UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

# APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

# *FUNZIONI ELEMENTARI*
(continuazione)

Prof. Aniello Buonocore

*Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"*

*Scuola Politecnica e delle Scienze di Base*

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE RADICE A INDICE PARI

Sia $k \in \mathbb{Z}^+$. La funzione che associa a $x$ il valore

$$f(x) = \sqrt[2k]{x}$$

è detta *funzione radice con indice pari*.

Da un punto di vista operativo, supposto che per il reale $x$ è lecita l'estrazione di radice di indice $2k$ e posto $y = \sqrt[2k]{x}$ , ne consegue che

$$x = y^{2k} = \left(y^k\right)^2 \geq 0.$$

In altri termini l'argomento della funzione radice con indice pari deve essere un reale non negativo. Pertanto il <u>dominio della funzione radice con indice pari è l'insieme</u> $[0, +\infty[$.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE RADICE A INDICE PARI

Assegnato un numero reale $y \geq 0$, l'equazione

$$\sqrt[2k]{x} = y$$

ha una sola soluzione $x = y^{2k}$ se $y \geq 0$ e nessuna soluzione nel caso in cui $y < 0$.

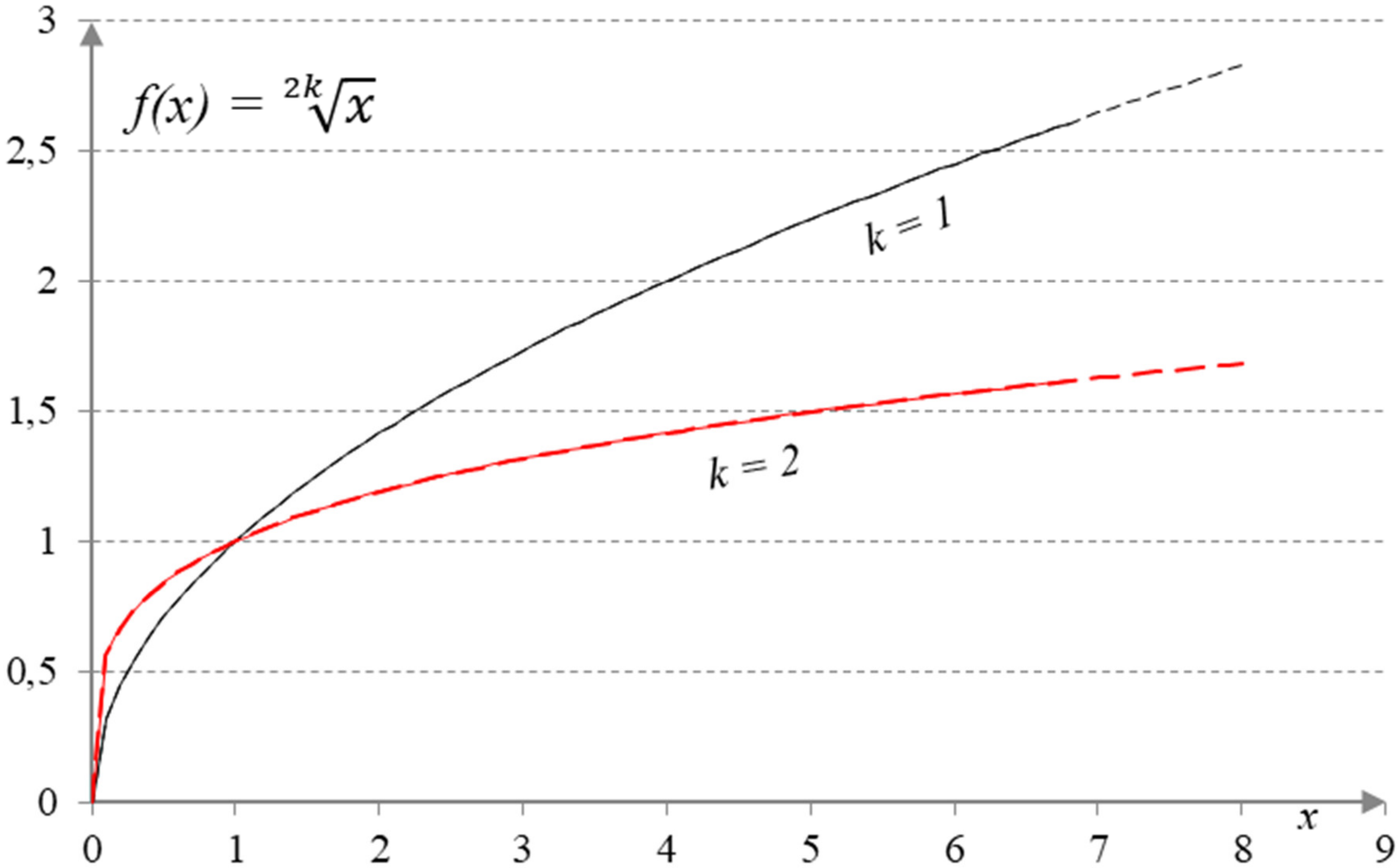
Ciò dimostra che <u>il codominio della funzione radice con indice pari è l'insieme</u> $[0, +\infty[$.

