



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

CALCOLI

Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

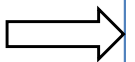
CALCOLI: CONVERSIONI DI UNITÀ DI MISURA

È ben noto che si possono usare diverse unità di misura per esprimere una stessa quantità. Ad esempio, una lunghezza può essere misurata in chilometri, in miglia, in yards oppure in metri, in centimetri, in millimetri.

Se una lunghezza è nota in termini di una certa unità, come possiamo esprimerla mediante una diversa unità?

Tale problema è detto di *conversione* da una unità all'altra e, per risolverlo, occorre in primo luogo conoscere la relazione tra le due unità.

Successivamente si dovrà eseguire una moltiplicazione oppure una divisione.



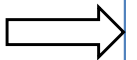
CALCOLI: CONVERSIONI DI UNITÀ DI MISURA

Volendo conoscere il peso in grammi di un oggetto che pesa 2,5 kg, basta osservare che $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ per cui:

$$\begin{aligned} 2,5 \text{ kg} &= 2,5 \cdot (1 \text{ kg}) = 2,5 \cdot (1000 \text{ g}) \\ &= (2,5 \cdot 1000) \text{ g} = 2500 \text{ g}. \end{aligned}$$

Volendo poi conoscere qual è il peso in pounds di un oggetto che pesa 2,5 kg, bisogna consultare le tabelle che mettono in relazione le due diverse unità: kg e pounds. Risulta che 1 kg equivale a 2,2 pounds per cui si avrà, procedendo formalmente come in precedenza:

$$\begin{aligned} 2,5 \text{ kg} &= 2,5 \cdot (1 \text{ kg}) = 2,5 \cdot (2,2 \text{ pounds}) \\ &= (2,5 \cdot 2,2) \text{ pounds} = 5,5 \text{ pounds}. \end{aligned}$$



CALCOLI: CONVERSIONI DI UNITÀ DI MISURA

Altro esempio: qual è la lunghezza in pollici della diagonale di un monitor che misura 50,8 cm? Poiché dalle tabelle di conversione si legge che:

$$1 \text{ pollice} = 2,54 \text{ cm}$$

ovvero

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{2,54} \text{ pollici}$$

si ha:

$$\begin{aligned} 50,8 \text{ cm} &= 50,8 \cdot 1 \text{ cm} = 50,8 \cdot \frac{1}{2,54} \text{ pollici} \\ &= \frac{50,8}{2,54} \text{ pollici} = 20 \text{ pollici.} \end{aligned}$$



CALCOLI: CONVERSIONI DI UNITÀ DI MISURA

Analogamente, in una situazione nella quale è utile convertire da chilometri all'ora a metri al secondo:

$$\begin{aligned} 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} &= 120 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \left(120 \cdot \frac{10}{36} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10 \text{ m}}{3 \cdot 4 \cdot 3 \text{ s}} = \frac{100 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 33, \bar{3} \text{ ms}^{-1}. \end{aligned}$$

Inoltre, volendo convertire da minuti a secondi, si deve considerare la relazione:

$$60 \text{ s} = 1 \text{ min.}$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned} 1,44 \frac{\text{m}}{\text{min}} &= 1,44 \times \frac{1000 \text{ mm}}{60 \text{ s}} = 1,44 \times \frac{100 \text{ mm}}{6 \text{ s}} = \frac{144 \text{ mm}}{6 \text{ s}} \\ &= 24 \text{ mm s}^{-1}. \end{aligned}$$

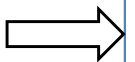
CALCOLI: ANALISI DIMENSIONALE

Al fine di verificare se si sta operando su grandezze omogenee conviene sempre procedere ad un controllo di tipo dimensionale.

Ad esempio, non ha senso addizionare 3,2 g con 1,2 m (grammi con metri). D'altra parte è lecito moltiplicare le due precedenti quantità:

$$(3,2 \text{ g}) \cdot (1,2 \text{ m}) = 3,84 \text{ g}\cdot\text{m}.$$

Una maniera generale ed efficace per eseguire l'analisi dimensionale senza riferirsi a particolari unità di misura è quella di utilizzare dimensioni generiche di lunghezza L , di massa M , di tempo T , e di temperatura C . Di conseguenza un'area avrà dimensione L^2 , un volume dimensione L^3 .



