta il grafico della funzione $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, costruito per punti mediante un foglio di calcolo, *nell'intorno* di $\bar{x} = 0$.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

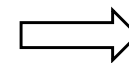
Da esso si evince che sia *nell'intorno sinistro* che in quello *destro* di $x = 0$ la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per la funzione $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ si concretizza nel valore 0,5 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

oppure in forma abbreviata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Nota: la dimostrazione analitica del precedente risultato si ottiene dalla formula di bisezione del seno e dal limite notevole relativo alla funzione $\frac{\sin x}{x}$.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

Per quanto riguarda il comportamento della funzione

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

quando x si trova *nell'intorno* di $+\infty$ e $-\infty$ è facile rendersi conto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0.$$

Infatti, al crescere (in modulo) di x , il numeratore oscilla nell'intervallo $[-1,1]$ mentre il denominatore cresce indefinitamente portandone il rapporto a zero.

OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

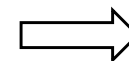
Il rapporto avente per numeratore la differenza della funzione esponenziale con la costante 1 e per denominatore la funzione lineare avente coefficiente angolare unitario e intercetta nulla, ovvero la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x},$$

fornisce un altro esempio di limite notevole.

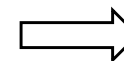
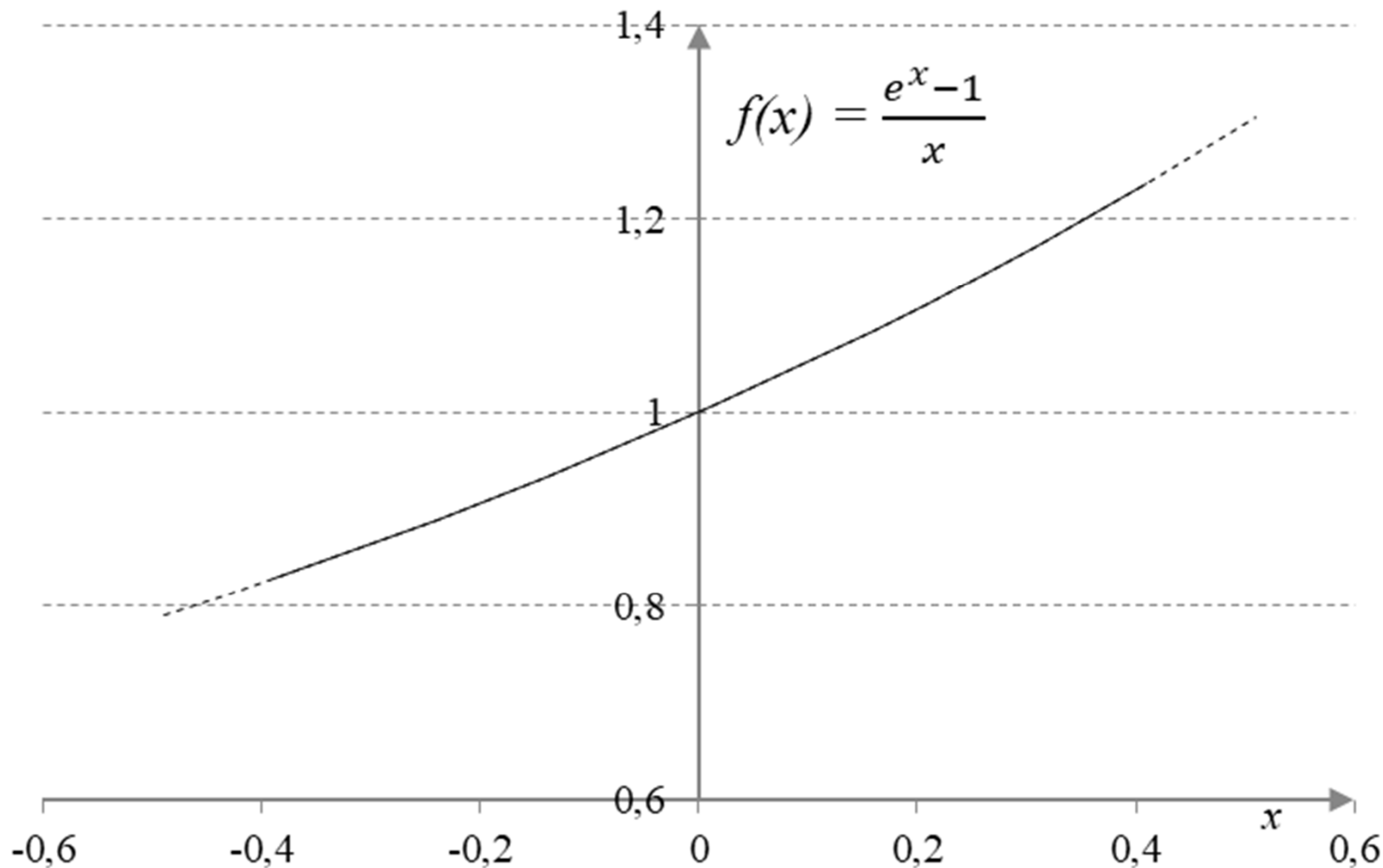
Difatti, la funzione ha il punto $\bar{x} = 0$ come unico punto di frontiera al finito e ivi si presenta la forma indeterminata