Se ne ricava anche che <u>la funzione radice con indice pari è iniettiva e, quindi, biettiva</u>.

Dal punto di vista qualitativo la funzione radice con indice pari è crescente in tutto il suo dominio.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE RADICE A INDICE PARI

Il grafico della funzione radice con indice 2 ($k = 1$) e 4 ($k = 2$), è riportato nella figura seguente.



# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE RADICE A INDICE DISPARI

Sia $k \in \mathbb{Z}^+$. La funzione che associa a $x$ il valore

$$f(x) = \sqrt[2k-1]{x}$$

è detta *funzione radice con indice dispari*.

Da un punto di vista operativo, l'estrazione di radice di indice è lecita per ogni valore reale. In altri termini l'argomento della funzione radice con indice dispari può essere un reale qualsiasi. Pertanto il <u>dominio della funzione radice con indice dispari è l'insieme</u> $\mathbb{R}$.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE RADICE A INDICE DISPARI

Assegnato un numero reale $y$ l'equazione

$$\sqrt[2k-1]{x} = y$$

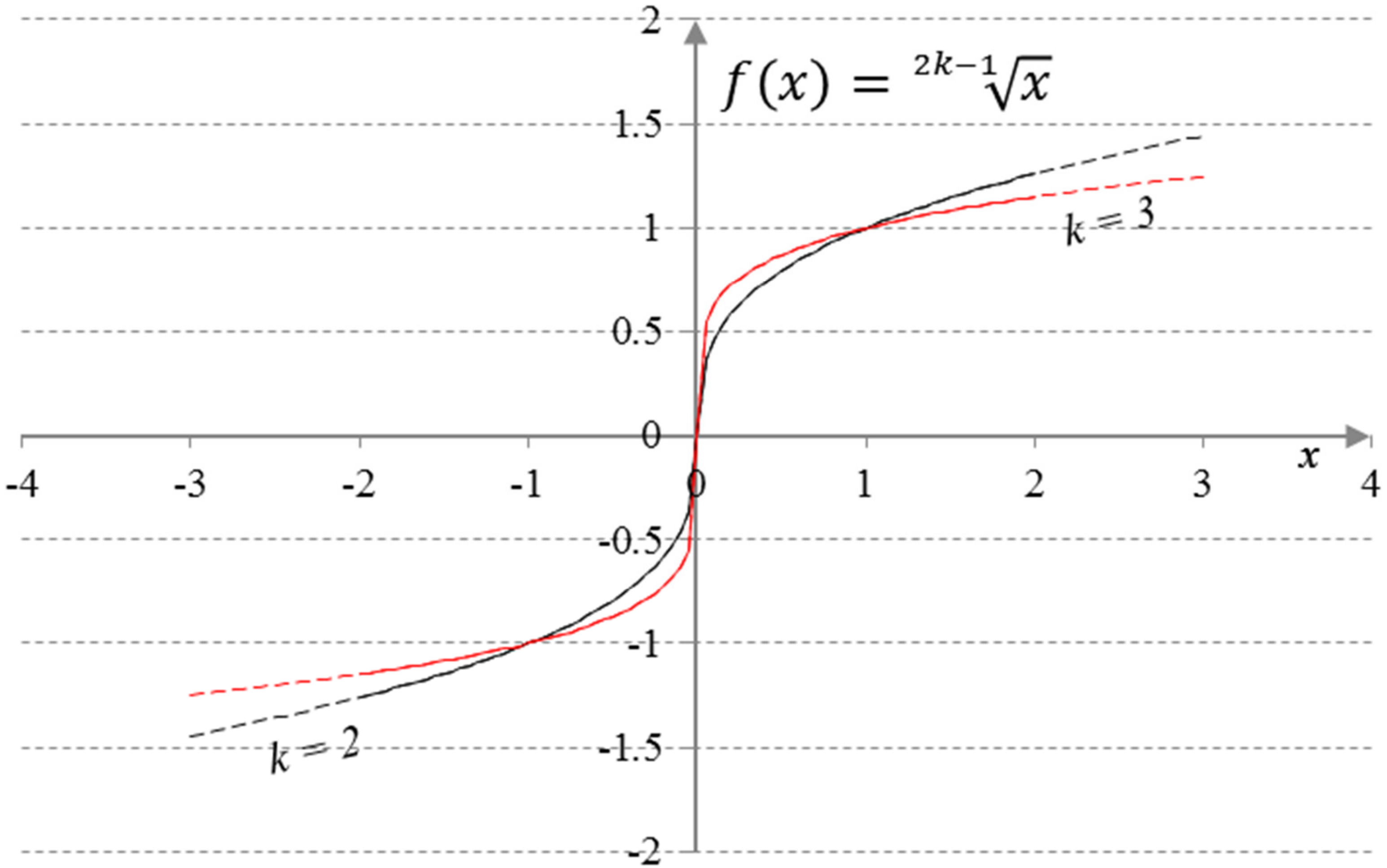
ha la soluzione $x = y^{2k-1}$. Ciò dimostra che <u>il codominio della funzione radice con indice dispari è l'insieme</u> $\mathbb{R}$.

Se ne ricava anche che <u>la funzione radice con indice dispari è iniettiva e, quindi, biettiva</u>.

Dal punto di vista qualitativo la funzione radice con indice dispari è crescente in tutto il suo dominio.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE RADICE A INDICE DISPARI

Il grafico delle funzioni radice con indici 3 ($k = 2$) e 5 ($k = 3$), è riportato nella figura seguente.



# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE CON BASE > 1

Sia $a > 1$ un numero reale. La funzione che associa a $x$ il valore

$$f(x) = a^x$$

è detta *funzione esponenziale*.

Da un punto di vista operativo la funzione esponenziale richiede che, fissato il reale $x$, si determini la potenza di base $a$ ed esponente $x$.

L'unico requisito richiesto dalla corrispondente definizione è il fatto che <u>la base $a$ sia maggiore di zero</u>, nulla richiedendo all'argomento $x$, e pertanto il <u>dominio della funzione esponenziale è l'insieme</u> $\mathbb{R}$.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE CON BASE > 1