CALCOLI: ANALISI DIMENSIONALE

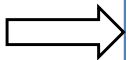
Allo stesso modo una velocità avrà dimensione LT^{-1} e un'accelerazione avrà dimensione LT^{-2} .

Una forza avrà dimensione MLT^{-2} , in quanto corrisponde al prodotto di una massa per una accelerazione e la pressione (che corrisponde a forza per unità di area) ha dimensioni $(MLT^{-2}) L^{-2}$ e semplificando $ML^{-1}T^{-2}$.

Si mostra ora un'applicazione dell'analisi dimensionale alla individuazione della dimensione di un coefficiente che appare in una eguaglianza.

Si consideri la legge dei gas perfetti per quantità di sostanza unitaria

$$p = \frac{RT}{V},$$



CALCOLI: ANALISI DIMENSIONALE

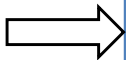
nella quale p è la pressione, V è il volume, T la temperatura in gradi Kelvin di un gas. La questione che interessa è quella di determinare le dimensioni generiche della costante R dei gas.

Poiché la pressione p ha dimensione generica $ML^{-1}T^{-2}$, il volume V ha dimensione generica L^3 , e la temperatura ha dimensione generica C , la costante R avrà dimensione generica che si ricava dall'espressione

$$R = \frac{pV}{T},$$

e cioè

$$\frac{(ML^{-1}T^{-2})(L^3)}{C} = \frac{ML^{-1}T^{-2}L^3}{C} = \frac{MT^{-2}L^2}{C}.$$



CALCOLI: ANALISI DIMENSIONALE

Se in un'espressione appare il rapporto di due quantità aventi la stessa dimensione, ad esempio un'area diviso un'altra area, si ottiene come risultato un numero privo di dimensioni.

Dunque vi sono quantità prive di unità di misura e perciò *adimensionali*.

Ad esempio, la costante di equilibrio per una reazione chimica è il rapporto tra la concentrazione del prodotto e la concentrazione iniziale delle sostanze. Poiché la concentrazione ha le dimensioni di massa per unità di volume, cioè ML^3 , il rapporto di due concentrazioni è adimensionale in quanto

$$\frac{ML^3}{ML^3} = 1.$$

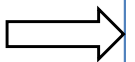
CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

I numeri vengono spesso utilizzati per descrivere la grandezza di quantità di varia natura.

Ad esempio, quando si dice che una strada ha la lunghezza di 1,5 km oppure che la popolazione di una città è di 95 000 abitanti e così via.

Tuttavia non vi saranno esattamente 95 000 persone che vivono in quella città, ne sarà esattamente 1 500 m la lunghezza di quella strada. Occorre interpretare quei numeri come risultati di *arrotondamento*.

Talvolta si arrotonda perché non si conosce esattamente una data quantità, in altri casi perché non occorre un'eccessiva precisione ed è sufficiente un valore approssimato.



CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

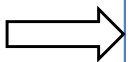
A volte è opportuno arrotondare per *valutare* velocemente il risultato di un calcolo.

Ad esempio, per dare una valutazione del prodotto $3,9 \cdot 7,1$ si può arrotondare 3,9 a 4 e 7,1 a 7 e così dal prodotto 28 dei numeri arrotondati si può ottenere una stima di $3,9 \cdot 7,1$.

Adesso si vuole mostrare come si arrotonda un numero decimale.

Si consideri il numero $a = 1,236$ e supponiamo di voler eseguire operazioni su a in cui intervengono solo due cifre decimali.

Il numero ottenuto da a eliminando la terza cifra decimale, cioè $a' = 1,23$ si chiama valore di a *approssimato per difetto alla seconda cifra decimale (o al centesimo)*.