$$\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

La figura seguente riporta il grafico di f , costruito per punti mediante un foglio di calcolo, nell'intorno di $\bar{x} = 0$.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

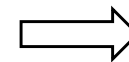
Da esso si evince che sia nell'intorno *sinistro* che in quello *destro* di $x = 0$ la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per la funzione $\frac{e^x - 1}{x}$ si concretizza nel valore 1 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

oppure in forma abbreviata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

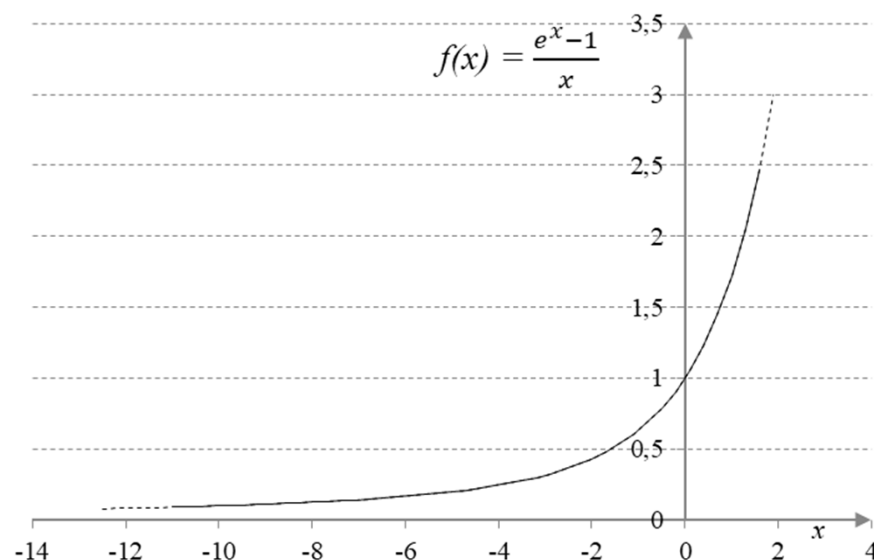
Nota: la dimostrazione analitica del precedente risultato si ottiene mediante un cambiamento di variabile e dalla definizione del numero di Nepero.