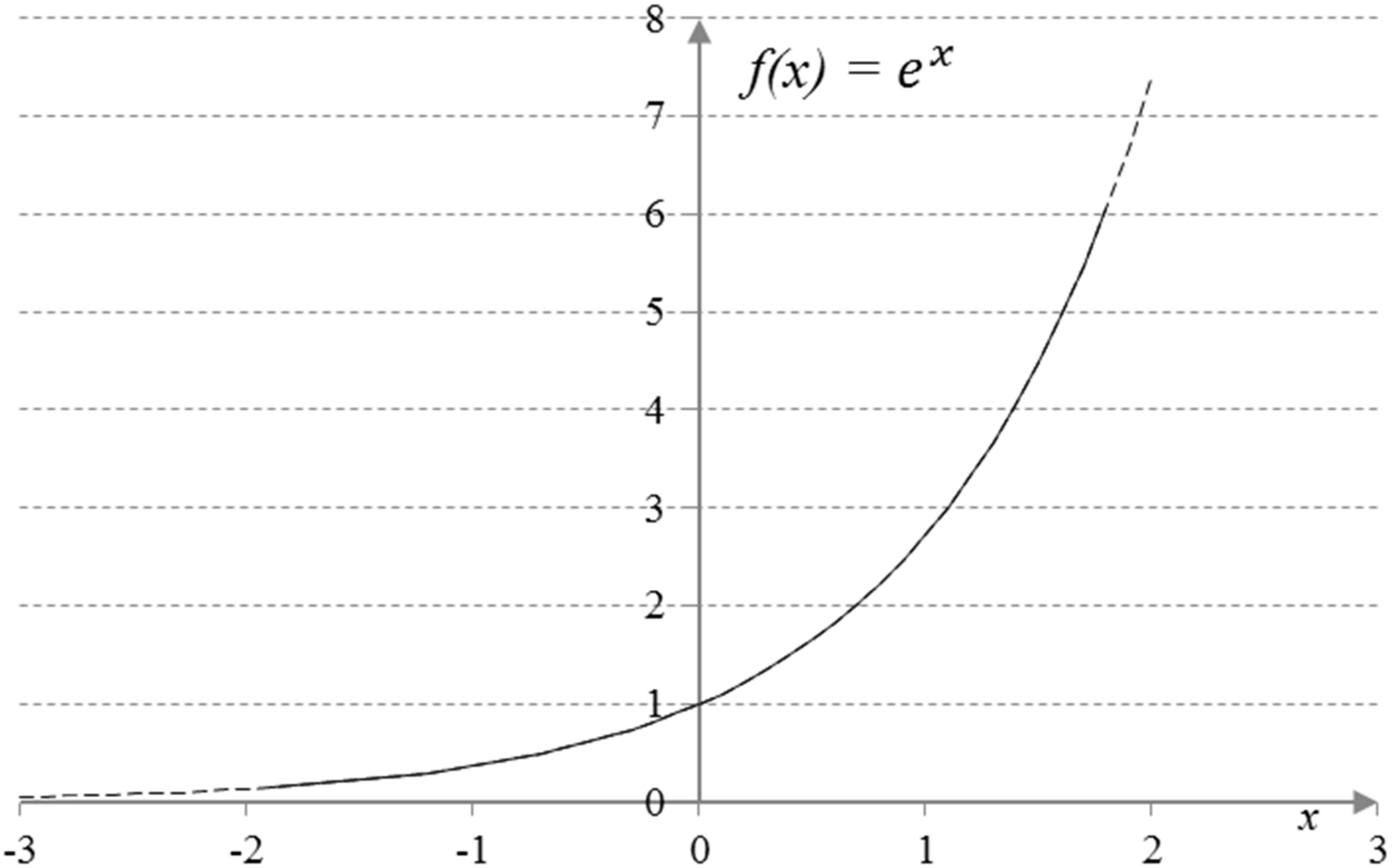
Si osservi che, con $q = \frac{m}{n}$ razionale qualsiasi e $a > 0$, la potenza $a^q$ coincide con $\sqrt[n]{a^m}$ e pertanto $a^q > 0$. Ne discende che, per ogni $x$ reale, $a^x > 0$ in quanto $a^x$ è stato definito utilizzando alcune potenze del tipo $a^q$.

Siano $x_2 > x_1$ sono due numeri reali. Per ogni $n$ naturale, le approssimazioni sulla $n$-ima cifra decimale per difetto di $x_2$ sono maggiori delle approssimazioni per difetto di $x_1$. Dall'essere $a > 1$, se ne evince che $a^{x_2} > a^{x_1}$, ossia che la funzione esponenziale con $a > 1$ è crescente in tutto il suo dominio.

Se ne ricava anche che <u>la funzione esponenziale con $a > 1$ è iniettiva e quindi biettiva</u>.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE CON BASE > 1

Il grafico della funzione esponenziale con base *e*, è riportato nella figura seguente.



# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE CON $0 <$ BASE $< 1$

Sia $0 < a < 1$ un numero reale. La funzione che associa a $x$ il valore

$$f(x) = a^x$$

è detta *funzione esponenziale*.