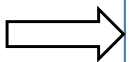
CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

Invece, il numero ottenuto da a aumentandone di una unità la sua seconda cifra decimale, cioè $a'' = 1,24$ si chiama valore di a *approssimato per eccesso alla seconda cifra decimale* (o *al centesimo*).

Si noti che la differenza tra i due valori approssimati (per eccesso e per difetto) è $1/100$:

$$a'' - a' = 1,24 - 1,23 = 0,01 = \frac{1}{100}.$$

Se si rappresentano i numeri $a' = 1,23$, $a = 1,236$ e $a'' = 1,24$ sulla retta cartesiana si ottengono tre punti, che possiamo indicare con P' , P e P'' , rispettivamente.



CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

La distanza tra P e P' vale:

$$\overline{PP'} = |a - a'| = |1,236 - 1,23| = 1,236 - 1,23 = 0,006.$$

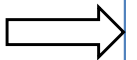
La distanza tra P e P'' vale:

$$\overline{PP''} = |a - a''| = |1,236 - 1,24| = 1,24 - 1,236 = 0,004.$$

Risulta

$$\overline{PP''} < \overline{PP'},$$

e in questo caso si dice che $a'' = 1,24$ è il valore *arrotondato* di $a = 1,236$ alla seconda cifra decimale (oppure, *a meno di un centesimo*).



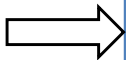
CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

Per il numero decimale $b = 1,235$ avente come corrispondente il punto Q sulla retta cartesiana, risulta

$$\overline{QP'} = \overline{QP''} = 0,05$$

In tal caso si adotta la convenzione che il suo valore arrotondato alla seconda cifra decimale è $a'' = 1,24$.

Dunque la regola per *arrotondare* un numero decimale è la seguente: se la prima cifra che va scartata è 0, 1, 2, 3 o 4, si sceglie il valore approssimato per difetto; se, invece, la prima cifra che va scartata è 5, 6, 7, 8 o 9, allora il valore arrotondato è quello approssimato per eccesso.



CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

Esempi di arrotondamento

▷ Alla parte intera:

$$3,1415926 \rightarrow 3; \quad 2,7182818 \rightarrow 3.$$

▷ Alla prima cifra decimale:

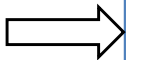
$$3,1415926 \rightarrow 3,1; \quad 2,7182818 \rightarrow 2,7.$$

▷ Alla seconda cifra decimale:

$$3,1415926 \rightarrow 3,14; \quad 2,7182818 \rightarrow 2,72.$$

▷ Alla terza cifra decimale:

$$3,1415926 \rightarrow 3,142; \quad 2,7182818 \rightarrow 2,718.$$



CALCOLI: APPROSSIMAZIONE E ARROTONDAMENTO

Esempi di arrotondamento

▷ Alla quarta cifra decimale:

$$3,1415\mathbf{9}26 \rightarrow 3,1416; \quad 2,7182\mathbf{8}18 \rightarrow 2,7183.$$

▷ Alla quinta cifra decimale:

$$3,1415\mathbf{9}26 \rightarrow 3,14159; \quad 2,7182\mathbf{8}18 \rightarrow 2,71828.$$

▷ Alla sesta cifra decimale:

$$3,1415\mathbf{9}2\mathbf{6} \rightarrow 3,141593; \quad 2,7182\mathbf{8}1\mathbf{8} \rightarrow 2,718282.$$

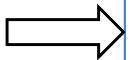
CALCOLI: CIFRE SIGNIFICATIVE

Si supponga di voler prendere misure in un campetto rettangolare di dimensioni 15 metri per 18 metri. Per calcolare la lunghezza d della diagonale si può ricorrere al teorema di Pitagora:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{15^2 + 18^2} \text{ m} = \sqrt{225 + 324} \text{ m} \\ &= \sqrt{549} \text{ m} \cong 23,430749 \text{ m}.\end{aligned}$$

A ben vedere il risultato, un numero con sei cifre decimali ottenuto a partire da due numeri arrotondati al metro, è un po' strano!