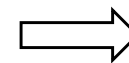
OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

Per quanto riguarda il comportamento della funzione $\frac{e^x - 1}{x}$ quando x si trova nell'*intorno* di $-\infty$ è abbastanza agevole rendersi conto che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0^+.$$



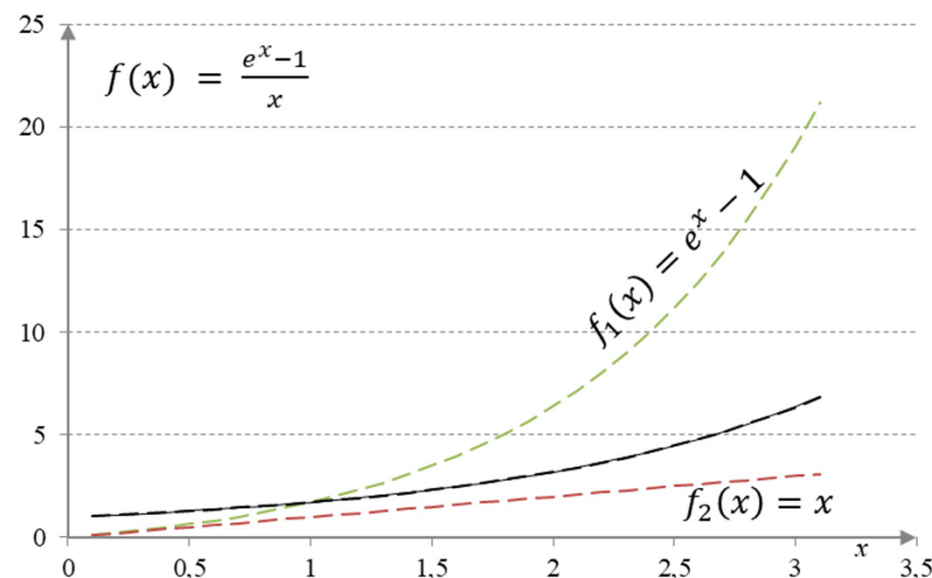
Infatti, al tendere di x verso $-\infty$, la funzione esponenziale tende a 0 e quindi il numeratore tende a -1 . D'altra parte, il denominatore crescendo (in valore assoluto) indefinitamente fa sì che il rapporto, che per ogni x finito è positivo, tenda a zero.



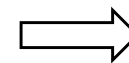
OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

Il comportamento della funzione $\frac{e^x-1}{x}$ quando x si trova nell'*intorno* di $+\infty$ è più articolato: infatti, si presenta la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Con l'aiuto del grafico si riesce a dire che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty.$$



Infatti, al crescere di x verso $+\infty$, sia il numeratore che il denominatore tendono a $+\infty$, ma il rapporto tende a $+\infty$ in quanto l'esponenziale tende a $+\infty$ *più velocemente* rispetto alla funzione lineare.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

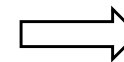
RIEPILOGO LIMITI NOTEVOLI

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \xRightarrow{a > 0} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \xRightarrow{1 \neq a > 0} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: ALTRE FORME INDETERMINATE

ALTRI LIMITI UTILI

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0^+; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1+x)}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

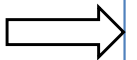
OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: CONTINUITÀ

Le funzioni elementari sono *continue* all'interno dei rispettivi domini. Questa affermazione equivale a dire che, se f è una funzione elementare, D il suo dominio, F la frontiera di D e $x_0 \in D/F$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

In altri termini, per una funzione elementare il valore del limite verso un punto x_0 interno al dominio è uguale al valore che la funzione stessa assume in x_0 .

Per i punti appartenenti alla frontiera del dominio si possono presentare le *forme indeterminate* oppure la funzione tende ad un valore finito, oppure a $+\infty$ oppure a $-\infty$.

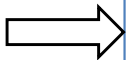


OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: CONTINUITÀ

Si osservi che formalmente la continuità di una funzione in $x_0 \in D/F$ equivale allo scambio del segno di limite con il segno di funzione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0).$$

Le stesse proprietà ed osservazioni sono valide per le funzioni che sono ottenute come operazioni di funzioni elementari.



OPERAZIONI CON LE FUNZIONI: CONTINUITÀ

Esempi

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \cos x = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 5x - 2) &= \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 5x - 2 \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5 \lim_{x \rightarrow 0} x - 2 \\ &= 0 + 0 - 2 = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$