Da un punto di vista operativo la funzione esponenziale richiede che, fissato il reale $x$, si determini la potenza ad esponente reale di base $a$ ed esponente $x$.

L'unico requisito richiesto dalla corrispondente definizione è il fatto che la base $a$ sia maggiore di zero, nulla richiedendo all'argomento $x$, e pertanto il <u>dominio della funzione esponenziale è l'insieme</u> $\mathbb{R}$.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE CON $0 <$ BASE $< 1$

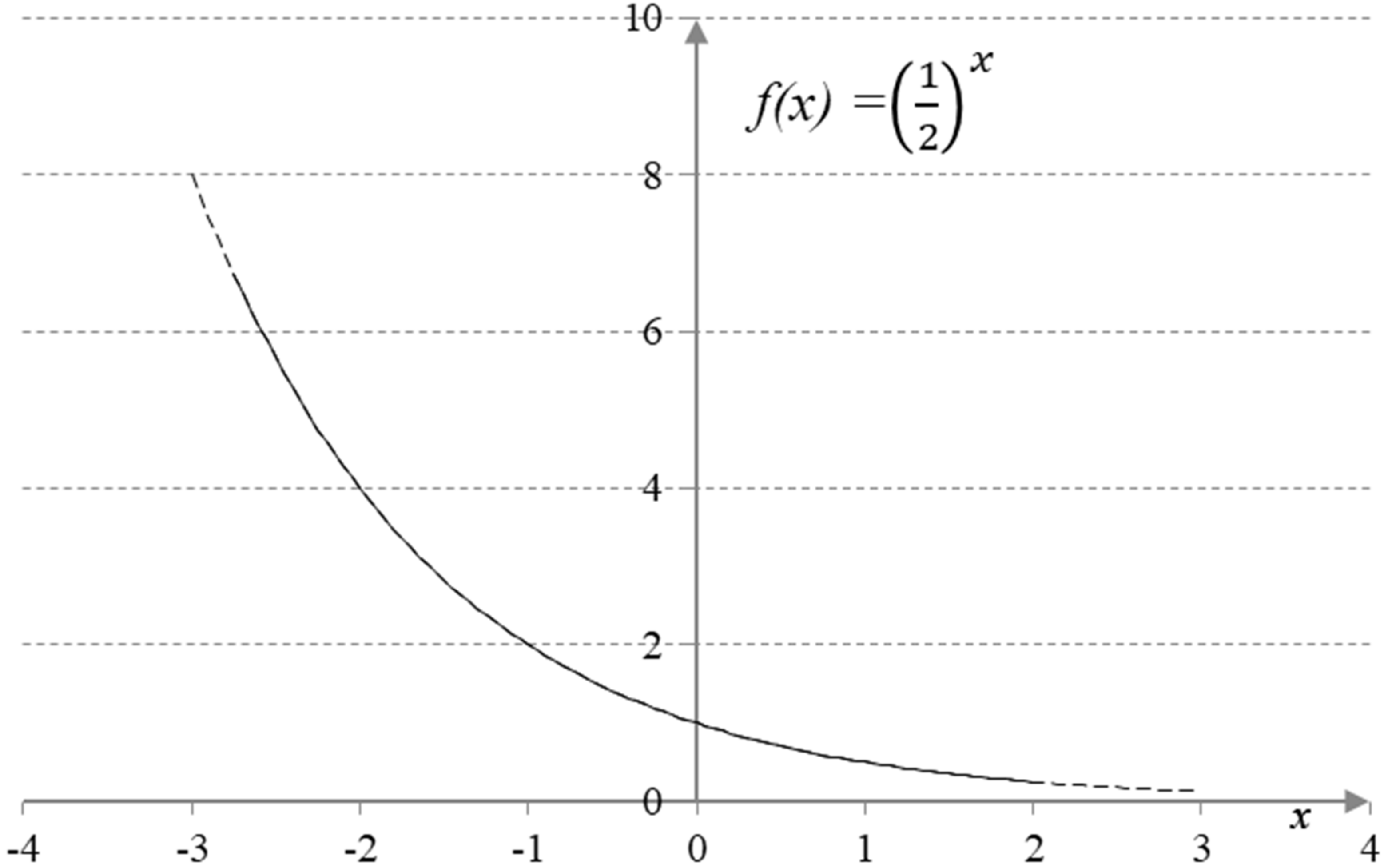
Si osservi che, con $q = \frac{m}{n}$ razionale qualsiasi e $a > 0$, la potenza $a^q$ coincide con $\sqrt[n]{a^m}$ e pertanto $a^q > 0$. Ne discende che, per ogni $x$ reale, $a^x > 0$ in quanto $a^x$ è stato definito utilizzando alcune potenze del tipo $a^q$.