Difatti, dal momento che il risultato di un calcolo non può essere più preciso del numero meno accurato su cui si opera, dovremmo dire che la diagonale d misura 23 metri.



CALCOLI: CIFRE SIGNIFICATIVE

In realtà siccome 18 m è il risultato di un'operazione di misura, possiamo pensare che esso è il valore arrotondato al metro della vera lunghezza l del lato del campetto: in altri termini la vera lunghezza, espressa in metri, appartiene all'intervallo $[17,5,18,5[$.

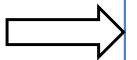
Se con misurazione più accurate si ottenesse

$l = 18,4$ allora si potrà dire che $l \in [18,35,18,45[$,

$l = 18,42$ allora si potrà dire che $l \in [18,415,18,425[$,

$l = 18,428$ allora si potrà dire che $l \in [18,4275,18,4285[$,

rispettivamente.



CALCOLI: CIFRE SIGNIFICATIVE

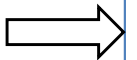
Si noti la differenza nel riportare una misura di lunghezza come $l = 18 \text{ m}$, o $l = 18,0 \text{ m}$, oppure $l = 18,00 \text{ m}$.

Nel primo caso chi ha riportato la misura ci segnala la sua incertezza a valutare la cifra delle unità: la misura è accurata al metro.

Nel secondo caso chi ha riportato la misura ci segnala la sua incertezza a valutare la prima cifra decimale: la misura è accurata al decimo di metro.

Nel terzo caso chi ha riportato la misura ci segnala la sua incertezza a valutare la seconda cifra decimale: la misura è accurata al centesimo di metro.

Si può dire quindi che più cifre decimali vengono riportate da chi effettua la misura è maggiore è l'accuratezza.



CALCOLI: CIFRE SIGNIFICATIVE

Per quantificare l'accuratezza nel riportare una misura si usa il concetto di cifra significativa:

$l = 18 \text{ m}$ ha due cifre significative;

$l = 18,0 \text{ m}$ ha tre cifre significative;

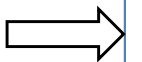
$l = 18,00 \text{ m}$ ha quattro cifre significative.

Si è allora portati ad affermare che tutte le cifre riportate sono cifre significative ma ciò è vero tranne che in un caso particolare: non sono significativi gli zeri che precedono la prima cifra non nulla di un numero decimale. Ad esempio:

$l = 0,1 \text{ m}$ ha una sola cifra significativa;

$l = 0,01 \text{ m}$ ha una sola cifra significativa;

$l = 0,001 \text{ m}$ ha una sola cifra significativa.



CALCOLI: CIFRE SIGNIFICATIVE

Per non incorrere in errori nel determinare le cifre significative di una misura si può passare alla notazione scientifica e contare le cifre del primo fattore.

Ad esempio per le seguenti tre lunghezze esprese in metri

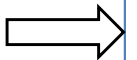
$$l_1 = 0,3 = 3 \cdot 10^{-1},$$

$$l_2 = 0,02 = 2 \cdot 10^{-2},$$

$$l_3 = 0,004 = 4 \cdot 10^{-3},$$

il numero delle cifre significative è in ogni caso uguale ad 1.

Negli esempi presentati nella diapositiva successiva il numero delle cifre significative è ottenuto applicando il metodo appena mostrato.



CALCOLI: CIFRE SIGNIFICATIVE

Esempi

- ▷ $l = 13,2 = 1,32 \cdot 10^1$ ha tre cifre significative;
- ▷ $l = 13,21 = 1,321 \cdot 10^1$ ha quattro cifre significative;
- ▷ $l = 0,2 = 2 \cdot 10^{-1}$ ha una cifra significativa;
- ▷ $l = 0,001200 = 1,200 \cdot 10^{-3}$ ha quattro cifre significative;
- ▷ $l = 001287 = 1,287 \cdot 10^3$ ha quattro cifre significative.