Siano $x_2 > x_1$ sono due numeri reali. Per ogni $n$ naturale, le approssimazioni sulla $n$-ima cifra decimale per difetto di $x_2$ sono maggiori delle approssimazioni per difetto di $x_1$. Dall'essere $0 < a < 1$, se ne evince che $a^{x_2} < a^{x_1}$, ossia che la funzione esponenziale con $0 < a < 1$ è decrescente in tutto il suo dominio.

Se ne ricava anche che <u>la funzione esponenziale con $0 < a < 1$ è iniettiva e quindi biettiva</u>.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE CON $0 <$ BASE $< 1$

Il grafico della funzioni esponenziale con base $\frac{1}{2}$, è riportato nella figura seguente.



# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE LOGARITMO CON BASE $> 1$

Sia $a > 1$ un numero reale. La funzione che associa a $x$ il valore

$$f(x) = \log_a x$$

è detta *funzione logaritmo*.

Da un punto di vista operativo la funzione esponenziale richiede che, fissato il reale $x$, se ne determini il logaritmo in base $a$.

Ma ciò è possibile solo se $x$ è positivo, e pertanto il <u>dominio della funzione esponenziale è l'insieme</u> $]0, +\infty[$.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE LOGARITMO CON BASE $> 1$

Sia $y$ un reale qualsiasi. L'equazione $\log_a x = y$ ammette l'unica soluzione $x = a^y$. Ne discende che il codominio della funzione logaritmo è tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

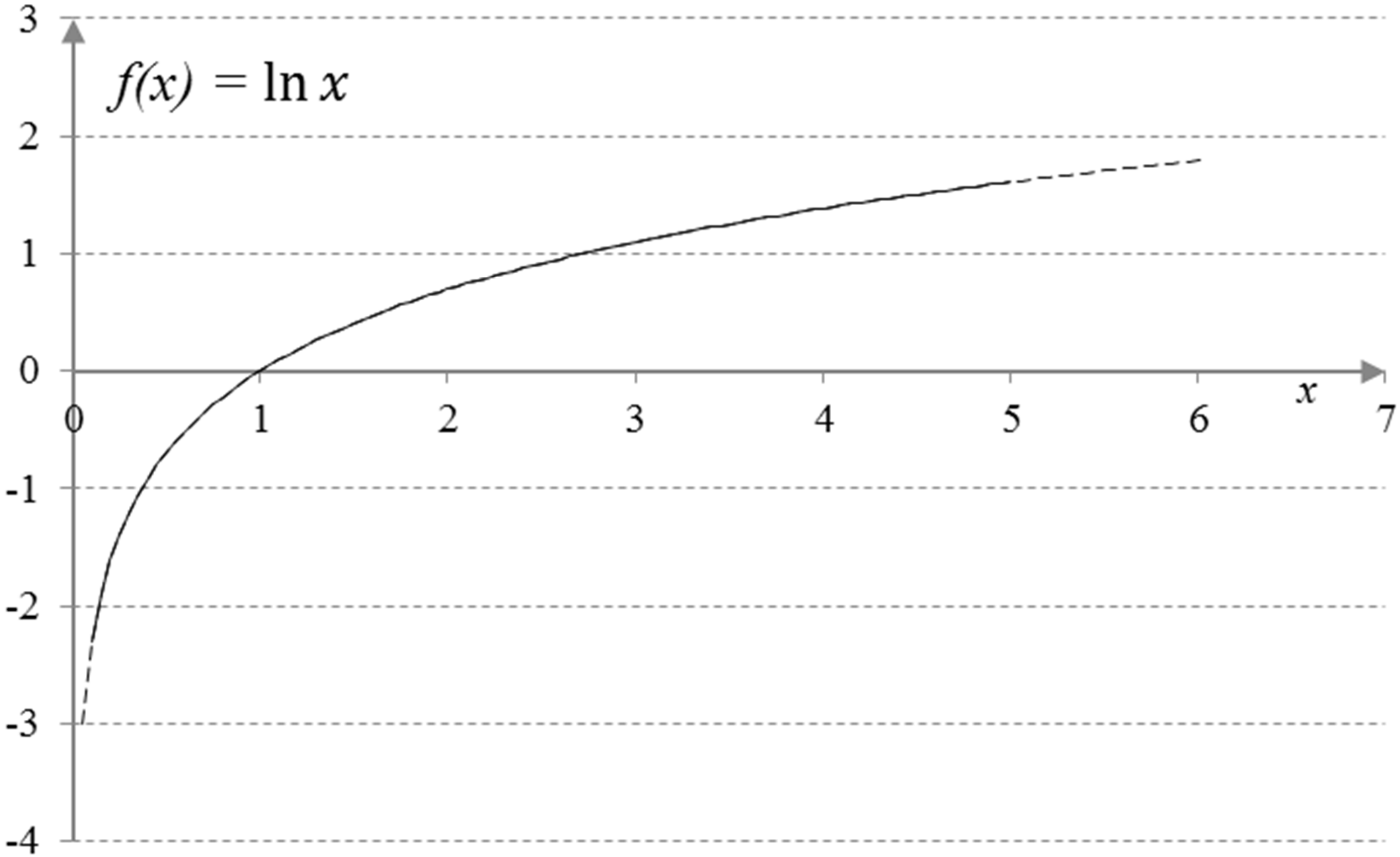
Dal precedente punto discende anche che la funzione logaritmo è iniettiva e quindi biettiva.

Una funzione biettiva è dotata di funzione inversa: la funzione inversa scambia il dominio (codominio) con il codominio (dominio) della funzione diretta e conserva le proprietà di monotonia (crescenza o decrescenza); essa assume come valore la controimmagine della funzione diretta.

Dal punto precedente, si ricava che la funzione logaritmo con $a > 1$ è crescente.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE LOGARITMO CON BASE > 1

Il grafico della funzione logaritmo con base $e$, che è indicata con $\ln x$, è riportato nella figura seguente.



# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE LOGARITMO CON $0 <$ BASE $< 1$

Sia $0 < a < 1$ un numero reale. La funzione che associa a $x$ il valore

$$f(x) = \log_a x$$

è detta *funzione logaritmo*.

Da un punto di vista operativo la funzione esponenziale richiede che, fissato il reale $x$, se ne determini il logaritmo in base $a$.

Ma ciò è possibile solo se $x$ è positivo, e pertanto il <u>dominio della funzione esponenziale è l'insieme</u> $]0, +\infty[$.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE LOGARITMO CON 0 < BASE < 1

Sia y un reale qualsiasi. L'equazione $\log_a x = y$ ammette l'unica soluzione $x = a^y$. Ne discende che il codominio della funzione logaritmo è tutto l'insieme $\mathbb{R}$.

Dal precedente punto discende anche che la funzione logaritmo è iniettiva <u>e quindi biettiva</u>.

Una funzione biettiva è dotata di funzione inversa: la funzione inversa scambia il dominio (codominio) con il codominio (dominio) della funzione diretta e conserva le proprietà di monotonia (crescenza o decrescenza); essa assume come valore la controimmagine della funzione diretta.

Dal punto precedente, si ricava che <u>la funzione logaritmo con $0 < a < 1$ è decrescente</u>.

# FUNZIONI ELEMENTARI: LA FUNZIONE LOGARITMO CON 0 < BASE < 1

Il grafico della funzione logaritmo con base $\frac{1}{2}$, è riportato nella figura seguente.